Teoria dei Valori Estremi

- Sia $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ una successione di variabili aleatorie
- siamo interessati in valutazioni asintotiche sul massimo campionario e il minimo campionario

$$m_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}, \; M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$$

- si può estendere la considerazione alle k osservazioni più grandi

$$X_{n:n} \leq X_{n-1:n} \leq \ldots \leq X_{2:n} \leq X_{1:n},$$

dove $X_{n:n} = m_n$ è il minimo, $X_{n-1:n}$ è il secondo più piccolo, $\ldots$, $X_{2:n}$ è il secondo più grande e $X_{1:n} = M_n$ è il massimo

Teoria dei Valori Estremi

- l'ipotesi di base è che le variabili aleatorie $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ siano independenti e identicamente distribuite (iid); indichiamo con F la funzione di ripartizione comune agli X_i's
- è immediato ricavare la legge di M_n, F_{M_n}:

$$F_{M_n}(x) = F(x)^n$$

- Il comportamento asintotico di M_n quando $n \to +\infty$ è facilmente descritto: M_n converge in distribuzione alla variabile aleatoria degenere in $\bar{x} := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) = 1\}$:

$$M_n \to^{\mathrm{d}} \bar{x}$$

- risultato non utile, è necessaria una normalizzazione come nel CLT

Teoria dei Valori Estremi

▷ Teorema dei Tre Tipi (Tippet-Fisher 1928, Gnedenko 1943).
Siano $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ sono variabili aleatorie iid e $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$; se esistono $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ e una variabile aleatoria L non degenere con funzione di ripartizione H tale che

$$a_n M_n + b_n \to^{\mathrm{d}} L.$$

Allora, a meno di un cambio di locazione e scala, H deve essere una di

- ⋆ Tipo I - Gumbel
- ⋆ Tipo II - Fréchet
- ⋆ Tipo III - Weibull negativa

Note come distribuzioni dei valori estremi

Teoria dei Valori Estremi

▷ le distribuzioni dei valori estremi sono

- ⋆ Tipo I - Gumbel

$$\boxed{H^{\mathrm{I}}(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}, \; -\infty < x < \infty}$$

- ⋆ Tipo II - Fréchet

$$\boxed{H^{\mathrm{II}}_{\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \mathrm{e}^{-x^{-\alpha}} & \text{se } x > 0 \end{cases}}$$

  con $\alpha > 0$

- ⋆ Tipo III - Weibull negativa

$$\boxed{H^{\mathrm{III}}_{\alpha}(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(-x)^{\alpha}} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}}$$

  con $\alpha > 0$

Teoria dei Valori Estremi

- per ottenere il cambio di locazione e scala basta sostituire x con $\frac{x-\mu}{\sigma}$, con $\sigma > 0$ e $\mu \in \mathbb{R}$, e cambiando il supporto di conseguenza
- i tre tipi si possono riassumere con la singola espressione, nota come distribuzione generalizzata dei valori estremi (GEV)

$$G_\xi(x) = \exp\left(-\left[1+\xi x\right]^{-1/\xi}\right),\ 1+\xi x > 0$$

  - ⋆ $\xi \to 0$ si trova la Gumbel
  - ⋆ $\xi = 1/\alpha > 0$ si trova la Frèchet
  - ⋆ $\xi = 1/\alpha > 0$ si trova la Weibull negativa

- il Teorema dei Tre Tipi ci dice che, per n grande, riesce per qualche $\xi \in \mathbb{R}$,

$$P(M_n \leq x) \approx G_\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

Gestione del Rischio Finanziario

Teoria dei Valori Estremi

- la condizione $a_n M_n + b_n \to^{\mathrm{d}} L$ si può riscrivere come

$$F(c_n x + d_n)^n \to H(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

- è possibile trovare le sequenze normalizzanti c_n, d_n quando F è dotata di densità f, usando

$$d_n = F^{-1}(1-1/n),\ c_n = \frac{1}{\lambda(d_n)}$$

  dove $\lambda(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$ (hazard rate)
- non è in generale possibile trovare sequenze normalizzanti per variabili aleatorie discrete

Teoria dei Valori Estremi

▷ Il dominio di attrazione di una distribuzione di valori estremi H è

$$\mathcal{D}_H = \{F \text{ funzione di ripartizione tale che esistono}$$

$$c_n,\, d_n \text{ per cui } F(c_n x + d_n)^n \to H(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}\}$$

▷ è possibile caratterizzare/dare delle proprietà comuni alle distribuzioni nei domini di attrazione in termini della coda destra della distribuzione, cioè del comportamento di $1 - F(x)$ quando $x \to \overline{x}$

▷ dominio di attrazione della Gumbel. $\mathcal{D}_{H^I}$ contiene distribuzioni a coda "leggera" o senza coda: $1 - F(x)$ converge a 0 come un'esponenziale; tutti i momenti sono finiti;

- ⋆ normale
- ⋆ esponenziale e le sue generalizzazioni (gamma, Weibull)
- ⋆ lognormale (anche se ha coda più pesante delle precedenti)
- ⋆ ...

Teoria dei Valori Estremi

▷ dominio di attrazione della Frèchet. $\mathcal{D}_{H^{II}_\alpha}$ contiene distribuzioni a coda "pesante"; $1 - F(x)$ converge a 0 come una potenza: $F \in \mathcal{D}_{H^{II}_\alpha}$ se e solo se $\bar{x} = +\infty$ e

$$1 - F(x) = \frac{h(x)}{x^\alpha}$$

dove h è a variazione lenta, $\lim_{x\to+\infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = 1$ per ogni $t > 0$

- ⋆ Pareto
- ⋆ t di Student
- ⋆ Cauchy
- ⋆ ...

Inoltre

$$E[\max(X, 0)^\beta] < +\infty \text{ se e solo se } \beta < \alpha$$

Più piccolo è α (più grande è $\xi = 1/\alpha$), più pesante è la coda

▷ $\mathcal{D}_{H^{III}_\alpha}$ contiene distribuzioni senza coda in cui $\bar{x} < +\infty$

- ⋆ uniforme
- ⋆ beta
- ⋆ ...

Teoria dei Valori Estremi

▷ stima: si estraggono i massimi dai blocchi

$$z_1, z_2, \ldots, z_m$$

con

$$\overbrace{\underbrace{x_1, \ldots x_n}_{\max: z_1}}^{\text{blocco } 1}, \overbrace{\underbrace{x_{n+1}, \ldots x_{2n}}_{\max: z_2}}^{\text{blocco } 2}, \ldots, \overbrace{\underbrace{x_{(j-1)n+1}, \ldots x_{jn}}_{\max: z_j}}^{\text{blocco } j}, \ldots$$

▷ trade-off

n. di blocchi	n. di oss. in ogni blocco	approssimazione nel T. dei 3 Tipi	n. di oss. nel campione finale
$\uparrow$	$\downarrow$	peggiora	$\uparrow$
$\downarrow$	$\uparrow$	migliora	$\downarrow$

▷ Si modellizzano i massimi z_j con una GEV con cambio di locazione e scala, poi si stimano μ, σ, ξ

Teoria dei Valori Estremi

▷ Approccio POT

- ⋆ Siano $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ i.i.d come prima; X è una v.a. con distribuzione F come gli X_i
- ⋆ si considera, per una data soglia u, la v.a.

$$Y = (X - u | X > u)$$

- ⋆ riesce

$$F_u(y) = \frac{1 - F(u + y)}{1 - F(u)}$$

▷ Teorema (Balkema & de Haan (1974), Pickands (1975))
se esistono $a_n > 0$, b_n tali che $a_n M_n + b_n \to^{\mathrm{d}} L$ con $L \sim G_\xi((\cdot - \mu)/\sigma)$, allora

$$\text{per } u \to \overline{x},\ \ F_u(y) \to W_\xi(y/\sigma_u) \text{ per ogni } 0 \leq y \leq \overline{x} - u,$$

con W_ξ la distribuzione di Pareto Generalizzata (GPD) e $\sigma_u = \sigma + \xi(u - \mu)$

Teoria dei Valori Estremi

- ▷ la GPD è definita come:

$$W_\xi(y) = 1 - [1 + \xi y]^{-1/\xi}$$

con $y > 0$ and $1 + \xi y > 0$

- ▷ le tre distribuzioni contenute in questa espressione sono
  - ⋆ $\xi \to 0$: Esponenziale
  - ⋆ $\xi > 0$: Pareto
  - ⋆ $\xi < 0$: Beta
- ▷ quindi eccessi oltre una soglia elevata si distribuiscono come una Pareto

Teoria dei Valori Estremi

- ▷ stima: il campione iniziale è

$$x_1, \ldots, x_n$$

  - ⋆ si sceglie una soglia u
  - ⋆ si estraggono le k osservazioni oltre u

$$x_{(1)}, \ldots, x_{(k)}$$

con $x_{(j)} > u$ per $j = 1, \ldots, k$

  - ⋆ si costruiscono gli eccessi

$$y_1 = x_{(1)} - u, \ldots y_k = x_{(k)} - u$$

- ▷ dati $y_1, \ldots, y_k$, si usa il modello $y_j \sim W_\xi(\cdot/\sigma)$ e si stimano ξ, σ
- ▷ trade-off simile a quello del approccio block-maxima

Teoria dei Valori Estremi

- Proprietà della GPD: se $Y \sim W_\xi(\cdot/\sigma)$
  - $E[Y] = \frac{\sigma}{1-\xi}$ per $\xi < 1$
  - per ogni $u > 0$, $(Y - u | Y > u) \sim W_\xi(\cdot/(\sigma + \xi u))$
- Come scegliere la soglia?
  - le due proprietà precedenti implicano che se $Y \sim W_\xi(\cdot/\sigma)$ allora la mean excess function

$$e(u) = E[Y - u | Y > u] = \frac{\sigma + \xi u}{1 - \xi}, \qquad (\xi < 1)$$

    funzione lineare della soglia!
  - si stima $e(u)$ con

$$\widehat{e}(u) = \frac{1}{k_u} \sum_{j=1}^{k_u} y_j = \frac{1}{k_u} \sum_{j=1}^{k_u} (x_{(j)} - u)$$

    e si sceglie u tale che il grafico di $\widehat{e}$ diventa (approssimativamente) lineare da u in avanti

Gestione del Rischio Finanziario

Teoria dei Valori Estremi

- Calcolo di VaR e ES con l'approccio POT ($X = L$)
- VaR:
  - la distribuzione di X è approssimativamente, per $x > u$,

$$F(x) = 1 - P(X > x | X > u) P(X > u) \approx 1 - \frac{k}{n} W_\xi \left(\frac{x - u}{\sigma} \right),$$

    si calcola il VaR risolvendo $F(x) = \alpha$
- ES:
  - usando la mean excess function,

$$\begin{aligned} \mathrm{ES}_\alpha &= E[X | X > \mathrm{VaR}_\alpha] = \mathrm{VaR}_\alpha + E[X - \mathrm{VaR}_\alpha | X > \mathrm{VaR}_\alpha] \\ &= \mathrm{VaR}_\alpha + e(\mathrm{VaR}_\alpha - u) = \mathrm{VaR}_\alpha + \frac{\sigma + \xi(\mathrm{VaR}_\alpha - u)}{1 - \xi} \end{aligned}$$