OSSERVAZIONE IMPORTANTE

$$F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad 1 \le m < n, \quad A \text{ APERTO}, \; P_0 \in A$$

SIA F DI CLASSE C^1 SU A E $JF(P_0)$ ABBIA RANGO MASSIMO

ALLORA $C = \{F = F(P_0)\}$ È, LOCALMENTE IN UN INTORNO DI P_0, IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE C^1 DI $(n-m)$ VARIABILI A VALORI IN $\mathbb{R}^m$ CIOÈ È UNA VARIETÀ DI DIMENSIONE $n-m$ IMMERSA IN $\mathbb{R}^n$

$\boxed{m=1}$ C IPERSUPERFICIE IN $\mathbb{R}^n$

$\boxed{n=2,\ m=1}$ C CURVA IN $\mathbb{R}^2$

$\boxed{n=3,\ m=1}$ C SUPERFICIE IN $\mathbb{R}^3$

$\boxed{n=3,\ m=2}$ C CURVA IN $\mathbb{R}^3$

TEOREMA DI INVERSIONE LOCALE $\boxed{n=m}$

SIA $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, A APERTO

SIA F DI CLASSE C^1 SU A

SIA $P_0 \in A$ TALE CHE $JF(P_0)$ SIA INVERTIBILE (CIOÈ $\det JF(P_0) \neq 0$, CIOÈ $JF(P_0)$ HA RANGO MASSIMO)

ALLORA ESISTONO UN INTORNO APERTO $U \subseteq \mathbb{R}^n$ DI P_0 E

UN INTORNO APERTO $V \subseteq \mathbb{R}^n$ DI $F(P_0)$ TALI CHE

$$F: U \to V \text{ È UNA } \underline{\text{BIEZIONE}} \text{ E}$$

$F^{-1}: V \to U$ È DI CLASSE C^1, CIOÈ

F È UN <u>C^1-DIFFEOMORFISMO</u> <u>LOCALE</u> IN P_0

IN PARTICOLARE, P_0 È UN PUNTO ISOLATO DI $C = \{F = F(P_0)\}$

INFATTI SE $r > 0$ È TALE CHE $B_r(P_0) \subseteq U$ SI HA CHE

$$B_r(P_0) \cap C = \{P_0\}$$

<u>PROBLEMI DI MINIMO VINCOLATO</u>

- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO $\quad F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad 1 \leq m \leq n$

$C = \{P \in A : F(P) = 0 \in \mathbb{R}^m\} \subseteq A$ <u>INSIEME</u> <u>VINCOLATO</u>

$$\begin{cases} F_1(P) = 0 \\ \vdots \\ F_m(P) = 0 \end{cases} \qquad \underline{\text{VINCOLI}} \text{ SU } P$$

- $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

SIA $P_0 \in C$. DIREMO CHE $P_0 \in C$ È UN <u>PUNTO</u> DI <u>MINIMO</u> (<u>MASSIMO</u>) <u>LOCALE</u> PER f <u>RELATIVO</u> AL <u>VINCOLO</u> C SE ESISTE UN INTORNO W DI P_0 PER CUI SI HA

$$f(P) \overset{\text{LT}}{\geq} f(P_0) \quad \forall P \in \boxed{C \cap W}$$

Teorema dei moltiplicatori di Lagrange

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $\quad F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $1 \leq m \leq n$

$P_0 \in A \quad C = \{F = F(P_0)\} \subseteq A$

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Supponiamo che

- F è di classe C^1 su A e $JF(P_0)$ ha rango massimo
- f differenziabile in P_0

Se P_0 è un punto di estremo locale per f relativamente al vincolo C, allora esistono coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, detti moltiplicatori di Lagrange, tali che

$$\nabla f(P_0) = \lambda_1 \nabla F_1(P_0) + \dots + \lambda_m \nabla F_m(P_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla F_i(P_0)$$

(condizione necessaria per i punti di estremo locale vincolato)

Osservazione $\boxed{m = n}$

- $\exists r > 0$ tale che $C \cap B_r(P_0) = \{P_0\}$ quindi P_0 è sia minimo che massimo locale per f su C
- $JF(P_0)$ ha rango massimo implica che $\nabla F_1(P_0), \dots, \nabla F_m(P_0)$

È UNA BASE DI $\mathbb{R}^n$ QUINDI ESISTONO $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

TALI CHE
$$\nabla f(P_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla F_i(P_0)$$

DIMOSTRAZIONE $\boxed{1 \leq m < n}$

A MENO DI RIORDINARE LE VARIABILI, $P_0 = (x^0, y^0) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$,

$$\det \frac{\partial F}{\partial y}(P_0) \neq 0 \qquad \text{E}$$

$$C \cap (U \times V) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m : y = \varphi(x), \quad x \in U \}$$

DOVE $x^0 \in U \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$, U APERTO, E $\varphi(x^0) = y^0$

ESISTE W INTORNO APERTO DI P_0, $W \subseteq U \times V$, TALE CHE

$$f(P_0) \leq f(P) \quad \forall P \in C \cap W \quad (\text{MINIMO LOCALE})$$

$U \ni x \to (x, \varphi(x))$ CONTINUA QUINDI ESISTE

U_1 APERTO, $x^0 \in U_1 \subseteq U$, TALE CHE

$$P = (x, \varphi(x)) \in C \cap W \quad \forall x \in U_1 \quad \text{E QUINDI}$$

$$f(P_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) \leq f(x, \varphi(x)) = f(P) \quad \forall x \in U_1$$

IN ALTRE PAROLE, SE DEFINIAMO

$$f_1 : U \subseteq \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x, \varphi(x))$$

OTTENIAMO CHE $x^0 \in U \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ È UN PUNTO DI MINIMO LOCALE INTERNO, QUINDI LIBERO CIOÈ NON VINCOLATO, PER f_1 SU U.

MA φ È DI CLASSE C^1 SU U, f DIFFERENZIABILE IN $P_0 = (x^0, \varphi(x^0))$, QUINDI f_1 È DIFFERENZIABILE IN x^0 E

$$\mathbb{R}^{n-m} \ni 0 = \underset{1 \times (n-m)}{\nabla f_1(x^0)} = \underset{1 \times n}{\nabla f(P_0)} \cdot \underset{n \times (n-m)}{\begin{bmatrix} I_{n-m} \\ J\varphi(x^0) \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\text{CASO } n=2,\ m=1}$$

$$P_0 = (x_0, y_0) = (x_0, \varphi(x_0)), \qquad x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \ni 0 = f_1'(x_0) = \nabla f(P_0) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \varphi'(x_0) \end{bmatrix} = \nabla f(P_0) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{\partial F/\partial x (P_0)}{\partial F/\partial y (P_0)} \end{bmatrix}$$

SIA $\tau = \left(1, \dfrac{\partial F}{\partial x}(P_0) \Big/ \dfrac{\partial F}{\partial y}(P_0)\right) \neq 0$

ABBIAMO CHE $\langle \nabla F(P_0), \tau \rangle = 0$ CON $\nabla F(P_0) \neq 0$

$f_1'(x_0) = 0$ IMPLICA CHE

$$\langle \nabla f(P_0), \tau \rangle = 0$$

DA CUI SEGUE CHE ESISTE $\lambda \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla F(P_0) \qquad \square$$

OSSERVAZIONE

SIA $\tilde{\tau} = \dfrac{\tau}{\|\tau\|}$ E $\tilde{w} = \dfrac{\nabla F(P_0)}{\|\nabla F(P_0)\|}$

$\tilde{\tau}, \tilde{w}$ È UNA <u>BASE</u> <u>ORTONORMALE</u> DI $\mathbb{R}^2$

E $TG(P_0) = \mathrm{span}\{\tilde{\tau}\} = \{v = \mu\tilde{\tau} : \mu \in \mathbb{R}\}$

E $TG(P_0)^{\perp} = \{w \in \mathbb{R}^2 : \langle v, w\rangle = 0 \ \forall v \in TG(P_0)\} =$

$= \mathrm{span}\{\tilde{w}\} = \{w = \lambda\tilde{w} : \lambda \in \mathbb{R}\}$

ALLORA OGNI VETTORE $h \in \mathbb{R}^2$ SI PUÒ SCRIVERE IN MANIERA UNICA NELLA FORMA

$$h = \mu\tilde{\tau} + \lambda\tilde{w} \quad \left(\text{con } \mu = \langle h, \tilde{\tau}\rangle \text{ e } \lambda = \langle h, \tilde{w}\rangle\right)$$

PER $h = \nabla f(P_0)$ ABBIAMO CHE

$$\nabla f(P_0) = \nabla_{\tau} f(P_0) + \nabla_{\nu} f(P_0)$$

DOVE $\nabla_{\tau} f(P_0) = \langle \nabla f(P_0), \tilde{\tau}\rangle \tilde{\tau} \in TG(P_0)$ <u>COMPONENTE TANGENZIALE</u> DI $\nabla f(P_0)$

E

$\nabla_{\nu} f(P_0) = \langle \nabla f(P_0), \tilde{w}\rangle \tilde{w} = \dfrac{\lambda}{\|\nabla F(P_0)\|} \nabla F(P_0)$ <u>COMPONENTE NORMALE</u> DI $\nabla f(P_0)$

P_0 PUNTO DI ESTREMO LOCALE VINCOLATO $\Longrightarrow$

$$\nabla_\tau f(P_0) = 0 \quad E \quad \nabla f(P_0) = \nabla_\nu f(P_0) = \frac{1}{\|\nabla F(P_0)\|} \nabla F(P_0) \;!$$

INFATTI SIA $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}$ TALE CHE $\forall x \in U \quad \gamma(x) = (x, \varphi(x))$

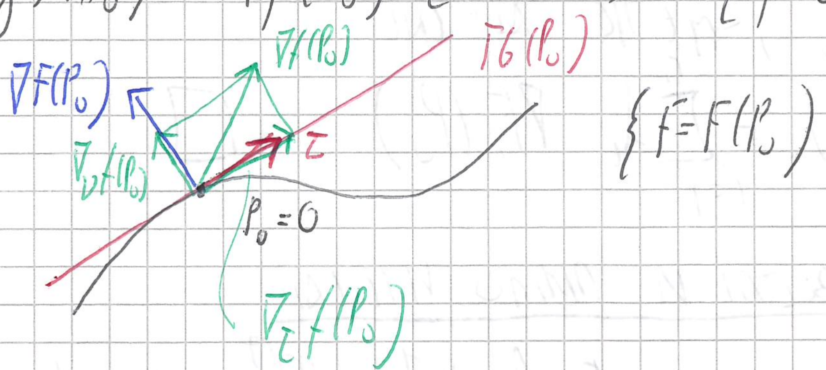
γ DEFINISCE UNA CURVA CHE DESCRIVE C IN UN INTORNO DI P_0

ABBIAMO CHE

$$\frac{d}{dx}(f \circ \gamma)(x) = \nabla f(x, \varphi(x)) \cdot \gamma'(x) = \nabla f(x, \varphi(x)) \cdot \tau(x)$$

QUINDI

$$0 = \frac{d}{dx}(f \circ \gamma)(x_0) = \nabla f(P_0) \cdot \tau \quad \Longrightarrow \quad \nabla_\tau f(P_0) = 0$$



DIMOSTRAZIONE NEL CASO GENERALE

$$(*) \quad \nabla f(P_0) \cdot \begin{bmatrix} I_{n-m} \\ J\varphi(x^0) \end{bmatrix} = 0$$

LE COLONNE DI $\begin{bmatrix} I_{n-m} \\ J\varphi(x^0) \end{bmatrix}$ SONO UNA **BASE** DI $TG(P_0)$

$$TG(P_0)^{\perp} = \{ w \in \mathbb{R}^n : \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall v \in TG(P_0) \}$$

È UN SOTTOSPAZIO DI DIMENSIONE $n - (n-m) = m$

DALL'EQUAZIONE DI $TG(P_0)$ SI RICAVA CHE

$$\nabla F_i(P_0) \in TG(P_0)^{\perp} \quad \forall i = 1, \dots, m$$

MA I VETTORI $\nabla F_1(P_0), \dots, \nabla F_m(P_0)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

VISTO CHE $JF(P_0)$ HA RANGO MASSIMO; QUINDI SONO UNA

BASE DI $TG(P_0)^{\perp}$

DALLA PROPRIETÀ $(*)$ RICAVIAMO CHE $\nabla f(P_0) \in TG(P_0)^{\perp}$ E

QUINDI ESISTONO $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ TALI CHE

$$\nabla f(P_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla F_i(P_0) \qquad \square$$

RISOLUZIONE DI PROBLEMI DI MINIMO VINCOLATO

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ APERTO}, \quad F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \ 1 \leq m < n$$

$$C = \{ x \in A : F(x) = 0 \in \mathbb{R}^m \} = \{ F = 0 \} \subseteq A$$

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

SUPPONIAMO CHE f AMMETTA MINIMO ASSOLUTO SU C

QUALI SONO I CANDIDATI A ESSERE PUNTI DI MINIMO ASSOLUTO PER f SU C?

1) PUNTI $x \in C$ IN CUI f <u>NON</u> È DIFFERENZIABILE

2) PUNTI $x \in C$ IN CUI F <u>NON</u> È C^1 IN UN INTORNO DI x

<u>OPPURE</u> IN CUI F È C^1 IN UN INTORNO DI x MA

$JF(x)$ <u>NON</u> HA RANGO MASSIMO

3) PUNTI $x \in C$ IN CUI f È DIFFERENZIABILE, IN CUI F È C^1 IN UN INTORNO DI x, $JF(x)$ HA RANGO MASSIMO E <u>ESISTONO</u> $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ TALI CHE

$$\nabla f(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla F_i(x)$$

QUINDI, <u>ESCLUDENDO</u> I PUNTI IN CUI VALE 1) o 2) CHE SONO GIÀ CANDIDATI, <u>I CANDIDATI</u> SONO LE SOLUZIONI DEL SEGUENTE SISTEMA DI $m+n$ EQUAZIONI NELLE $m+n$ INCOGNITE $(\lambda_1, \dots, \lambda_m, x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{cases} F(x_1, \dots, x_n) = 0 & m \text{ EQUAZIONI} \quad (x = (x_1, \dots, x_n) \in C) \\ \nabla f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla F_i(x_1, \dots, x_n) & n \text{ EQUAZIONI} \end{cases}$$

CIOÈ

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial F_i}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial F_i}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

ESERCIZI

1) DETERMINARE, SE ESISTE, $\min_C f$

DOVE $f(x,y) = \frac{2x^3}{3} - 2y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

E $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y + y^2 \leq 1\}$

SVOLGIMENTO

ESISTENZA DEL MINIMO

$$F(x,y) = x^2 + 2y + y^2 - 1$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) \leq 0\} = \{F \leq 0\} = F^{-1}((-\infty, 0])$$

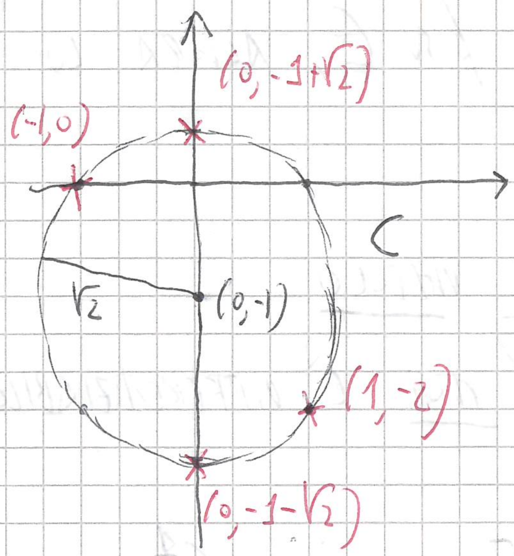
F È CONTINUA, ANZI $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, QUINDI C È CHIUSO

$C = \{x^2 + (y+1)^2 \leq 2\} = \overline{B_{\sqrt{2}}(0,-1)}$ QUINDI C È LIMITATO

C CHIUSO E LIMITATO, QUINDI COMPATTO

f CONTINUA, ANZI $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\Rightarrow \quad \exists \min_C f \quad e \quad \exists \max_C f$$



CANDIDATI

CANDIDATI INTERNI

$$\mathring{C} = \{x^2+2y+y^2<1\} = \{F<0\}$$

a) PUNTI $(x,y) \in \mathring{C}$ IN CUI f NON È DIFFERENZIABILE

NESSUNO, $f \in C^\infty$

b) PUNTI $(x,y) \in \mathring{C}$ IN CUI f È DIFFERENZIABILE E $\nabla f(x,y)=0$

$$\nabla f(x,y) = (2x^2, -2) = (0,0) \quad \text{EQUAZIONE DI EULERO}$$

$$\begin{cases} 2x^2 = 0 \\ -2 = 0 \end{cases}$$

NESSUNA SOLUZIONE

NON VI SONO CANDIDATI INTERNI

CANDIDATI AL BORDO

$$\partial C = \{ x^2 + 2y + y^2 = 1 \} = \{ F = 0 \}$$

SE $(x,y) \in \partial C$ È UN PUNTO DI MINIMO PER f SU C, ALLORA LO È ANCHE PER f SU ∂C

PROBLEMA DI MINIMO VINCOLATO CON 1 VINCOLO

1) PUNTI $(x,y) \in \partial C = \{F=0\}$ IN CUI f NON È DIFFERENZIABILE

NESSUNO, $f \in C^\infty$

2) PUNTI $(x,y) \in \partial C = \{F=0\}$ IN CUI F NON È C^1 IN UN INTORNO DI (x,y) NESSUNO, $F \in C^\infty$ OPPURE IN CUI F È C^1 IN UN INTORNO DI (x,y) MA $JF(x,y)$ NON HA RANGO MASSIMO

$$JF(x,y) = \nabla F(x,y) = (2x, 2+2y)$$

$JF(x,y)$ HA RANGO MASSIMO SE E SOLO SE $\nabla F(x,y) \neq 0$

RISOLVIAMO $\nabla F(x,y) = (0,0)$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2+2y = 0 \end{cases} \quad \text{SOLUZIONE} \quad (0,-1)$$

MA $(0,-1) \notin \partial C = \{F=0\}$ NESSUN CANDIDATO

3) ESCLUDENDO EVENTUALMENTE I PUNTI OTTENUTI DA 1) E 2),

RISOLVIAMO, NELLE INCOGNITE x, y, λ, IL SISTEMA

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ \nabla f(x,y)=\lambda \nabla F(x,y) \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+2y+y^2=1 \\ (2x^2,-2)=\lambda(2x,2+2y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+2y+y^2=1 \\ 2x^2=\lambda(2x) \\ -2=\lambda(2+2y) \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+2y+y^2=1 \\ x(x-\lambda)=0 \longleftarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\lambda \end{cases} \\ -1=\lambda(1+y) \end{cases}$$

SE $\boxed{x=0}$

$$\begin{cases} 0^2+2y+y^2=1 \\ x=0 \\ \lambda(1+y)=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-1\pm\sqrt{2} \\ x=0 \\ \lambda=\dfrac{-1}{1+(-1\pm\sqrt{2})}=\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

CANDIDATI: $A_+=(0,-1+\sqrt{2})$, $A_-=(0,-1-\sqrt{2})$

SE $\boxed{x\neq 0}$ $\qquad x=\lambda\neq 0$

$$\begin{cases} x^2+2y+y^2=1 \\ x=\lambda\neq 0 \\ y=-\dfrac{1+\lambda}{\lambda}=-\dfrac{1+x}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+2\left(-\dfrac{1+x}{x}\right)+\left(-\dfrac{1+x}{x}\right)^2=1 \\ \lambda=x \\ y=-\dfrac{1+x}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-\dfrac{2}{x}(1+x)+\dfrac{(1+x)^2}{x^2}=1 \quad /\cdot x^2 \\ \lambda=x \\ y=-\dfrac{1+x}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} x^4-\cancel{2x}-2x^2+1+\cancel{2x}+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}=0 \\ \lambda=x \\ y=-\dfrac{1+x}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2-1)^2 = 0 \\ y = x \\ \mu = -\dfrac{1+x}{x} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \\ \mu = -\dfrac{1 \pm 1}{\pm 1} = \begin{cases} -2 \\ 0 \end{cases} \end{array}$$

CANDIDATI: $B = (1, -2)$, $C = (-1, 0)$

CANDIDATI $A_+ = (0, -1+\sqrt{2})$, $A_- = (0, -1-\sqrt{2})$, $B = (1, -2)$, $C = (-1, 0)$

$f(A_+) = 2 - 2\sqrt{2}$; $f(A_-) = 2 + 2\sqrt{2}$

$f(B) = \frac{2}{3} + 4$; $f(C) = -\frac{2}{3}$

$(0, -1+\sqrt{2})$ PUNTO DI MINIMO; $2 - 2\sqrt{2}$ VALORE MINIMO

$(0, -1-\sqrt{2})$ PUNTO DI MASSIMO; $2 + 2\sqrt{2}$ VALORE MASSIMO

2) DETERMINARE, SE ESISTE, $\min\limits_{C} f$

DOVE $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 - \frac{z^3}{3} + 2z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

E $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2(z^2 - 4) \leq 0\}$

SVOLGIMENTO

ESISTENZA DEL MINIMO

$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2(z^2 - 4)$

$C = \{F \leq 0\}$

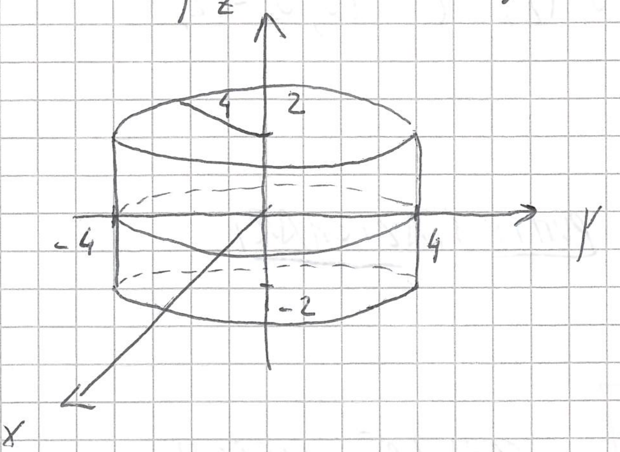
F è CONTINUA, ANZI $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, QUINDI C è CHIUSO

SE $(x,y,z) \in C$ ALLORA $z^2-4 \leq 0$ QUINDI $|z| \leq 2$

SE $|z| \leq 2$ ALLORA $z^2(4-z^2) \leq 16$

QUINDI SE $(x,y,z) \in C$ ALLORA $|z| \leq 2$ E

$$x^2+y^2 \leq z^2(4-z^2) \leq 16$$



C CONTENUTO NEL CILINDRO CHIUSO $\{x^2+y^2 \leq 16,\ |z| \leq 2\}$

QUINDI C è LIMITATO

C CHIUSO E LIMITATO, QUINDI COMPATTO

f CONTINUA, ANZI $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$\Rightarrow \quad \exists \min_C f \quad$ E $\quad \exists \max_C f$

CANDIDATI

CANDIDATI INTERNI

$$\overset{\circ}{C} = \{x^2+y^2+z^2(z^2-4) < 0\} = \{F < 0\}$$

a) PUNTI $(x,y,z) \in \overset{\circ}{C}$ IN CUI f NON È DIFFERENZIABILE (48)

NESSUNO, $f \in C^{\infty}$

b) PUNTI $(x,y,z) \in \overset{\circ}{C}$ IN CUI f È DIFFERENZIABILE E $\nabla f(x,y,z) = 0$

$$\nabla f(x,y,z) = (-2x, -2y, -z^2+2) = (0,0,0) \quad \text{EQUAZIONE DI EULERO}$$

$$\begin{cases} -2x = 0 \\ -2y = 0 \\ -z^2+2 = 0 \end{cases}$$

SOLUZIONI $(0,0,\sqrt{2})$ E $(0,0,-\sqrt{2})$

$A_+ = (0,0,\sqrt{2})$, $A_- = (0,0,-\sqrt{2})$ PUNTI STAZIONARI

$A_+, A_- \in \overset{\circ}{C} = \{F<0\}$? SI, QUINDI

$\boxed{A_+ = (0,0,\sqrt{2})}$ E $\boxed{A_- = (0,0,-\sqrt{2})}$ CANDIDATI INTERNI

OSSERVAZIONE

$$Hf(x,y,z) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2z \end{bmatrix}$$

$(0,0,\sqrt{2})$ PUNTO DI MASSIMO LOCALE STRETTO

$(0,0,-\sqrt{2})$ PUNTO DI SELLA

CANDIDATI AL BORDO

$$\partial C = \{x^2+y^2+z^2(z^2-4) = 0\} = \{F = 0\}$$

PROBLEMA DI MINIMO VINCOLATO CON 1 VINCOLO

1) PUNTI $(x,y,z) \in \partial C = \{F=0\}$ IN CUI f NON È DIFFERENZIABILE

NESSUNO, $f \in C^\infty$

2) PUNTI $(x,y,z) \in \partial C = \{F=0\}$ IN CUI F NON È C^1 IN UN INTORNO DI (x,y,z) NESSUNO, $F \in C^\infty$ OPPURE IN CUI F È C^1 IN UN INTORNO DI (x,y,z) MA $JF(x,y,z)$ NON HA RANGO MASSIMO

$$JF(x,y,z) = \nabla F(x,y,z) = (2x, 2y, 2z(z^2-1)+2z^3)$$

$JF(x,y,z)$ HA RANGO MASSIMO SE E SOLO SE $\nabla F(x,y,z) \neq 0$

RISOLVIAMO $\nabla F(x,y,z) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ 4z^3 - 8z = 0 \end{cases}$$

SOLUZIONI $(0,0,0)$, $(0,0,+\sqrt{2})$, $(0,0,-\sqrt{2})$

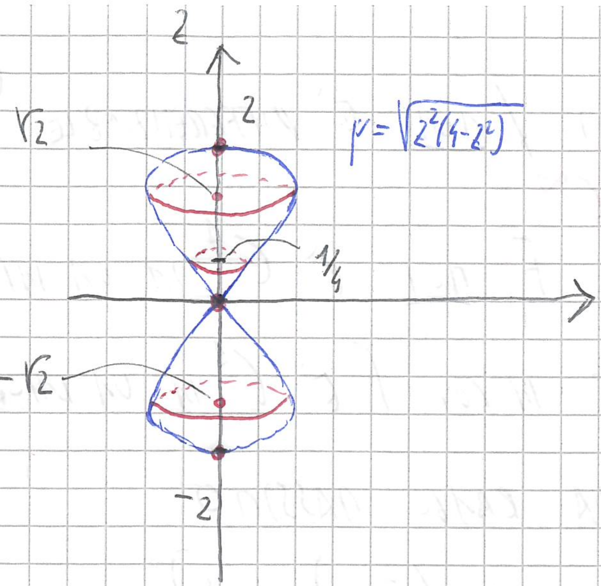
PUNTI STAZIONARI $A = (0,0,0)$, $B_+ = (0,0,+\sqrt{2})$, $B_- = (0,0,-\sqrt{2})$

$A, B_+, B_- \in \partial C = \{F=0\}$?

$A \in \{F=0\}$; $B_+, B_- \notin \{F=0\}$

$\boxed{A = (0,0,0)}$ CANDIDATO

INFATTI $\{F=0\}$ NON È IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE REGOLARE IN UN INTORNO DI $(0,0,0)$



$x=0,\ y\geq 0$

3) ESCLUDENDO EVENTUALMENTE I PUNTI OTTENUTI DA 1) E 2), QUINDI IN QUESTO CASO $A=(0,0,0)$, RISOLVIAMO, NELLE INCOGNITE x, y, z, λ, IL SISTEMA

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ \nabla f(x,y,z)=\lambda \nabla F(x,y,z) \end{cases}$$

ESCLUDENDO $A=(x,y,z)=(0,0,0)$!

CIOÈ

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2(z^2-4)=0 \\ -2x=\lambda 2x \longrightarrow x=0 \text{ o } \lambda=-1 \\ -2y=\lambda 2y \longrightarrow y=0 \text{ o } \lambda=-1 \\ -z^2+z=\lambda(4z^3-8z) \end{cases}$$

CON $(x,y,z)\neq(0,0,0)$

SE $\boxed{\lambda\neq -1}$ $x=0$ E $y=0$

$$\begin{cases} 0^2+0^2+z^2(z^2-4) \\ x=0 \\ y=0 \\ -z^2+z=\lambda(4z^3-8z) \end{cases} \qquad \begin{cases} z=0 \text{ o } z=\pm\sqrt{2} \\ x=0 \\ y=0 \\ -z^2+z=\lambda(4z^3-8z) \end{cases}$$

SE $z=0$ L'ULTIMA EQUAZIONE NON SI PUÒ RISOLVERE

(MA $(0,0,0)$ È STATO ESCLUSO PERCHÉ GIÀ CANDIDATO PER IL PUNTO 2))

SE $z=\pm 2$ L'ULTIMA EQUAZIONE SI PUÒ RISOLVERE OTTENENDO

IL CORRISPONDENTE VALORE DI λ (IL CUI VALORE PRECISO NON È RILEVANTE)

CANDIDATI $\boxed{C_+ = (0,0,+2)}$; $\boxed{C_- = (0,0,-2)}$

SE $\boxed{\lambda = -1}$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2(z^2-4)=0 \\ \lambda=-1 \\ -z^2+z = -(4z^3-8z) \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2(z^2-4)=0 \\ \lambda=-1 \\ -(z^2-z) = -4z(z^2-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2(z^2-4)=0 \\ \lambda=-1 \\ z=1/4 \quad \text{o} \quad z=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

CANDIDATI

$\boxed{(x,y,\sqrt{2})}$ con $x^2+y^2=4$

$\boxed{(x,y,-\sqrt{2})}$ con $x^2+y^2=4$

$\boxed{(x,y,1/4)}$ con $x^2+y^2=\frac{1}{16}\left(4-\frac{1}{16}\right)$

SU CIASCUNA DI QUESTE 3 CIRCONFERENZE LA FUNZIONE f È COSTANTE!

$f(A_+) = f(0,0,\sqrt{2}) = \frac{4}{3}\sqrt{2}$; $f(A_-) = f(0,0,-\sqrt{2}) = -\frac{4}{3}\sqrt{2}$

$f(B) = f(0,0,0) = 0$

$f(C_+) = f(0,0,2) = \frac{4}{3}$; $f(C_-) = f(0,0,-2) = -\frac{4}{3}$

$f(x,y,\sqrt{2}) = -4 + \frac{4}{3}\sqrt{2}$ SE $x^2+y^2=4$

$f(x,y,-\sqrt{2}) = -4 - \frac{4}{3}\sqrt{2}$ SE $x^2+y^2=4$

$f(x,y,1/4) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{16}-4\right) - \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{2}$ SE $x^2+y^2 = \frac{1}{16}\left(4-\frac{1}{16}\right)$

I PUNTI DEL TIPO $(x,y,-\sqrt{2})$ CON $x^2+y^2=4$ SONO I PUNTI DI MINIMO E $-4-\frac{4}{3}\sqrt{2}$ È IL VALORE MINIMO

OSSERVAZIONE

1) SE C COMPATTO, ALLORA ∂C COMPATTO

SIA PER L'ESERCIZIO 1) CHE 2), QUINDI,

$$\exists \min_{\partial C = \{F=0\}} f$$

E CON LO STESSO METODO USATO PER STUDIARE I CANDIDATI AL BORDO SI PUÒ RISOLVERE IL PROBLEMA VINCOLATO CON 1 VINCOLO

$$\min_{\{F=0\}} f$$

AMMESSO CHE IL MINIMO ESISTA

2) SIA $D \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO, SIA $x^0 \in \partial D$

SE ∂D, IN UN INTORNO DI x^0, È ABBASTANZA REGOLARE, ALLORA È, LOCALMENTE, UNA <u>IPERSUPERFICIE</u>

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO $\qquad \partial D$ <u>CURVA</u>

$D \subseteq \mathbb{R}^3$ APERTO $\qquad \partial D$ <u>SUPERFICIE</u>

CHE SI DESCRIVE ATTRAVERSO UN <u>UNICO</u> VINCOLO DEL TIPO $\{F=0\}$

<u>CON</u> <u>$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$</u> !

3) DETERMINARE, SE ESISTE, $\min_C f$

DOVE $f(x,y,z) = x^2+y-z$, $\quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

E $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ E } z = x^2-y\}$

<u>SVOLGIMENTO</u>

<u>ESISTENZA DEL MINIMO</u>

$$F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z)) = (x^2+y^2+z^2-1,\ z-x^2+y)$$

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\} = \{F=0\} = F^{-1}(\{(0,0)\})$$

F È <u>CONTINUA</u>, ANZI $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, QUINDI C È <u>CHIUSO</u>

$C \subseteq \{x^2+y^2+z^2=1\} \subseteq \overline{B_1(0)}$, QUINDI C È <u>LIMITATO</u>

C CHIUSO E LIMITATO, QUINDI <u>COMPATTO</u>

f continua, anzi $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ (54)

$\Rightarrow \exists \min_C f$ e $\exists \max_C f$

Candidati

$\mathring{C} = \phi$, $C = \partial C$

Problema di minimo vincolato con 2 vincoli

1) punti $(x,y,z) \in C = \{F=0\}$ in cui f non è differenziabile

nessuno, $f \in C^\infty$

2) punti $(x,y,z) \in C = \{F=0\}$ in cui F non è C^1 in un intorno di (x,y,z) nessuno, $F \in C^\infty$ oppure in cui F è C^1 in un intorno di (x,y,z) ma $JF(x,y,z)$ non ha rango massimo

$$JF(x,y,z) = \begin{bmatrix} \nabla F_1(x,y,z) \\ \nabla F_2(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ -2x & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$JF(x,y,z)$ non ha rango massimo se e solo se $\nabla F_1(x,y,z)$ e $\nabla F_2(x,y,z)$ sono linearmente dipendenti

$$\mu_1 \nabla F_1 + \mu_2 \nabla F_2 = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \mu_1 = \mu_2 = 0$$

Siccome $\nabla F_2 \neq 0$, se $\mu_1 = 0$ allora $\mu_2 = 0$. Quindi ∇F_1 e ∇F_2 sono linearmente dipendenti se e solo se

ESISTE $a \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$$\nabla F_1(x,y,z) = a \nabla F_2(x,y,z)$$

CIOÈ SE E SOLO SE ESISTE $a \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$$(2x \quad 2y \quad 2z) = a\,(-2x \quad 1 \quad 1)$$

$$\begin{cases} 2x = -2ax \\ 2y = a \\ 2z = a \end{cases}$$

SOLUZIONI $(0, a/2, a/2),\ a \in \mathbb{R}$; $(x, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}),\ x \in \mathbb{R}$

QUALI DI QUESTI PUNTI APPARTENGONO A $C = \{F = 0\}$?

$$F(0, a/2, a/2) = \left(2\left(\tfrac{a}{2}\right)^2 - 1,\ \tfrac{a}{2} + \tfrac{a}{2}\right) \neq (0,0) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

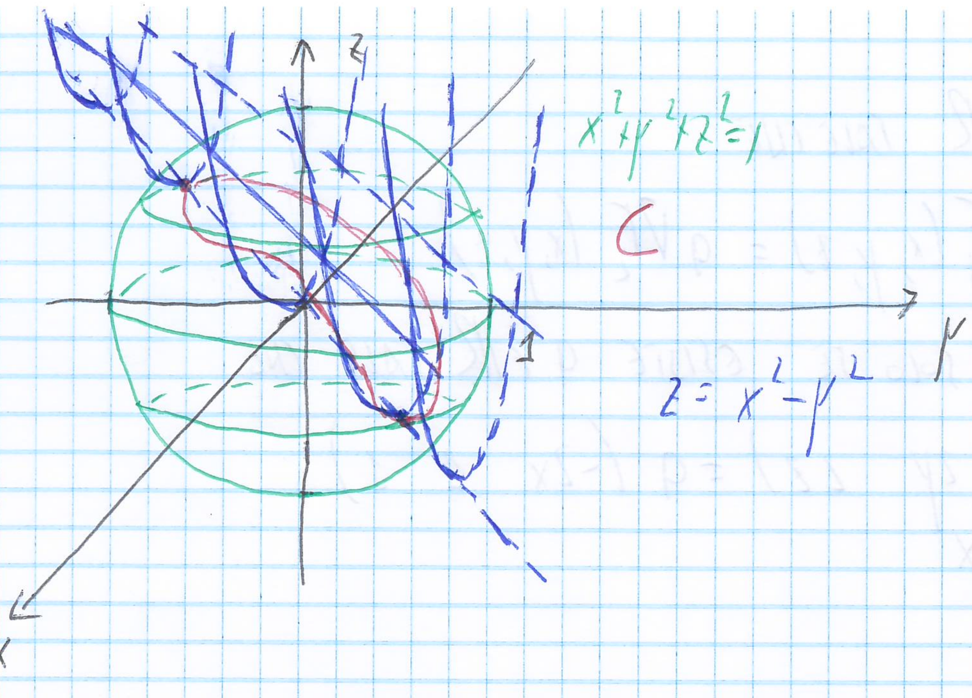
$$\Rightarrow (0, a/2, a/2) \notin C = \{F = 0\} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$F(x, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) = \left(x^2 + \tfrac{1}{2} - 1,\ -1 - x^2\right) \neq (0,0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (x, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) \notin C = \{F = 0\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

NESSUN CANDIDATO!

IN OGNI SUO PUNTO, C È, LOCALMENTE, UNA CURVA DI CLASSE C^1



3) ESCLUDENDO EVENTUALMENTE I PUNTI OTTENUTI DA 1) E 2), RISOLVIAMO NELLE INCOGNITE x, y, z, λ, μ IL SISTEMA

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ \nabla f(x,y,z)=\lambda \nabla F_1(x,y,z)+\mu \nabla F_2(x,y,z) \end{cases}$$

CIOÈ

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=x^2-y \\ (2x,\ 1,\ -1)=\lambda(2x,\ 2y,\ 2z)+\mu(-2x,\ 1,\ 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=x^2-y \\ 2x=2\lambda x-2\mu x \quad \longleftarrow \\ 1=2\lambda y+\mu \\ -1=2\lambda z+\mu \end{cases}$$

SE $\boxed{x=0}$

$$\begin{cases} 0^2+2y^2=1 \\ z=-y \\ x=0 \\ 1=2\lambda y+\mu \\ -1=-2\lambda y+\mu \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\pm 1/\sqrt{2} \\ z=\mp 1/\sqrt{2} \\ x=0 \\ \lambda=\pm\sqrt{2}/2 \\ \mu=0 \end{cases}$$

CANDIDATI $\boxed{A_+=\left(0,+\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$, $\boxed{A_-=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

SE $\boxed{x\neq 0}$ $\quad \mu=\lambda-1$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=x^2-y \\ \mu=\lambda-1 \\ 1=2\lambda y+\lambda-1 \rightsquigarrow \boxed{\lambda\neq 0} \\ \cancel{-1}=2\lambda z+\lambda\cancel{-1} \end{cases} \rightsquigarrow z=-\frac{1}{2} \quad (\lambda\neq 0!)$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+1/4=1 \\ y=x^2+1/2 \rightsquigarrow \boxed{y>0} \\ \mu=\lambda-1 \\ \lambda(1+2y)=2 \rightsquigarrow \text{SEMPRE RISOLVIBILE IN } \lambda \ (y>0!) \\ z=-1/2 \end{cases}$$

58

$$\begin{cases} x^2+x^4+x^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1 \\ y=x^2+\frac{1}{2} \\ \mu=\lambda-1 \\ \lambda=\frac{2}{1+2y} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} (x^2+1)^2=\frac{3}{2} \\ y=x^2+\frac{1}{2} \\ \mu=\lambda-1 \\ \lambda=\frac{2}{1+2y} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\pm\sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}}-1} \\ y=\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}>0 \\ z=-\frac{1}{2} \\ \lambda=\frac{2}{1+2y} \\ \mu=\lambda-1 \end{cases}$$

CANDIDATI $\boxed{B_+=\left(+\sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}}-1},\ \sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)}$, $\boxed{B_-=\left(-\sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}}-1},\ \sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)}$

$f(A_+)=\sqrt{2}$, $\quad f(A_-)=-\sqrt{2}$

$f(B_+)=f(B_-)=2\sqrt{\frac{3}{2}}-1$

$A_-=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ PUNTO DI MINIMO, $-\sqrt{2}$ VALORE MINIMO