TEOREMA DEL DINI E PROBLEMI DI MINIMO

DEFINIZIONE $C \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad f: C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- $x^0 \in C$ si dice punto di MINIMO / MASSIMO (assoluto) per f in C se

$$f(x^0) \overset{\geq}{\leq} f(x) \qquad \forall x \in C$$

o, equivalentemente, se

$$f(x^0) = \overset{\sup}{\inf_{x \in C}} f(x) = \overset{\max}{\min_{x \in C}} f(x)$$

Il valore $f(x^0)$ si dice il VALORE / VALORE MINIMO / MASSIMO o MINIMO / MASSIMO (assoluto) della funzione f su C

- Sia $\boxed{x^0 \in \mathring{C}}$ (cioè $\exists\, r_1 > 0$ tale che $B_{r_1}(x^0) \subseteq C$)

$x^0 \in \mathring{C}$ si dice punto di MINIMO / MASSIMO locale per f se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x^0) \subseteq C$ (ad esempio $0 < r \leq r_1$) e

$$f(x^0) \overset{\geq}{\leq} f(x) \qquad \forall x \in B_r(x^0) \qquad \text{MINIMO / MASSIMO LOCALE}$$

$$f(x^0) \overset{>}{<} f(x) \qquad \forall x \in B_r(x^0) \setminus \{x^0\} \qquad \text{MINIMO / MASSIMO LOCALE STRETTO}$$

<u>NOTAZIONE</u> I punti di massimo e i punti di minimo si dicono <u>punti di estremo</u> o <u>estremi</u> (assoluti o locali)

<u>PROPOSIZIONE</u> $C \subseteq \mathbb{R}^n$ $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Se $\boxed{x^0 \in \mathring{C}}$ è un punto di estremo <u>assoluto</u> per f su C, allora è anche un punto di estremo <u>locale</u> per f

(<u>condizione necessaria</u>)

<u>Punti di estremo locale: condizioni necessarie</u>

<u>DEFINIZIONE</u> $C \subseteq \mathbb{R}^n$ $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Sia $\boxed{x^0 \in \mathring{C}}$

$x^0 \in \mathring{C}$ si dice <u>punto critico</u> per f se

f <u>non</u> è differenziabile in x^0 oppure $\exists Df(x^0) = 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$

In particolare, se $x^0 \in \mathring{C}$ e f è <u>differenziabile</u> in x^0, x^0 è un punto critico se e solo se x^0 soddisfa

$$\nabla f(x^0) = 0 \in \mathbb{R}^n \qquad \text{\underline{Equazione di Eulero}}$$

In questo caso si dice che x^0 è un <u>punto stazionario</u> per f

<u>PROPOSIZIONE</u> $C \subseteq \mathbb{R}^n$ $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Se $\boxed{x^0 \in \mathring{C}}$ è un punto di estremo <u>locale</u> per f, allora

$\forall v \in \mathbb{R}^n,\ \|v\| = 1$

o <u>NON ESISTE</u> $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x^0)$ OPPURE $\exists \dfrac{\partial f}{\partial v}(x^0) = 0 \in \mathbb{R}$

IN PARTICOLARE, x^0 È UN <u>PUNTO CRITICO</u> PER f

(<u>CONDIZIONE NECESSARIA</u>)

<u>DIMOSTRAZIONE</u> SIA $g : (-r, r) \to \mathbb{R}$ TALE CHE

$$g(t) = f(x^0 + tv) \quad \forall t \in (-r, r)$$

ABBIAMO CHE $0 \in \mathbb{R}$ È UN PUNTO DI ESTREMO LOCALE PER g. QUINDI

o <u>NON ESISTE</u> $g'(0)$ OPPURE $\exists g'(0) = 0 \in \mathbb{R}$

MA $g'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(x^0)$. $\square$

<u>PUNTI DI ESTREMO LOCALE</u> : <u>CONDIZIONI NECESSARIE</u> E <u>SUFFICIENTI</u>

$$f : \mathring{C} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

SIA $x^0 \in \mathring{C}$ UN <u>PUNTO STAZIONARIO</u> PER f CIOÈ f È DIFFERENZIABILE IN x^0 E $\nabla f(x^0) = 0 \in \mathbb{R}^n$

<u>ESEMPI</u>

1) $f(x, y) = x^2 + y^2$

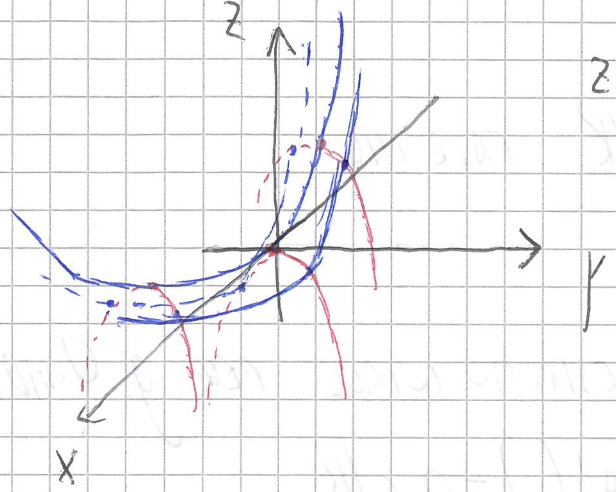
$(0, 0)$ PUNTO STAZIONARIO <u>MINIMO</u> <u>LOCALE</u> (<u>STRETTO</u>)

2) $f(x,y) = e^{-x^2}$ (4)

$(0,0)$ PUNTO STAZIONARIO MASSIMO LOCALE (NON STRETTO)

3) $f(x,y) = x^2 - y^2$

$(0,0)$ PUNTO STAZIONARIO NON È NÉ MASSIMO LOCALE NÉ MINIMO LOCALE



$z = f(x,y)$

PUNTO DI SELLA

SUPPONIAMO INOLTRE CHE f SIA DI CLASSE C^2 IN $A = \mathring{C}$

PER SEMPLICITÀ, SENZA PERDERE LA GENERALITÀ POSSIAMO SUPPORRE CHE $x^0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ E CHE $f(x^0) = 0 \in \mathbb{R}$

FORMULA DI TAYLOR DI ORDINE 2 IN $x^0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \langle \nabla f(0), x \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(0)x, x \rangle + R_2(x)$$

CON $\lim_{x \to 0} \frac{R_2(x)}{\|x\|^2} = 0$

- $x^0 = 0$ PUNTO STAZIONARIO $\Rightarrow \nabla f(0) = 0$
- PER IPOTESI $f(0) = 0$
- SIA $H = Hf(0)$

ALLORA

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Hx, x \rangle + R_2(x) \quad \text{con} \lim_{x \to 0} \frac{R_2(x)}{\|x\|^2} = 0$$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

H SIMMETRICA QUINDI ESISTE UNA MATRICE ORTOGONALE B (CIOÈ TALE CHE $B^T B = B B^T = I_n$ OVVERO $B^{-1} = B^T$) TALE CHE

$$H = B^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} B$$

DOVE $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ SONO GLI AUTOVALORI DELLA MATRICE H.

IN ALTRE PAROLE, H È DIAGONALIZZABILE TRAMITE UN CAMBIAMENTO RIGIDO DI COORDINATE.

OSSERVAZIONE

NEL CASO IN CUI $B = I_n$ E SE FOSSE $R_2 = 0$, ALLORA

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2$$

ED È CHIARO CHE IL COMPORTAMENTO LOCALE DIPENDE DAGLI AUTOVALORI $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ DI H.

TEOREMA $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x^0 \in \mathring{C}$

SIA f DI CLASSE C^2 IN $A = \mathring{C}$ E SIA $x^0 \in \mathring{C}$ UN PUNTO STAZIONARIO, CIOÈ $\nabla f(x^0) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

SIA $H = H_f(x^0)$ CON AUTOVALORI $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$

ALLORA SI HA

1) x^0 PUNTO DI MINIMO LOCALE $\Rightarrow \lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$

2) x^0 PUNTO DI MASSIMO LOCALE $\Rightarrow \lambda_i \leq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$

3) $\lambda_i > 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n \Rightarrow x^0$ PUNTO DI MINIMO LOCALE STRETTO

4) $\lambda_i < 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n \Rightarrow x^0$ PUNTO DI MASSIMO LOCALE STRETTO

5) SE $\lambda_1 < 0$ E $\lambda_n > 0$ ALLORA IL PUNTO x^0 NON È UN PUNTO DI ESTREMO LOCALE E SI DICE PUNTO DI SELLA

(1), 2) CONDIZIONI NECESSARIE ; 3), 4) CONDIZIONI SUFFICIENTI)

OSSERVAZIONE

$\lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n \not\Rightarrow x^0$ PUNTO DI MINIMO LOCALE

(ESEMPIO $f(x, y) = x^2 - y^4$)

$\lambda_i \leq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n \not\Rightarrow x^0$ PUNTO DI MASSIMO LOCALE

(ESEMPIO $f(x, y) = -x^3 - y^2$)

DIMOSTRAZIONE $x^0 = 0$, $f(x^0) = 0$, $\nabla f(x^0) = 0$

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Hx, x \rangle + R_2(x) = \frac{1}{2} \langle B^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} Bx, x \rangle + R_2(x) =$$

$$= \frac{1}{2} \langle \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} Bx, Bx \rangle + R_2(x)$$

SIA $y = Bx$ OVVERO $x = B^{-1}y = B^T y$

RICORDIAMO CHE $\|y\| = \|Bx\| = \|x\|$

SIA $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$. QUINDI

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 + R_2(x)$$

1) 0 PUNTO DI MINIMO LOCALE. FISSIAMO $j \in \{1, \dots, n\}$ E SIA $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$ TALE CHE $v = B^T e_j$ CIOÈ $e_j = B^T v$

ALLORA $\forall t \in (-r, r)$ SIA $x = tv$, QUINDI $y = B(tv) = te_j$. SI HA

$$0 = f(0) \leq f(tv) = \frac{1}{2} \lambda_j t^2 + R_2(tv) \quad \forall t \in (-r, r),\ t \neq 0 \Rightarrow$$

$$0 \leq \frac{f(tv)}{t^2} = \frac{1}{2} \lambda_j + \frac{R_2(tv)}{\underbrace{|t|^2}_{= \|tv\|^2}} \xrightarrow{t \to 0} \frac{1}{2} \lambda_j \Rightarrow \lambda_j \geq 0$$

2) <u>ANALOGAMENTE</u>

3) $0 < \lambda_1 \leq \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_n$. SI HA

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 + R_2(x) \geq \frac{1}{2} \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} y_k^2 + R_2(x) =$$

$$= \frac{1}{2} \lambda_1 \|y\|^2 + R_2(x) = \frac{1}{2} \lambda_1 \|x\|^2 + R_2(x) \quad \forall x \in B_{r_1}(0),\ x \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{\|x\|^2} \geq \frac{1}{2} \lambda_1 + \frac{R_2(x)}{\|x\|^2} \quad \forall x \in B_1(0),\ x \neq 0$$

ESISTE r, $0<r\le r_1$ TALE CHE $\forall x$, $0<\|x\|<r$ SI HA

$$\frac{|R_2(x)|}{\|x\|^2} < \frac{\lambda_1}{4} \quad \text{E QUINDI} \quad \frac{f(x)}{\|x\|^2} \geq \frac{\lambda_1}{4} > 0$$

DA CUI $f(x) > 0 = f(0) \ \forall x \in B_r(0) \setminus \{0\}$

4) ANALOGAMENTE

5) OVVIO DA 1), 2) $\square$

ESEMPI DETERMINARE I PUNTI DI ESTREMO LOCALE DELLE SEGUENTI FUNZIONI

1) $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 2x + 2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

CANDIDATI (PUNTI CRITICI)

- PUNTI (x,y) IN CUI f NON È DIFFERENZIABILE IN (x,y)

  NESSUNO, $f \in C^\infty$

- PUNTI (x,y) IN CUI f È DIFFERENZIABILE IN (x,y) E $\nabla f(x,y) = 0$

  f È DIFFERENZIABILE IN OGNI $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. RISOLVIAMO

$$\nabla f(x,y) = 0 \quad \text{CIOÈ} \quad (6x-2, 8y) = (0,0)$$

CIOÈ

$$\begin{cases} 6x - 2 = 0 \\ 8y = 0 \end{cases}$$

UNICO PUNTO CRITICO (PUNTO STAZIONARIO) $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$Hf\left(\tfrac{1}{3}, 0\right) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 6; \ \lambda_2 = 8$$

$\Rightarrow \left(\tfrac{1}{3}, 0\right)$ PUNTO DI <u>MINIMO</u> LOCALE <u>STRETTO</u>

(IN REALTÀ $\left(\tfrac{1}{3}, 0\right)$ È IL PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO

$y = f(x,y)$ "PARABOLOIDE")

2) $f(x,y) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - x^2 + y^4 + y^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

<u>CANDIDATI</u>

- PUNTI (x,y) IN CUI <u>NON</u> ESISTE $\nabla f(x,y)$

  nessuno, $f \in C^\infty$

- PUNTI (x,y) IN CUI $\exists \nabla f(x,y)$ E $\nabla f(x,y) = 0$

  f È DIFFERENZIABILE IN OGNI $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. RISOLVIAMO

$$\nabla f(x,y) = (x^3 - x^2 - 2x, \ 4y^3 + 2y) = (0,0) \quad \text{CIOÈ}$$

$$\begin{cases} x^3 - x^2 - 2x = 0 \\ 4y^3 + 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x-2)(x+1) = 0 \\ y(4y^2 + 2) = 0 \end{cases}$$

CANDIDATI (PUNTI STAZIONARI)

$(0,0)$, $(2,0)$, $(-1,0)$

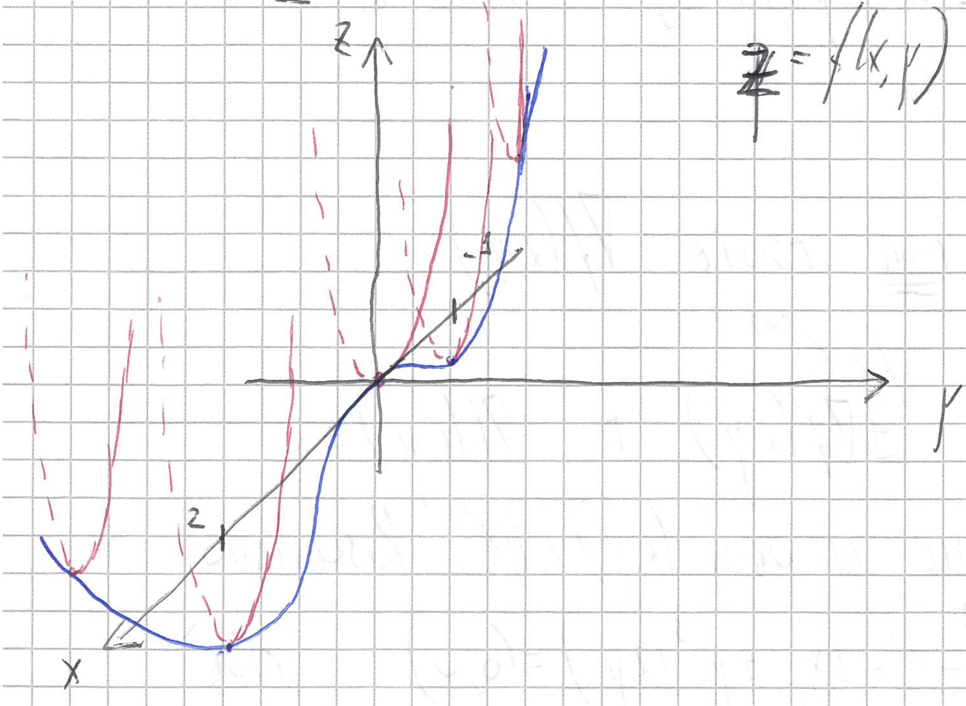
$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^2-2x-2 & 0 \\ 0 & 12y^2+2 \end{bmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ PUNTO DI SELLA, NON È ESTREMO LOCALE

$$Hf(2,0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ PUNTO DI MINIMO LOCALE STRETTO

(IN REALTÀ $(2,0)$ È IL PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO)

$$Hf(-1,0) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ PUNTO DI MINIMO LOCALE STRETTO



$z = f(x,y)$

"DOPPIO POZZO
A PROFONDITÀ DIVERSE"

3) $f(x,y) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - x^2 + y^4 - y^2$

PER ESERCIZIO

Problemi di minimo e massimo

Sia $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Determinare, se esiste

$$\min_{x \in C} f(x)$$

1) Dimostrare che esiste almeno un punto di minimo assoluto
2) Trovare tutti, o almeno uno, i punti di minimo e calcolare il valore minimo

Passo 1) Condizioni sufficienti per l'esistenza di un punto di minimo

Ad esempio, il Teorema di Weierstrass implica che

$$\left.\begin{array}{l} C \text{ compatto} \\ f \text{ continua} \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \min_{x \in C} f(x) \quad \text{e} \quad \exists \max_{x \in C} f(x)$$

Passo 2) Ammesso di aver dimostrato che esiste il minimo

Condizioni necessarie affinché $x^0 \in C$ sia un punto di minimo assoluto.

Distinguiamo il caso in cui $x^0 \in \mathring{C}$ e il caso in cui $x^0 \in \partial C$

Punti interni

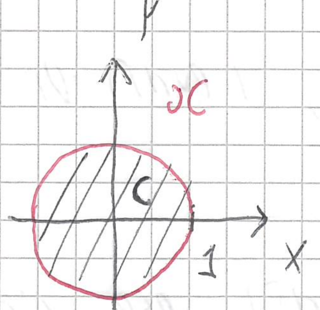
Se $\boxed{\mathring{x} \in \mathring{C}}$ è un punto di minimo assoluto, allora è un punto di minimo locale e quindi un punto critico

Punti al bordo

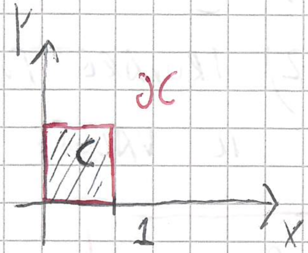
Problema: descrivere ∂C!

Esempi

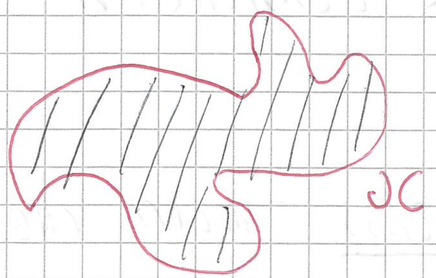
$C = \overline{B_1(0)} \subseteq \mathbb{R}^2$



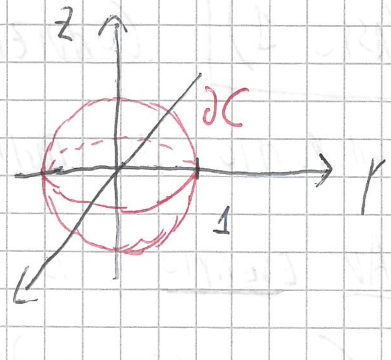
; $C = Q = [0,1] \times [0,1]$



C



; $C = \overline{B_1(0)} \subseteq \mathbb{R}^3$



Insiemi di livello

Definizione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ A qualunque

Sia $c \in \mathbb{R}^m$

$$\{x \in A : f(x) = c\} = \{f = c\} = f^{-1}(\{c\})$$

insieme di livello c della funzione f

Osservazione importante

- $\{f = c\} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n \quad \forall c \in \mathbb{R}^m$

• SE F È CONTINUA, $\forall c \in \mathbb{R}^m$

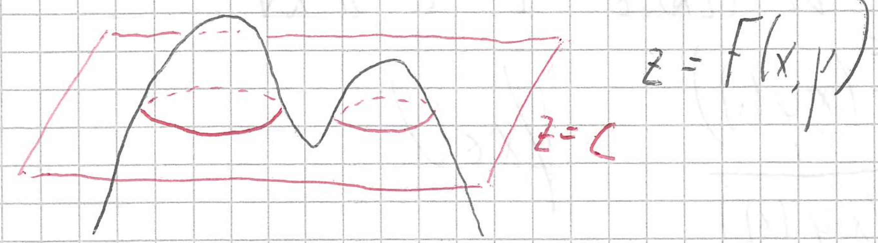
$\{F = c\}$ È CHIUSO IN A

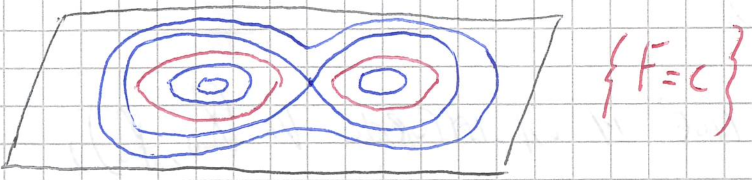
NOTAZIONE

$n=2$, $m=1$, $c \in \mathbb{R}$ $\{F = c\}$ CURVA DI LIVELLO

$n=3$, $m=1$, $c \in \mathbb{R}$ $\{F = c\}$ SUPERFICIE DI LIVELLO

ESEMPIO IMPORTANTE: CARTE TOPOGRAFICHE





TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE O DEL DINI ($n=2$, $m=1$)

SIA $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ A APERTO

SIA F DI CLASSE C^1 SU A

SIA $(x_0, y_0) \in A$ TALE CHE $F(x_0, y_0) = 0$ E

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0}$$

ALLORA ESISTONO UN INTORNO APERTO U DI x_0 E UN INTORNO APERTO

V di y_0 tali che $\forall x \in U$ esiste uno e un unico

$$y = y(x) = \varphi(x) \in V \quad \text{per cui} \quad F(x,y) = 0$$

In altre parole, esistono un intorno aperto U di x_0, un intorno aperto V di y_0 e una funzione $\varphi : U \to V$ tali che $\forall (x,y) \in U \times V$ si ha

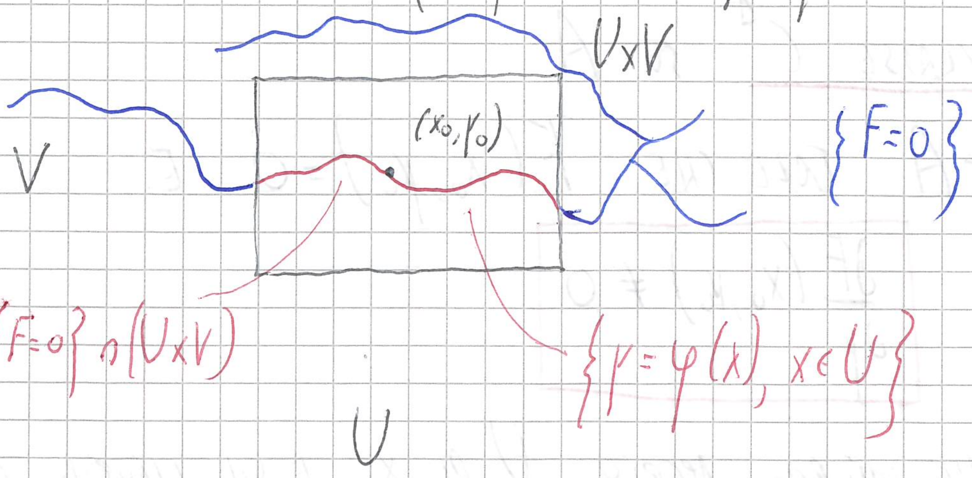
$$F(x,y) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad y = \varphi(x)$$

Inoltre, $\varphi : U \to V$ è di classe C^1 e si ha

$$(1) \qquad \varphi'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))} \qquad \forall x \in U$$

Interpretazione: localmente, cioè in un intorno di (x_0, y_0), $\{F = 0\}$ è il grafico di una funzione C^1

$$\{F = 0\} \cap (U \times V) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \varphi(x),\ x \in U\}$$



<u>OSSERVAZIONE</u> $F(x_0, y_0) = 0$ PER SEMPLICITÀ

SE $F(x_0, y_0) = c \in \mathbb{R}$ VALE LO STESSO RISULTATO PER $\{F = c\}$

(BASTA CONSIDERARE $F_1 = F - F(x_0, y_0) = F - c$)

<u>DIMOSTRAZIONE</u> SUPPONIAMO $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$

SE $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) < 0$ LA DIMOSTRAZIONE È ANALOGA

SICCOME $\frac{\partial F}{\partial y}$ È <u>CONTINUA</u> $\exists R = W \times V_1$ <u>RETTANGOLO CHIUSO</u>,

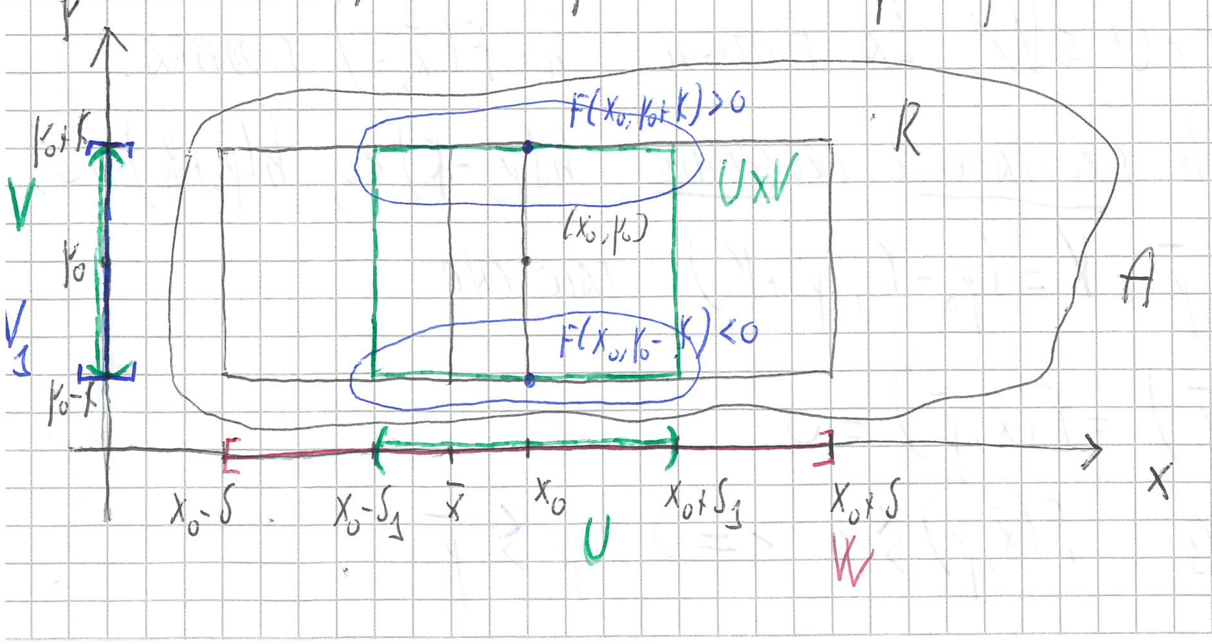
DOVE $W = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $V_1 = [y_0 - K, y_0 + K]$ CON $\delta, K > 0$, E $\exists m > 0$

TALI CHE $R \subseteq A$ E

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \geq m > 0 \qquad \forall (x, y) \in R$$

INOLTRE, PER LA CONTINUITÀ DI $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\exists M > 0$ TALE CHE

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \right| \leq M \qquad \forall (x, y) \in R$$



FISSIAMO $\bar{x} \in W$. SIA

$$h = F(\bar{x}, \cdot) : V_1 \to \mathbb{R}$$
$$y \to h(y) = F(\bar{x}, y)$$

$h'(y) = \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, y) > 0 \quad \forall y \in V_1 \Rightarrow h$ È STRETTAMENTE CRESCENTE SU V_1

IN PARTICOLARE, $F(x_0, \cdot) : V_1 \to \mathbb{R}$ È STRETTAMENTE CRESCENTE, QUINDI

$$F(x_0, y_0 - K) < 0 = F(x_0, y_0) < F(x_0, y_0 + K)$$

PER LA CONTINUITÀ DI F, IN PARTICOLARE PER LA CONTINUITÀ DI

$F(\cdot, y_0 - K) : W \to \mathbb{R}$ E $F(\cdot, y_0 + K) : W \to \mathbb{R}$, E LA PERMANENZA

DEL SEGNO, $\exists \delta_1, \ 0 < \delta_1 \leq \delta$ TALE CHE

$\forall x \in U = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ SI HA

$$F(x, y_0 - K) < 0 \quad \text{E} \quad F(x, y_0 + K) > 0$$

SIA ORA $\bar{x} \in U \subseteq W$. LA FUNZIONE $h = F(\bar{x}, \cdot)$ SODDISFA:

h CONTINUA, h STRETTAMENTE CRESCENTE, $h(y_0 - K) < 0$, $h(y_0 + K) > 0$

QUINDI $\exists ! \ \bar{y} \in V = (y_0 - K, y_0 + K)$ TALE CHE

$$h(\bar{y}) = F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

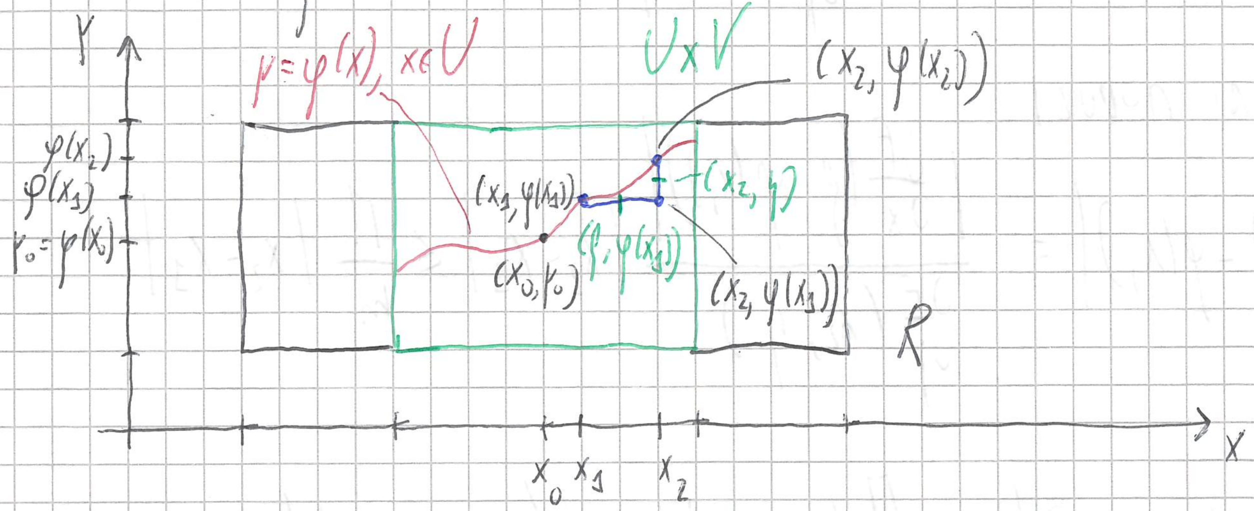
INOLTRE, $\forall y \in V_1 \quad F(\bar{x}, y) \lessgtr 0 \iff y \lessgtr \bar{y}$

ABBIAMO DIMOSTRATO LA PRIMA PARTE DEL TEOREMA, CIOÈ

$$\forall x \in U \ \exists! \ y = \varphi(x) \in V \ \text{TALE CHE} \ F(x,y) = 0$$

RIMANE DA DIMOSTRARE CHE φ È DI CLASSE C^1 E CHE VALE (1)

<u>CONTINUITÀ DI φ</u> SIANO $x_1, x_2 \in U$, $x_1 \neq x_2$



$$0 = F(x_2,\varphi(x_2)) - F(x_1,\varphi(x_1)) = F(x_2,\varphi(x_2)) - F(x_2,\varphi(x_1)) + F(x_2,\varphi(x_1)) - F(x_1,\varphi(x_1)) =$$

$$\underset{\text{LAGRANGE}}{=} \frac{\partial F}{\partial y}(x_2,\eta)(\varphi(x_2)-\varphi(x_1)) + \frac{\partial F}{\partial x}(\xi,\varphi(x_1))(x_2-x_1)$$

CON $x_1 < \xi < x_2$ OPPURE $x_2 < \xi < x_1$ E $\varphi(x_1) \leq \eta \leq \varphi(x_2)$ OPPURE $\varphi(x_2) \leq \eta \leq \varphi(x_1)$

CIOÈ $\forall x_1, x_2 \in U$, $x_1 \neq x_2$ $\exists \xi, \eta$ COME SOPRA TALI CHE

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_2,\eta)(\varphi(x_2)-\varphi(x_1)) = -\frac{\partial F}{\partial x}(\xi,\varphi(x_1))(x_2-x_1)$$

SICCOME $(x_2,\eta) \in R$ E $(\xi,\varphi(x_1)) \in R$, ABBIAMO CHE

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_2, \eta) \geq m > 0 \quad \text{E} \quad \left|\frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \varphi(x_1))\right| \leq M$$ (18)

QUINDI

$$(2) \qquad \varphi(x_2) - \varphi(x_1) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \varphi(x_1))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_2, \eta)} (x_2 - x_1)$$

PASSANDO AI MODULI

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| = \frac{\left|\frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \varphi(x_1))\right|}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_2, \eta)} |x_2 - x_1| \leq \frac{M}{m} |x_2 - x_1|$$

QUINDI

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leq \frac{M}{m} |x_2 - x_1| \qquad \forall\, x_1, x_2 \in U$$

CIOÈ φ È <u>LIPSCHITZIANA</u>, QUINDI <u>CONTINUA</u>

<u>DERIVABILITÀ DI φ</u> SIANO $x_1, x_2 \in U$, $x_1 \neq x_2$

DALLA (2)

$$\frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \varphi(x_1))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_2, \eta)}$$

CON ξ, η COME SOPRA. IN PARTICOLARE, LA <u>CONTINUITÀ</u> DI φ IMPLICA CHE SE $x_2 \to x_1$ ALLORA $\varphi(x_2) \to \varphi(x_1)$, DA CUI SEGUE CHE SE $x_2 \to x_1$

$$(x_2, \varphi(x_1)) \to (x_1, \varphi(x_1))$$

E

$$(x_2, \varphi) \to (x_1, \varphi(x_1))$$

PER LA CONTINUITÀ DI $\frac{\partial F}{\partial x}$ E $\frac{\partial F}{\partial y}$, E IL LIMITE DELLA FUNZIONE COMPOSTA, SI CONCLUDE CHE

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_1, \varphi(x_1))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \varphi(x_1))}$$

QUINDI φ È DERIVABILE E VALE LA FORMULA (1) CIOÈ

$$\exists \varphi'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))} \quad \forall x \in U$$

$\underline{C^1}$

SEGUE IMMEDIATAMENTE DALLA FORMULA (1), DALLA CONTINUITÀ DI φ, $\frac{\partial F}{\partial x}$ E $\frac{\partial F}{\partial y}$. $\square$

<u>OSSERVAZIONE</u>

1) SE F È DI CLASSE C^k, $k \geq 1$, ALLORA ANCHE φ È DI CLASSE C^k

2) SIA $s: U \to \mathbb{R}$

$$x \to s(x) = F(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}$$

ABBIAMO CHE $s(x) = 0 \quad \forall x \in U$

SUPPONENDO CHE φ E F SIANO DIFFERENZIABILI, $\forall x \in U$ SI HA

$$0 = \frac{d}{dx} s(x) = s'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

QUINDI

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

3) LOCALMENTE, IN UN INTORNO DI (x_0, y_0), $\{F = 0\}$ È IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE C^1 $\varphi : U \to V$

SIA $P_0 = (x_0, y_0) = (x_0, \varphi(x_0))$

DEFINIAMO T LA RETTA (AFFINE) TANGENTE ALLA CURVA DI LIVELLO $\{F = 0\}$ NEL PUNTO P_0 PASSANTE PER IL PUNTO P_0 COME LA RETTA (AFFINE) TANGENTE AL GRAFICO DI φ NEL PUNTO P_0 PASSANTE PER IL PUNTO P_0

DEFINIAMO $TG(P_0)$ LA RETTA (VETTORIALE) TANGENTE ALLA CURVA DI LIVELLO $\{F = 0\}$ NEL PUNTO P_0 COME LA RETTA (VETTORIALE) TANGENTE AL GRAFICO DI φ

EQUAZIONE DI T

$$y - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0)(x - x_0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y-y_0)=0$$

CIOÈ

$$\boxed{\langle \nabla F(P_0), ((x,y)-(x_0,y_0))\rangle = 0}$$

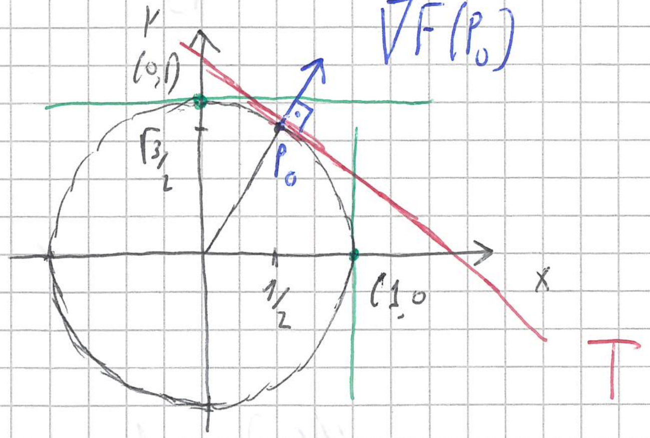
EQUAZIONE DI $TG(P_0)$

$$\boxed{\langle \nabla F(P_0), (x,y)\rangle = 0}$$

ESEMPI

1) DETERMINARE L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE ALLA CURVA $x^2+y^2=1$ PER PUNTO $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ PASSANTE PER IL PUNTO $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

SVOLGIMENTO



a) LOCALMENTE, IN UN INTORNO DI $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, LA CURVA SI PUÒ PARAMETRIZZARE CON $y=y(x)=\sqrt{1-x^2}$

RETTA TANGENTE $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$

CIOÈ $\quad y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

b) $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2y$

$F\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1; \quad \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} \neq 0$

LOCALMENTE, IN UN INTORNO DI $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\{y = y(x) = \varphi(x)\} = \{F = 0\}$

2 MODI

1) FORMULA $\quad y'(x) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}$

QUINDI PER $x_0 = \frac{1}{2}$ SI HA $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ E $y'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

2) DERIVAZIONE IMPLICITA

$x^2 + y(x)^2 = 1 \qquad d/dx$

$2x + 2y(x)\,y'(x) = 0$ QUINDI

$y'(x) = -\frac{2x}{2y(x)}$ E PER $x_0 = \frac{1}{2}$ SI HA $y'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\nabla F\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(1, \sqrt{3}\right)$

$\langle \nabla F(P_0), (x,y) - (x_0, y_0) \rangle = 0$

CIOÈ $\langle (1, \sqrt{3}), \left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rangle = 0$

CIOÈ
$$x - \frac{1}{2} + \sqrt{3}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

2) DETERMINARE L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE ALLA CURVA
$$e^{3y+1} - x^2 = 1 \quad \text{IN } \left(\sqrt{e^4-1}, 1\right)$$ PASSANTE PER IL PUNTO $\left(\sqrt{e^4-1}, 1\right)$

SVOLGIMENTO

a) LOCALMENTE, IN UN INTORNO DI $\left(\sqrt{e^4-1}, 1\right)$, LA CURVA SI PUÒ PARAMETRIZZARE CON $y = y(x) = \dfrac{\log(1+x^2) - 1}{3}$
$$y'\left(\sqrt{e^4-1}\right) = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{e^4-1}}{e^4}$$ QUINDI LA RETTA TANGENTE È
$$y - 1 = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{e^4-1}}{e^4}\left(x - \sqrt{e^4-1}\right)$$

b2) $F(x,y) = e^{3y+1} - x^2 - 1$
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -2x \ ; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3e^{3y+1}$$
$$F\left(\sqrt{e^4-1}, 1\right) = 0 \ ; \quad \frac{\partial F}{\partial x}\left(\sqrt{e^4-1}, 1\right) = -2\sqrt{e^4-1} \ ; \quad \frac{\partial F}{\partial y}\left(\sqrt{e^4-1}, 1\right) = 3e^4 \neq 0$$

LOCALMENTE, IN UN INTORNO DI $\left(\sqrt{e^4-1}, 1\right)$, $\{y = y(x) = \varphi(x)\} = \{F = 0\}$
$$e^{3y(x)+1} - x^2 - 1 = 0 \qquad d/dx$$
$$3y'(x)e^{3y(x)} - 2x = 0$$ QUINDI
$$y'(x) = -\left(\frac{-2x}{3e^{3y(x)+1}}\right) = -\frac{\partial F/\partial x\,(x, y(x))}{\partial F/\partial y\,(x, y(x))}$$

PER $x_0 = \sqrt{e^4-1}$ SI HA $y\left(\sqrt{e^4-1}\right) = 1$ E $y'\left(\sqrt{e^4-1}\right) = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{e^4-1}}{e^4}$

3) DETERMINARE L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE ALLA CURVA $y e^{3y+1} - x^2 = 1$ IN $\left(\sqrt{e^4-1}, 1\right)$ PASSANTE PER IL PUNTO $\left(\sqrt{e^4-1}, 1\right)$

SVOLGIMENTO

a) DIFFICILE RISOLVERE, ESPLICITAMENTE,

$$y e^{3y+1} = 1 + x^2 \quad \text{CON } x \text{ ASSEGNATO}$$

NON FACILE TROVARE LA PARAMETRIZZAZIONE DELLA CURVA $y = y(x)$ NEMMENO LOCALMENTE IN UN INTORNO DI $\left(\sqrt{e^4-1}, 1\right)$

NON FACILE NEMMENO MOSTRARE CHE LOCALMENTE IN UN INTORNO DI $\left(\sqrt{e^4-1}, 1\right)$, L'INSIEME $\{y e^{3y+1} - x^2 = 1\}$ SIA UNA CURVA O UN GRAFICO $y = y(x)$

c) $F(x,y) = y e^{3y+1} - x^2 - 1$

$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -2x$; $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = e^{3y+1} + 3y e^{3y+1}$

$F\left(\sqrt{e^4-1}, 1\right) = 0$; $\frac{\partial F}{\partial x}\left(\sqrt{e^4-1}, 1\right) = -2\sqrt{e^4-1}$; $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\sqrt{e^4-1}, 1\right) = 4e^4 \neq 0$

OSSERVIAMO CHE $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\sqrt{e^4-1}, 1\right) \neq 0$ IMPLICA IN PARTICOLARE CHE

$$\nabla F\left(\sqrt{e^4-1}, 1\right) \neq (0,0)!$$

Retta tangente

$$\langle (-2\sqrt{p^4-1},\ 4p^4),\ (x-\sqrt{p^4-1},\ y-1) \rangle = 0$$

cioè

$$-2\sqrt{p^4-1}\left(x-\sqrt{p^4-1}\right) + 4p^4 (y-1) = 0$$

Notazione $\boxed{N \geq 2}$ $\boxed{1 \leq M < N}$

$$F : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M, \quad A \text{ aperto}$$

$P \in \mathbb{R}^N$ $\quad P = (x,y) = (x_1, \dots, x_{N-M}, y_1, \dots, y_M) \in \mathbb{R}^{N-M} \times \mathbb{R}^M$

Sia F <u>differenziabile</u> in P. Definiamo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P) = \frac{\partial (F_1, \dots, F_M)}{\partial (x_1, \dots, x_{N-M})}(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{N-M}}(P) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_M}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial F_M}{\partial x_{N-M}}(P) \end{bmatrix}$$

matrice $M \times (N-M)$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(P) = \frac{\partial (F_1, \dots, F_M)}{\partial (y_1, \dots, y_M)}(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(P) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_M}(P) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_M}{\partial y_1}(P) & \dots & \frac{\partial F_M}{\partial y_M}(P) \end{bmatrix}$$

matrice $M \times M$

Quindi

$$JF(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(P) & \frac{\partial F}{\partial y}(P) \end{bmatrix}$$

$M \times N$ $\qquad M \times (N-M)$ $\qquad M \times M$

Teorema Sia A una matrice $M \times N$ con $M \leq N$

Allora le seguenti condizioni sono equivalenti

1) Le m righe di A sono linearmente indipendenti

2) A ha m colonne linearmente indipendenti

In questo caso diremo che A ha rango massimo e, a meno di una permutazione delle colonne, possiamo supporre che

$$\underset{m \times n}{A} = [\underset{m \times (n-m)}{A_1} \quad \underset{m \times m}{A_2}]$$ con A_2 invertibile

Osservazione $A \in M^{m \times m}(\mathbb{R})$

A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$

Inoltre

$$\det : M^{m \times m}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$A \to \det A$$

è una funzione continua degli elementi di A

Teorema delle funzioni implicite (caso generale)

Sia $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ A aperto, $\boxed{1 \leq m < n}$

Sia F di classe C^k, $k \geq 1$, su A

Sia $P_0 \in A$ tale che $JF(P_0)$ abbia rango massimo

Allora, a meno di riordinare le variabili,

$P_0 = (x^0, y^0) = (x_1^0, \dots, x_{n-m}^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$ e

$$\boxed{\det\left[\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)\right] \neq 0}$$

ALLORA ESISTONO UN INTORNO APERTO $U \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ DI $x^0 \in \mathbb{R}^{n-m}$ E UN INTORNO APERTO $V \subseteq \mathbb{R}^m$ DI $y^0 \in \mathbb{R}^m$ E UNA FUNZIONE $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^{n-m} \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ TALI CHE $\forall (x,y) \in U \times V$ SI HA

$$F(x,y) = F(P_0) \text{ SE E SOLO SE } y = \varphi(x)$$

CIOÈ

$$\{F = F(P_0)\} \cap (U \times V) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m : y = \varphi(x),\ x \in U\}$$

INOLTRE $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^{n-m} \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ È DI CLASSE C^k E SI HA

$$\underset{m \times (n-m)}{J\varphi(x)} = -\underset{m \times m}{\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\right]^{-1}} \underset{m \times (n-m)}{\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))\right]}$$

<u>OSSERVAZIONE</u>

1) SIA $s : U \subseteq \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$

$$x \to s(x) = F(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^m$$

ABBIAMO CHE $s(x) = F(P_0) \in \mathbb{R}^m \quad \forall x \in U$

<u>SUPPONENDO</u> CHE φ E F SIANO DIFFERENZIABILI, $\forall x \in U$ SI HA

$$0 = Js(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) \cdot I_{n-m} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) J\varphi(x)$$

QUINDI

$$J\varphi(x) = -\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))\right]^{-1}\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))\right]$$

2) LOCALMENTE, IN UN INTORNO DI $P_0 = (x^0, y^0)$, $\{F = F(P_0)\}$ È IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE C^k $\varphi : U \to V$ DI $(n-m)$ VARIABILI A VALORI IN $\mathbb{R}^m$ E SI HA $P_0 = (x^0, y^0) = (x^0, \varphi(x^0))$

DEFINIAMO T IL SOTTOSPAZIO (AFFINE) TANGENTE ALL'INSIEME DI LIVELLO $\{F = F(P_0)\}$ NEL PUNTO P_0 PASSANTE PER IL PUNTO P_0 COME IL SOTTOSPAZIO (AFFINE) TANGENTE AL GRAFICO DI φ NEL PUNTO P_0 PASSANTE PER IL PUNTO P_0

DEFINIAMO $TG(P_0)$ IL SOTTOSPAZIO (VETTORIALE) TANGENTE ALL'INSIEME DI LIVELLO $\{F = F(P_0)\}$ NEL PUNTO P_0 COME IL SOTTOSPAZIO (VETTORIALE) TANGENTE AL GRAFICO DI φ NEL PUNTO P_0.

EQUAZIONE DI T

$$T = \{P \in \mathbb{R}^n : JF(P_0) \cdot (P - P_0) = 0 \in \mathbb{R}^m\}$$

CIOÈ SE $P = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-m} \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ E $P_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_{n-m}^0 \\ y_1^0 \\ \vdots \\ y_m^0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ L'EQUAZIONE DI T È

$$\boxed{JF(P_0)\cdot(P-P_0)=0\in\mathbb{R}^m \quad , \quad P\in\mathbb{R}^n}$$

EQUAZIONE DI $TG(P_0)$

SIA $V=\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^n$. ALLORA $v\in TG(P_0)$ SE E SOLO SE

$$JF(P_0)\cdot v=0\in\mathbb{R}^m$$

VALE A DIRE L'EQUAZIONE DI $TG(P_0)$ È

$$\boxed{JF(P_0)\cdot v=0\in\mathbb{R}^m, \quad v\in\mathbb{R}^n}$$

SISTEMA DI m EQUAZIONI LINEARI OMOGENEE IN n VARIABILI

OSSERVAZIONE
- T SOTTOSPAZIO AFFINE DI DIMENSIONE $n-m$
- $TG(P_0)$ SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE $n-m$
- L'EQUAZIONE DI T E L'EQUAZIONE DI $TG(P_0)$ NON RICHIEDONO IL CALCOLO ESPLICITO DELLA FUNZIONE IMPLICITA φ!

DIMOSTRAZIONE DIMOSTRIAMO CHE $JF(P_0)\cdot v=0$ È L'EQUAZIONE DI $TG(P_0)$ (QUELLA DI T SI OTTIENE IMMEDIATAMENTE DAL FATTO CHE $T=P_0+TG(P_0)$)

SIA $V=\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-m} \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$. ALLORA $v\in TG(P_0)$ SE E SOLO SE

$$y = J\varphi(x^0) \cdot x \quad \text{SE E SOLO SE}$$

$$-J\varphi(x^0) \cdot x + I_n\, y = 0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{SE E SOLO SE}$$

$$\left[-J\varphi(x^0),\ I_n\right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{SE E SOLO SE}$$

$$\left[-\left(-\left[\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)\right]^{-1}\left[\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)\right]\right),\ \left[\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)\right]^{-1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)\right]\right] \cdot v = 0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{SE E SOLO SE}$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)\right]^{-1} \underbrace{\left[\frac{\partial F}{\partial x}(P_0),\ \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)\right]}_{= JF(P_0)} \cdot v = 0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{SE E SOLO SE}$$

$$JF(P_0) \cdot v = 0 \in \mathbb{R}^n \qquad \square$$

APPLICAZIONE: PROPRIETÀ DEL GRADIENTE

SIA $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, A APERTO, $P_0 \in A$

SIA F DIFFERENZIABILE IN P_0 E SIA $\boxed{\nabla F(P_0) \neq 0}$

a) IL GRADIENTE INDIVIDUA LA MASSIMA PENDENZA E LA DIREZIONE DI MASSIMA PENDENZA

$\|\nabla F(P_0)\|$ MASSIMA PENDENZA

$\tilde{w} = \dfrac{\nabla F(P_0)}{\|\nabla F(P_0)\|}$ DIREZIONE DI MASSIMA PENDENZA

INFATTI $\|\tilde{w}\|=1$, QUINDI $\tilde{w}$ È UNA DIREZIONE E VALE

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{w}}(P_0) = \max_{\|w\|=1} \frac{\partial F}{\partial w}(P_0) = \|\nabla F(P_0)\|$$

PER DIMOSTRARE QUESTO FATTO BASTA OSSERVARE CHE $\forall w, \|w\|=1$

$$\frac{\partial F}{\partial w}(P_0) = \langle \nabla F(P_0), w \rangle \leq \|\nabla F(P_0)\| \|w\| = \|\nabla F(P_0)\|$$

E CHE

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{w}}(P_0) = \langle \nabla F(P_0), \tilde{w} \rangle = \langle \nabla F(P_0), \frac{\nabla F(P_0)}{\|\nabla F(P_0)\|} \rangle = \|\nabla F(P_0)\|$$

b) SUPPONIAMO INOLTRE CHE F SIA DI CLASSE C^1 SU A

$$JF(P_0) \text{ HA RANGO MASSIMO} \iff \nabla F(P_0) \neq 0$$

QUINDI, SUPPONENDO $\nabla F(P_0) \neq 0$, LOCALMENTE, IN UN INTORNO DI P_0, $\{F=F(P_0)\}$ È IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE C^1 DI $(n-1)$ VARIABILI A VALORI REALI. L'EQUAZIONE DI $TG(P_0)$ È

$$\langle \nabla F(P_0), v \rangle = 0 \in \mathbb{R}, \quad v \in \mathbb{R}^n$$

E L'EQUAZIONE DELL'IPERPIANO (AFFINE) TANGENTE A $\{F=F(P_0)\}$ IN P_0 PASSANTE PER P_0 È

$$\langle \nabla F(P_0), P-P_0 \rangle = 0, \quad P \in \mathbb{R}^n$$

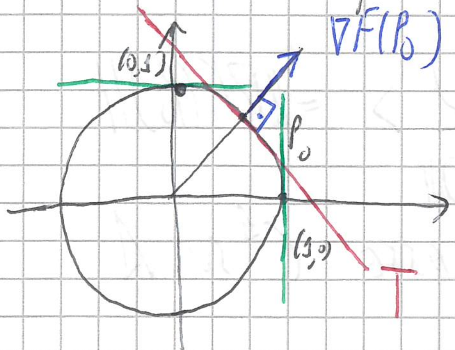
NOTIAMO CHE $TG(P_0)$ È IL SOTTOSPAZIO ORTOGONALE A $\nabla F(P_0)$

DIREMO QUINDI CHE $\nabla F(P_0)$ È **PERPENDICOLARE** O **NORMALE** ALL'INSIEME DI LIVELLO $\{F=F(P_0)\}$ IN P_0 E CHE

$$\tilde{w} = \frac{\nabla F(P_0)}{\|\nabla F(P_0)\|}$$

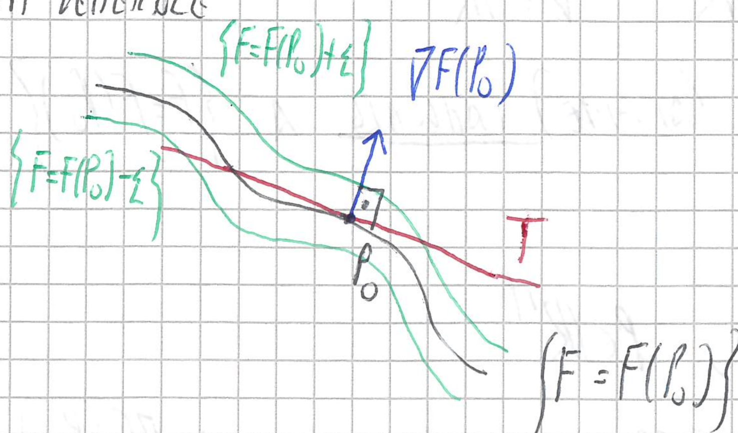
E $-\tilde{w}$ SONO I **VERSORI** O **DIREZIONI NORMALI** ALL'INSIEME DI LIVELLO $\{F=F(P_0)\}$ IN P_0

AD ESEMPIO $F(x,y)=x^2+y^2-1$



OSSERVARE I PUNTI (1,0) E (0,1). SE $\nabla F(P_0)$ HA RANGO MASSIMO (IN QUESTO CASO SE $\nabla F(P_0)$) L'EQUAZIONE DEL SOTTOSPAZIO TANGENTE NON RICHIEDE IL CALCOLO DELLA FUNZIONE IMPLICITA φ E **NEMMENO** IL RIORDINO DELLE **VARIABILI**

IN GENERALE



$\varepsilon > 0$