Esempi

1) $f(x,y) = x\sin(y) \quad \forall (x,y) \in Q = [1,2]\times[0,1]$

Calcolare

$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy$$

$f \in C(Q) \Rightarrow$

$$\iint_Q x\sin(y)\,dx\,dy = \underbrace{\int_0^1 \left(\int_1^2 x\sin(y)\,dx\right)dy}_{(A)} = \underbrace{\int_1^2 \left(\int_0^1 x\sin(y)\,dy\right)dx}_{(B)}$$

$$(A) = \int_0^1 \left(\int_1^2 x\sin(y)\,dx\right)dy = \int_0^1 \sin(y)\left(\int_1^2 x\,dx\right)dy =$$

$$= \left(\int_1^2 x\,dx\right)\left(\int_0^1 \sin(y)\,dy\right) = \left(\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2}\right)\left(\left(-\cos(y)\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(1-\cos(1)\right)$$

2) $f(x,y) = \dfrac{y}{1+x+y} \quad \forall (x,y) \in Q = [0,1]\times[0,2]$

Calcolare

$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy$$

$f \in C(Q) \Rightarrow$

$$\iint_Q \frac{y}{1+x+y}\,dx\,dy = \int_0^2 \Bigg(\underbrace{\int_0^1 \frac{y}{1+x+y}\,dx}_{(A)} \Bigg) dy = \int_0^1 \Bigg(\underbrace{\int_0^2 \frac{y}{1+x+y}\,dy}_{(B)} \Bigg) dx$$

$$(A) = \int_0^2 y \left(\log|1+x+y| \Big|_{x=0}^{x=1} \right) dx =$$

$$= \int_0^2 y \left(\log(2+y) - \log(1+y) \right) dy \overset{\text{PER PARTI}}{=}$$

$$= \left(\frac{y^2}{2} \left(\log(2+y) - \log(1+y) \right) \right) \Bigg|_{y=0}^{y=2} - \int_0^2 \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{2+y} - \frac{1}{1+y} \right) dy$$

$$= 2 \log\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{y^2}{(1+y)(2+y)}\,dy =$$

$$= 2\log\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2} \int_0^2 \left(1 - \frac{(3y+2)}{(1+y)(2+y)} \right) dy =$$

$$\frac{a}{1+y} + \frac{b}{2+y} = \frac{(a+b)y + 2a + b}{(1+y)(2+y)} = \frac{3y+2}{(1+y)(2+y)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ 2a+b=2 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \end{cases}$$

$$= 2\log\left(\frac{4}{3}\right) + 1 - \int_0^2 \left(\frac{4}{2+y} - \frac{1}{1+y}\right) dy =$$

$$= 2\log\left(\frac{4}{3}\right) + 1 + \left(\log(|1+y|) - 4\log(|2+y|)\right)\Big|_{y=0}^{y=2} =$$

$$= 2\log\left(\frac{4}{3}\right) + 1 + \log 3 - 4\log(4) + 4\log(2) =$$

$$= 4\log 2 - 2\log 3 + 1 + \log 3 - 8\log 2 + 4\log 2 = 1 - \log 3$$

$$(B) = \int_0^1 \left(\int_0^2 \frac{y}{1+x+y}\, dy\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(1 - \frac{(1+x)}{1+x+y}\right) dy\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2 - (1+x)\left(\log|1+x+y|\right)\Big|_{y=0}^{y=2}\right) dx =$$

$$= 2 - \int_0^1 (1+x)\left(\log(3+x) - \log(1+x)\right) dx = \ldots$$

3) $f(x,y) = \dfrac{y}{4x^2+y^2} \quad \forall\, (x,y) \in Q = [1,2] \times [2,3]$

Calcolare

$$\iint_Q f(x,y)\, dx\, dy$$

$f \in C(Q) \Rightarrow$

$$\iint_Q \frac{y}{4x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_2^3 \left(\int_1^2 \frac{y}{4x^2+y^2}\,dx\right)dy = \int_1^2 \left(\int_2^3 \frac{y}{4x^2+y^2}\,dy\right)dx$$

(A) (B)

$$(B) = \int_1^2 \frac{1}{2}\left(\int_2^3 \frac{2y}{4x^2+y^2}\,dy\right)dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\log(|4x^2+y^2|)\right)\Big|_{y=2}^{y=3} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\log(4x^2+9) - \log(4x^2+4)\right)dx = \dots$$

$a, b > 0$

PER PARTI

$$\int \log(ax^2+b)\,dx = \int 1 \cdot \log(ax^2+b)\,dx = x\log(ax^2+b) - \int \frac{2ax^2}{ax^2+b}\,dx$$

$$= x\log(ax^2+b) - 2\int\left(1 - \frac{b}{ax^2+b}\right)dx = \dots$$

$$(A) = \int_2^3 \left(\int_1^2 \frac{y}{4x^2+y^2}\,dx\right)dy = \int_2^3 y\left(\int_1^2 \frac{1}{y^2\left(\left(\frac{2x}{y}\right)^2+1\right)}\,dx\right)dy =$$

$z = \frac{2x}{y}$ "$dz = \frac{2\,dx}{y}$"

$$= \frac{1}{2}\int_2^3 \left(\int_{2/y}^{4/y} \frac{1}{z^2+1}\,dz\right)dy = \frac{1}{2}\int_2^3 \left(\arctan\left(\frac{4}{y}\right) - \arctan\left(\frac{2}{y}\right)\right)dy = \dots$$

$a > 0$

$$\int \arctan\left(\frac{a}{y}\right) dy = \int 1 \cdot \arctan\left(\frac{a}{y}\right) dy \overset{\text{PER PARTI}}{=} y \arctan\left(\frac{a}{y}\right) - \int \left(-\frac{a}{y^2}\right) \frac{y}{1+\left(\frac{a}{y}\right)^2} dy =$$

$$= y \arctan\left(\frac{a}{y}\right) + a \int \frac{1}{y\left(\frac{y^2+a^2}{y^2}\right)} dy = y \arctan\left(\frac{a}{y}\right) + a \int \frac{y}{y^2+a^2} dy =$$

$$y \arctan\left(\frac{a}{y}\right) + \frac{a}{2} \log(a^2+y^2) + c$$

<u>PROPOSIZIONE</u> SIA $Q = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ UN RETTANGOLO

SIA $f: Q \to \mathbb{R}$ LIMITATA

SIA D PARTIZIONE SU Q. DEFINIAMO

$$\overset{\circ}{s}(D,f) = \sum_{k,h} \overset{\circ}{m}_{kh} \Delta x_k \Delta y_h \quad E \quad \overset{\circ}{S}(D,f) = \sum_{k,h} \overset{\circ}{M}_{kh} \Delta x_k \Delta y_h$$

DOVE

$$\overset{\circ}{m}_{kh} = \inf_{\overset{\circ}{Q}_{kh}} f \quad E \quad \overset{\circ}{M}_{kh} = \sup_{\overset{\circ}{Q}_{kh}} f$$

ALLORA $\forall \varepsilon > 0 \ \exists D^\varepsilon$ PARTIZIONE DI Q TALE CHE

$$\overset{\circ}{s}(D,f) - \varepsilon \le s(D^\varepsilon, f)$$

E

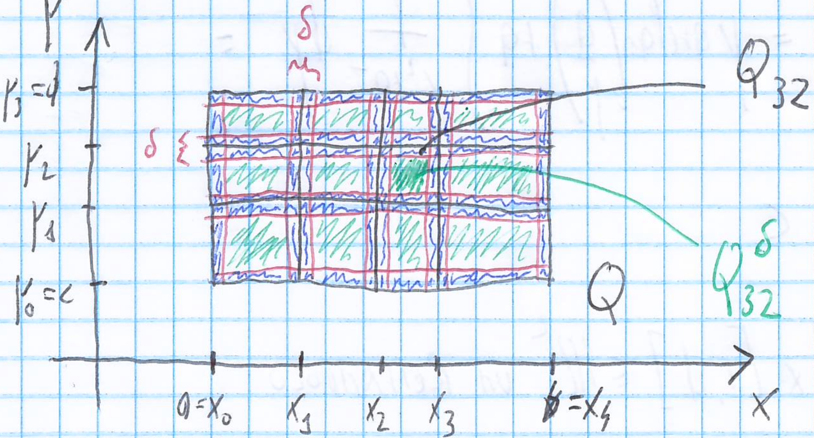
$$S(D^\varepsilon, f) \le \overset{\circ}{S}(D,f) + \varepsilon$$

<u>DIMOSTRAZIONE</u> (CENNO)

SIA D PARTIZIONE DI Q FISSATA

SIA $\varepsilon > 0$ FISSATO

PER $\delta > 0$ SUFFICIENTEMENTE PICCOLO CONSIDERIAMO LA SEGUENTE COSTRUZIONE



SIA $Q^\delta_{kh} \subseteq Q_{kh}$, $k = 1, \dots, r$, $h = 1, \dots, s$. ALLORA

$$\mathring{m}_{kh} \le \inf_{Q^\delta_{kh}} f = m^\delta_{kh} \le M^\delta_{kh} = \sup_{Q^\delta_{kh}} f \le \mathring{M}_{kh}$$

AREA $Q^\delta_{kh} \le$ AREA $Q_{kh} \le$ AREA $Q^\delta_{kh} + 2\delta(\Delta x_k + \Delta y_h) \le$ AREA $Q^\delta_{kh} + 2\delta((b-a)+(d-c))$

AREA REGIONE //// $\le (r+1)\delta(d-c) + (s+1)\delta(b-a) \le C(Q,D)\,\delta$

$\Longrightarrow$

$$s(D^\delta, f) \ge \sum_{k,h} m^\delta_{kh} \text{ AREA } Q^\delta_{kh} + m\,(\text{AREA REGIONE ////}) \ge$$

$$\sum_{k,h}\left(\mathring{m}_{kh} \text{ AREA } Q_{kh} - |m|\,(2\delta((b-a)+(d-c))\right) - |m|\, C(Q,D)\,\delta =$$

$$= \mathring{s}(D,f) - |m|\left[(r\,s)(2\delta)((b-a)+(d-c)) + C(Q,D)\,\delta\right] =$$

$$\mathring{s}(D,f) - |m|\, C_j(Q,D)\,\delta$$

E LA TESI SI OTTIENE SCEGLIENDO δ TALE CHE

$$|m|\, C_j(Q,D)\,\delta \le \varepsilon.$$

LA DIMOSTRAZIONE PER LE SOMME SUPERIORI È ANALOGA $\square$

COROLLARIO

$(*)\ \underline{I} = \underline{I}(f,Q) = \sup_D \mathring{s}(D,f)$ E $\overline{I} = \overline{I}(f,Q) = \inf_D \mathring{S}(D,f)$

E $f \in \mathcal{R}(Q)$ SE E SOLO SE $\forall \varepsilon > 0\ \exists D$ PARTIZIONE DI Q TALE CHE

$$\mathring{S}(D,f) - \mathring{s}(D,f) \le \varepsilon$$

DIMOSTRAZIONE CHIARAMENTE SI HA

$$s(D,f) \le \mathring{s}(D,f) \le \mathring{S}(D,f) \le S(D,f)$$

E QUINDI

$$\underline{I} \le \sup_D \mathring{s}(D,f) \quad \text{E} \quad \inf_D \mathring{S}(D,f) \le \overline{I}$$

E SE $f \in \mathcal{R}(Q)$ ALLORA $\forall \varepsilon > 0\ \exists D$ PARTIZIONE DI Q TALE CHE

$$\mathring{S}(D,f) - \mathring{s}(D,f) \le S(D,f) - s(D,f) \le \varepsilon$$

DIMOSTRIAMO LE DISUGUAGLIANZE OPPOSTE. FISSIAMO $\varepsilon > 0$

Sia $\tilde{D}$ partizione tale che

$$\sup_{D} \mathring{s}(D,f) - \varepsilon \leq \mathring{s}(\tilde{D},f) \leq \sup_{D} \mathring{s}(D,f)$$

Per la proposizione precedente $\exists\, \tilde{D}^{\varepsilon}$ partizione tale che

$$\underline{I} \geq s(\tilde{D}^{\varepsilon},f) \geq \mathring{s}(\tilde{D},f) - \varepsilon \geq \sup_{D} \mathring{s}(D,f) - 2\varepsilon$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, segue che

$$\underline{I} \geq \sup_{D} \mathring{s}(D,f)$$ e quindi vale l'uguaglianza.

Sia $\tilde{D}$ partizione tale che

$$\inf_{D} \mathring{S}(D,f) \leq \mathring{S}(\tilde{D},f) \leq \inf_{D} \mathring{S}(D,f) + \varepsilon$$

Per la proposizione precedente $\exists\, \tilde{D}^{\varepsilon}$ partizione tale che

$$\overline{I} \leq S(\tilde{D}^{\varepsilon},f) \leq \mathring{S}(\tilde{D},f) + \varepsilon \leq \inf_{D} \mathring{S}(D,f) + 2\varepsilon$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, segue che

$$\overline{I} \leq \inf_{D} \mathring{S}(D,f)$$ e quindi vale l'uguaglianza

Infine, supponiamo che, fissato $\varepsilon > 0$, esista D partizione di Q tale che $\mathring{S}(D,f) - \mathring{s}(D,f) \leq \varepsilon$.

Allora, per la proposizione precedente, $\exists D^{\varepsilon}$ partizione tale che

$$S(D^{\varepsilon}, f) \leq \mathring{S}(D, f) + \varepsilon \quad \text{e} \quad s(D^{\varepsilon}, f) \geq \mathring{s}(D, f) - \varepsilon$$ 35

da cui segue che

$$S(D^{\varepsilon}, f) - s(D^{\varepsilon}, f) \leq 3\varepsilon$$

da cui segue immediatamente la caratterizzazione delle funzioni integrabili $\square$

Misura di Peano-Jordan

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato; $f: \Omega \to \mathbb{R}$ limitata

Sia Q rettangolo tale che $\Omega \subseteq Q$

Sia $\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin \Omega \end{cases}$$

Estensione di f a 0 fuori da Ω

Definizione Diremo che f è integrabile su Ω secondo Riemann se $\tilde{f} \in \mathcal{R}(Q)$. In tal caso l'integrale (di Riemann) di f su Ω è

$$I(f, \Omega) = \iint_{\Omega} f = \iint_{Q} \tilde{f}$$

Infine definiamo

$\mathcal{R}(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f$ È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN SU $\Omega \}$

OSSERVAZIONE $f \in \mathcal{R}(\Omega) \Rightarrow f$ LIMITATA

(E ANCHE Ω SI SUPPONE LIMITATO!)

OSSERVAZIONE SIANO Q_1, Q_2 RETTANGOLI TALI CHE $\Omega \subseteq Q_1$ E $\Omega \subseteq Q_2$

ALLORA

$$\tilde{f} \in \mathcal{R}(Q_1) \iff \tilde{f} \in \mathcal{R}(Q_2)$$

E IN TAL CASO

$$\iint_{Q_1} \tilde{f} = \iint_{Q_2} \tilde{f}$$

OBIETTIVO : STUDIARE $\mathcal{R}(\Omega)$

INIZIAMO CON IL CONSIDERARE LO STUDIO DEL DOMINIO D'INTEGRAZIONE Ω

DEFINIZIONE SIA $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ LIMITATO

DICEMO CHE Ω È MISURABILE SECONDO PEANO - JORDAN SE LA FUNZIONE $\chi_\Omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ TALE CHE

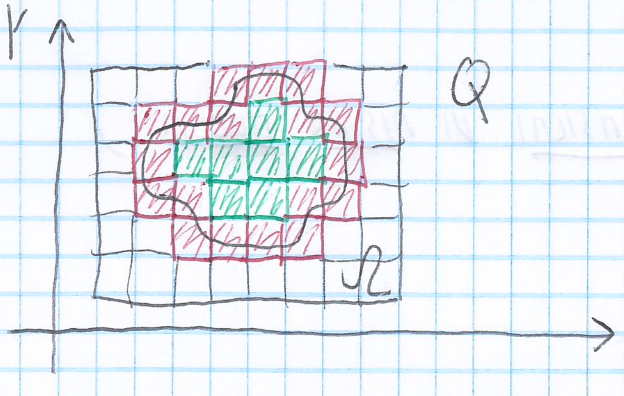
$$\chi_\Omega(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{SE } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{SE } (x,y) \notin \Omega \end{cases}$$

FUNZIONE CARATTERISTICA DI Ω

È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN (SU Ω). IN TAL CASO

DEFINIAMO MISURA o AREA DI Ω

$$|\Omega| = m(\Omega) = m_2(\Omega) = \text{AREA } \Omega = \iint_{\Omega} 1 \, dx\,dy = \iint_{Q \supseteq \Omega} \chi_{\Omega}(x,y)\,dx\,dy$$



$S(D, \chi_{\Omega})$ = AREA UNIONE DI RETTANGOLI $\supseteq \Omega$

$s(D, \chi_{\Omega})$ = AREA UNIONE DI RETTANGOLI $\subseteq \Omega$

ESEMPIO

1) $\Omega = Q = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ RETTANGOLO

ALLORA Ω È MISURABILE E VALE

$$|\Omega| = |Q| = \text{AREA } Q = (b-a)(d-c)$$

2) $\Omega = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap ([0,1] \times [0,1])$

NON È MISURABILE

DEFINIZIONE (INSIEMI DI MISURA NULLA)

SIA $E \subseteq \mathbb{R}^2$ LIMITATO

DIREMO CHE E HA MISURA NULLA SE E È MISURABILE (SECONDO PEANO-JORDAN) E

$$|E| = 0.$$

TEOREMA (CARATTERIZZAZIONE DEGLI INSIEMI DI MISURA NULLA)

SIA $E \subseteq \mathbb{R}^2$ LIMITATO

E HA MISURA NULLA SE E SOLO SE

$\forall \varepsilon > 0$ ESISTONO UN NUMERO FINITO DI RETTANGOLI $Q_1, \ldots, Q_n$ (n DIPENDENTE DA ε!) TALI CHE

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} Q_j \quad E \quad \sum_{j=1}^{n} |Q_j| \leq \varepsilon$$

DIMOSTRAZIONE

"$\Rightarrow$"

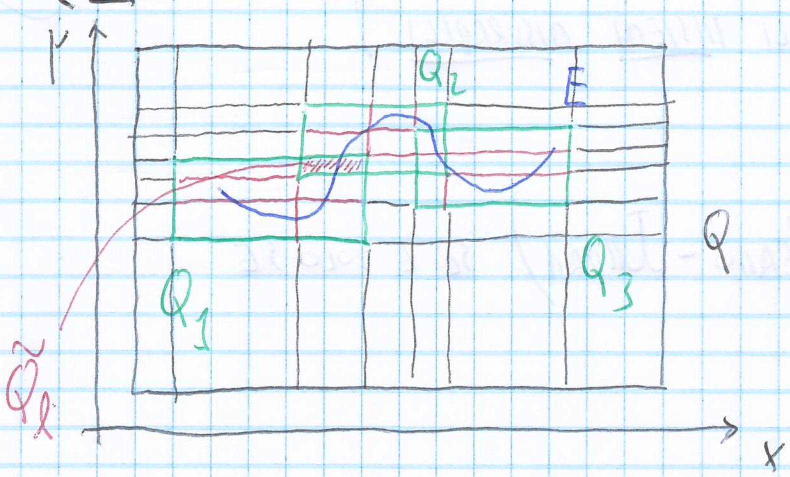
SIA E DI MISURA NULLA. SIA $Q \supseteq E$, Q RETTANGOLO.

FISSATO $\varepsilon > 0$ ESISTE D PARTIZIONE DI Q TALE CHE

$$S(D, \chi_E) \leq \varepsilon \qquad (I(\chi_E, Q) = 0!)$$

MA $S(D, \chi_E) = \sum_{\substack{k,h: \\ Q_{kh} \cap E \neq \emptyset}} \text{AREA } Q_{kh}$

" $\le$ = "



FISSATO $\varepsilon > 0$ SIANO $Q_1, \dots, Q_n$ TALI CHE

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} Q_j \quad \text{E} \quad \sum_{j=1}^{n} |Q_j| \le \varepsilon$$

SIA $Q \supseteq \bigcup_{j=1}^{n} Q_j \supseteq E$

POSSIAMO SUPPORRE CHE $\bigcup_{j=1}^{n} Q_j = \bigcup_{l=1}^{m} \tilde{Q}_l$ DOVE

I RETTANGOLI $\tilde{Q}_l$ SONO A DUE A DUE INTERNAMENTE DISGIUNTI, E QUINDI

$$\sum_{l=1}^{m} |\tilde{Q}_l| \le \sum_{j=1}^{n} |Q_j| \le \varepsilon,$$

E TALI CHE ESISTA UNA PARTIZIONE D DI Q PER CUI

$\forall l = 1, \dots, m \quad \tilde{Q}_l = Q_{kh}$ PER QUALCHE k, h.

ALLORA $0 \le \mathring{S}(D, \chi_E) \le \sum_{l=1}^{m} |\tilde{Q}_l| \le \varepsilon$ $\square$

$\Rightarrow \chi_E$ È INTEGRABILE SU Q E $\iint_Q \chi_E = 0$!

Teorema (caratterizzazione degli insiemi misurabili)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato

Ω è misurabile (secondo Peano-Jordan) se e solo se

$\partial\Omega$ ha misura nulla

Dimostrazione

"$\Rightarrow$"

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ misurabile e sia $Q \supseteq \Omega$, Q rettangolo.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists D$ partizione di Q tale che

$$S(D, \chi_\Omega) - s(D, \chi_\Omega) \leq \varepsilon$$

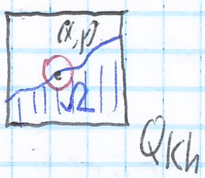
Ma

$$S(D, \chi_\Omega) - s(D, \chi_\Omega) = \sum_{\substack{k,h: \\ Q_{kh} \cap \Omega \neq \emptyset \\ \text{e } Q_{kh} \cap \Omega^c \neq \emptyset}} |Q_{kh}| \leq \varepsilon$$

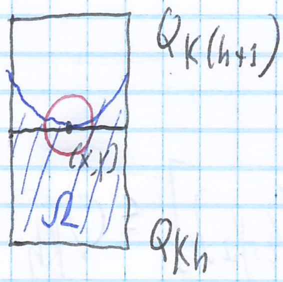
Ma $\partial\Omega \subseteq \bigcup \{ Q_{kh} : Q_{kh} \cap \Omega \neq \emptyset \text{ e } Q_{kh} \cap \Omega^c \neq \emptyset \}$

da cui segue che $\partial\Omega$ ha misura nulla per la caratterizzazione precedente.

Infatti, supponiamo per assurdo che $(x,y) \in \partial\Omega$ e $\forall Q_{kh}$ tale che $(x,y) \in Q_{kh}$ sia $Q_{kh} \subseteq \Omega$ oppure $Q_{kh} \subseteq \Omega^c$

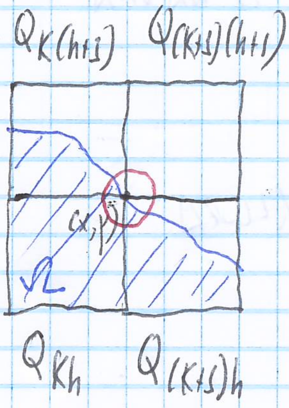


se $(x,y) \in \mathring{Q}_{kh}$ <u>contraddizione</u>



- se $(x,y) \in \Omega$, almeno 1 fra Q_{kh} e $Q_{k(h+1)}$ deve contenere (x,y) e un punto di Ω^c
- se $(x,y) \notin \Omega$, almeno 1 fra Q_{kh} e $Q_{k(h+1)}$ deve contenere (x,y) e un punto di Ω

<u>contraddizione</u>



Analogamente, si ottiene una <u>contraddizione</u>

"$\Leftarrow$"

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ misurabile e sia $Q \supseteq \Omega, \partial\Omega$, Q rettangolo

Se $|\partial\Omega| = 0$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists D$ partizione di Q tale che

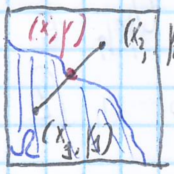
$$S(D, \chi_{\partial\Omega}) = \sum_{\substack{k,h: \\ Q_{kh} \cap \partial\Omega \neq \emptyset}} |Q_{kh}| \le \varepsilon$$

Sia Q_{kh} tale che $Q_{kh} \cap \partial\Omega = \emptyset$. Allora

o $Q_{kh} \subseteq \mathring{\Omega} \Rightarrow \inf_{Q_{kh}} \chi_\Omega = \sup_{Q_{kh}} \chi_\Omega = 1$

OPPURE $Q_{kh} \subseteq \bar{\Omega}^c \Rightarrow \inf_{Q_{kh}} \chi_\Omega = \sup_{Q_{kh}} \chi_\Omega = 0$

INFATTI, PER ASSURDO, SIA $Q_{kh} \cap \partial\Omega = \phi$ E TALE CHE ESISTONO $(x_1, y_1) \in \mathring{\Omega} \cap Q_{kh}$ E $(x_2, y_2) \in \bar{\Omega}^c \cap Q_{kh}$



Q_{kh}

ALLORA $\exists (x,y) \in [(x_1, y_1); (x_2, y_2)] \subseteq Q_{kh}$ TALE CHE $(x,y) \in \partial\Omega$ E SI HA UNA

CONTRADDIZIONE

IN ENTRAMBI I CASI SI HA CHE SE $Q_{kh} \cap \partial\Omega = \phi$ ALLORA

$$\sup_{Q_{kh}} \chi_\Omega - \inf_{Q_{kh}} \chi_\Omega = 0$$

E QUINDI

$$S(D, \chi_\Omega) - s(D, \chi_\Omega) \leq \sum_{\substack{k,h: \\ Q_{kh} \cap \partial\Omega \neq \phi}} |Q_{kh}| \leq \varepsilon$$

DA CUI SEGUE IMMEDIATAMENTE LA MISURABILITÀ DI Ω $\square$

<u>ESEMPI</u>

1) $E = \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ HA MISURA NULLA

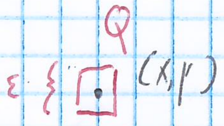
2) SE E HA MISURA NULLA, ALLORA OGNI E_1 TALE CHE $E_1 \subseteq E$ HA <u>MISURA NULLA</u> (E IN PARTICOLARE È MISURABILE!)

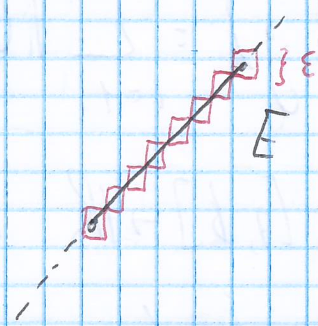
3) E sottoinsieme limitato di una retta, allora E ha misura nulla

4) $E = E_1 \cup \dots \cup E_n$ con E_i di misura nulla $\forall i = 1, \dots, n$

Allora E ha misura nulla

Dimostrazione: seguono dalla caratterizzazione

1) 

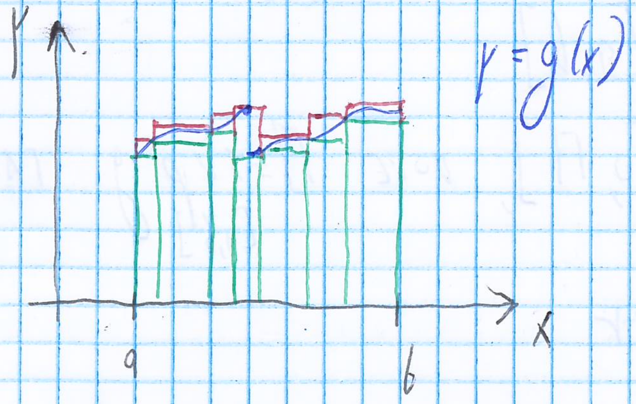
3) 

$\square$

Proposizione: Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che $g \in \mathcal{R}([a,b])$

Allora il grafico di g, $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ y = g(x)\}$ ha misura nulla

Dimostrazione



$\forall \varepsilon > 0$ $\exists D_1$ partizione di $[a,b]$ tale che $S(D_1, g) - s(D_1, g) < \varepsilon$

$\forall i=1,\dots,r$ SIA $Q_i = [x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i]$

DOVE $m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} g$ E $M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} g$

ALLORA $G \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} Q_i$ E

$$S(D_1, g) - s(D_1, g) = \sum_{i=1}^{r} |Q_i| \leq \varepsilon \qquad \square$$

COROLLARIO SIA $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ TALE CHE $g \in \mathcal{R}([a,b])$

SIA $g \geq 0$ E SIA $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ 0 \leq y \leq g(x)\}$

ALLORA A È MISURABILE SECONDO PEANO-JORDAN E VALE

$$|A| = \int_a^b g(x)\,dx$$

DIMOSTRAZIONE

SIA D_1 UNA PARTIZIONE DI $[a,b]$

SIA D_2 UNA PARTIZIONE DI $[0,M]$, DOVE $M = \sup_{[a,b]} g$ TALE

CHE $m_i, M_i \in D_2$ $\forall i=1,\dots,r$

SIA $D = D_1 \times D_2$ PARTIZIONE DI $Q = [a,b] \times [0,M] \supseteq A$

ALLORA

$$s(D_1, g) \leq \mathring{s}(D, \chi_A) \leq \mathring{S}(D, \chi_A) \leq S(D_2, g)$$

DA CUI SEGUE IMMEDIATAMENTE LA MISURABILITÀ DI A E IL FATTO CHE

$$|A| = \int_a^b g(x)\,dx \qquad \square$$

DEFINIZIONE

Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a<b$ e $c<d$

Siano $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ tali che

$g_1, g_2 \in \mathcal{R}([a,b])$ e $g_1 \leq g_2$ su $[a,b]$

L'insieme

$$E_y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

SI DICE REGIONE SEMPLICE O NORMALE RISPETTO ALL'ASSE y

Siano $h_1, h_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ tali che

$h_1, h_2 \in \mathcal{R}([c,d])$ e $h_1 \leq h_2$ su $[c,d]$

L'insieme

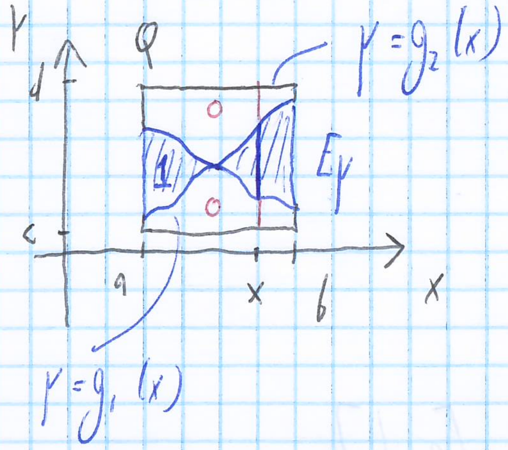
$$E_x = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d],\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

SI DICE REGIONE SEMPLICE O NORMALE RISPETTO ALL'ASSE X

Osservazione

- E_y è <u>misurabile</u> e vale

$$|E_y| = \iint_{Q \supseteq E_y} \chi_{E_y} = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x))\,dx$$



$$E_y \subseteq Q = [a,b] \times [c,d]$$

La misurabilità si ottiene in maniera analoga alla dimostrazione del corollario precedente. La formula segue dal Teorema di riduzione. Si ha $\chi_{E_y} \in \mathcal{R}(Q)$, con $Q \supseteq E_y$ e

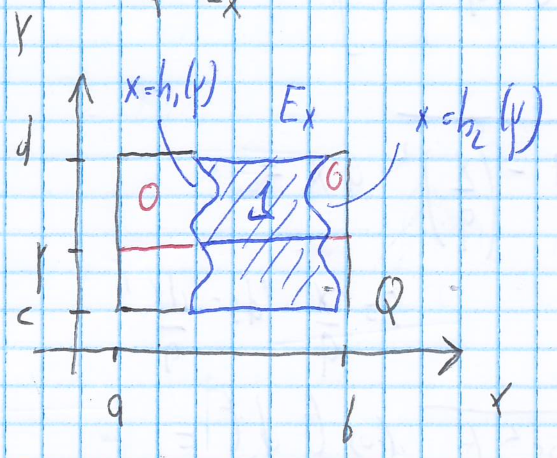
$$\forall x \in [a,b] \quad \exists\, H(x) = \int_c^d \chi_{E_y}(x,y)\,dy = g_2(x) - g_1(x)$$

da cui

$$|E_y| = \iint_Q \chi_{E_y} = \int_a^b H(x)\,dx = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x))\,dx$$

- E_x è <u>misurabile</u> e vale

$$|E_x| = \int\limits_{Q \supseteq E_x} \chi_{E_x} = \int_c^d (h_2(y) - h_1(y))\, dy$$



$$E_x \subseteq Q = [a,b] \times [c,d]$$

LA MISURABILITÀ SI OTTIENE IN MANIERA ANALOGA ALLA DIMOSTRAZIONE DEL COROLLARIO PRECEDENTE. LA FORMULA SEGUE DAL TEOREMA DI RIDUZIONE. SI HA $\chi_{E_x} \in \mathcal{R}(Q)$, CON $Q \supseteq E_x$ E

$$\forall y \in [c,d] \quad \exists\, G(y) = \int_a^b \chi_{E_x}(x,y)\, dx = h_2(y) - h_1(y)$$

DA CUI

$$|E_x| = \iint\limits_Q \chi_{E_x} = \int_c^d G(y)\, dy = \int_c^d (h_2(y) - h_1(y))\, dy$$

<u>ESEMPI</u>

1) SIA $a > 0$. CALCOLARE L'AREA DELLA ~~[illegible]~~ <u>PALLA</u> <u>CHIUSA</u> DI CENTRO O E RAGGIO a

$$E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le a^2 \}$$

È UN DOMINIO <u>NORMALE</u> SIA RISPETTO ALL'ASSE Y CHE RISPETTO ALL'ASSE X!

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -a\le x\le a,\ -\sqrt{a^2-x^2}\le y\le\sqrt{a^2-x^2}\}=$$

$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -a\le y\le a,\ -\sqrt{a^2-y^2}\le x\le\sqrt{a^2-y^2}\}$$

$$|E|=\int_{-a}^{a}dx\left(2\sqrt{a^2-x^2}\right)=2\int_{-a}^{a}|a|\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx=$$

$s=\frac{x}{a}$ "$ds=\frac{dx}{a}$"

$$=2a^2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-s^2}\,ds=2a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt=$$

$s=\operatorname{sen} t$

$(t=\operatorname{arcsen}(s))$

$$=2a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=2a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\operatorname{sen}^2 t\,dt=\pi a^2$$

2) SIANO $a,b>0$. CALCOLARE L'AREA DELL'ELLISSE

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$$

È UN DOMINIO NORMALE SIA RISPETTO ALL'ASSE Y CHE RISPETTO ALL'ASSE X!

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -a\le x\le a,\ -\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}\le y\le\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}\}$$

$$|E|=\int_{-a}^{a}dx\left(2\frac{|b|}{|a|}\sqrt{a^2-x^2}\right)=\frac{b}{a}(\pi a^2)=\pi ab$$

Definizione Sia $Q = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ un rettangolo.
Sia $f : Q \to \mathbb{R}$ limitata.
Diremo che f è **generalmente continua** se l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha **misura nulla**.

Osservazione

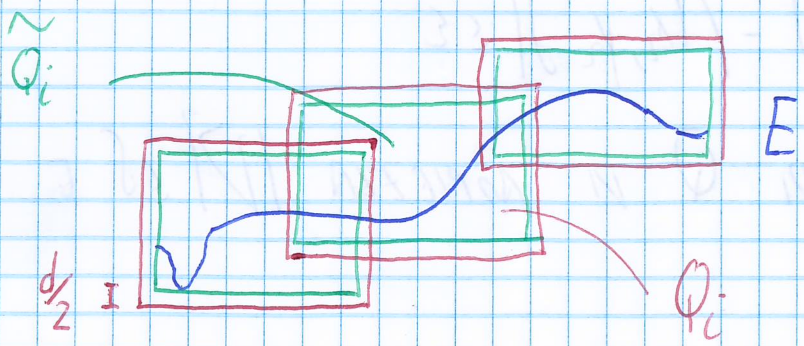
Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che E ha misura nulla. Allora $\forall \varepsilon > 0 \ \exists Q_1, \dots, Q_n$ rettangoli tali che

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathring{Q}_i \quad e \quad \sum_{i=1}^{n} |Q_i| < \varepsilon$$

Infatti esistono $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_n$ rettangoli tali che

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \quad e \quad \sum_{i=1}^{n} |\tilde{Q}_i| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\forall i = 1, \dots, n$ sia Q_i il rettangolo con lo stesso centro di $\tilde{Q}_i$ e ciascun lato aumentato di $d > 0$. Se d è sufficientemente piccolo si ha la proprietà voluta.



TEOREMA Sia $Q = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ un rettangolo

Sia $f: Q \to \mathbb{R}$ limitata

Se f è generalmente continua, allora $f \in \mathcal{R}(Q)$

DIMOSTRAZIONE

Sia E l'insieme dei punti di discontinuità di f.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Visto che E ha misura nulla,

$\exists\, Q_1, \dots, Q_n$ rettangoli tali che

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathring{Q}_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} |Q_i| \leq \varepsilon$$

Sia $C = Q \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathring{Q}_i \right)$

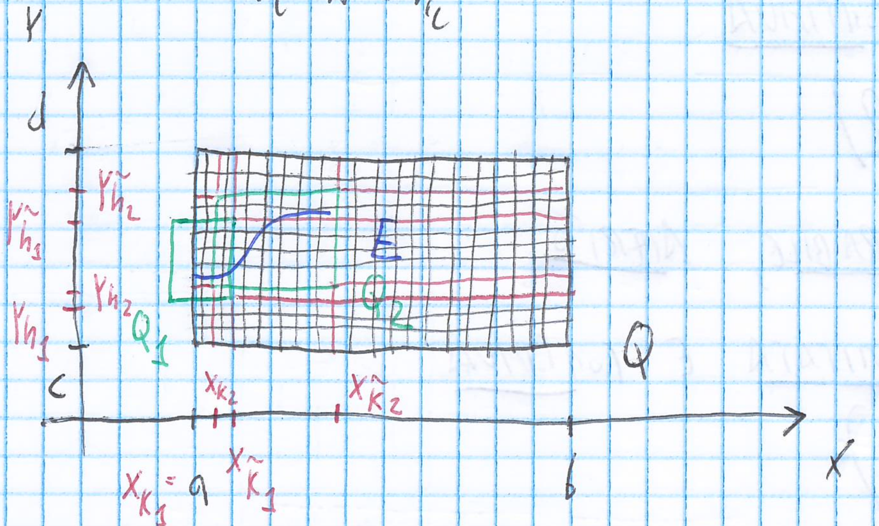
C è compatto, f è continua in ogni punto di C quindi è continua su C. Per Heine-Cantor, f è uniformemente continua su C e quindi $\exists\, \delta > 0$ tale che

$\forall\, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \boxed{\in C}$ per cui $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta$ si ha

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \varepsilon$$

Sia D una partizione di Q di ampiezza $|D| \leq \delta$ e tale che $\forall i = 1, \dots, n$

$$Q_i \cap Q = \bigcup_{\substack{k_i \le k \le \tilde{k}_i \\ h_i \le h \le \tilde{h}_i}} Q_{kh}$$



$\forall k, h$ ABBIAMO CHE:

O $Q_{kh} \subseteq Q_i \cap Q$ PER QUALCHE $i = 1, \dots, n$, E ALLORA $M_{kh} - m_{kh} \le M - m$,

ALTRIMENTI $Q_{kh} \subseteq C$, E ALLORA $M_{kh} - m_{kh} \le \varepsilon$

QUINDI

$$S(D, f) - s(D, f) = \sum_{k,h} (M_{kh} - m_{kh}) |Q_{kh}| \le$$

$$\sum_{\substack{k,h: \\ Q_{kh} \subseteq Q_i \cap Q \\ \text{PER QUALCHE } i}} (M - m) |Q_{kh}| + \sum_{\substack{k,h: \\ Q_{kh} \subseteq C}} \varepsilon |Q_{kh}| \le$$

$$\le (M - m) \sum_{i=1}^{n} |Q_i| + \varepsilon |Q| \le (M - m + |Q|) \varepsilon \qquad \square$$

Corollario

a) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ misurabile, compatto

Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua

Allora $f \in \mathcal{R}(\Omega)$

b) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ misurabile, aperto

Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ limitata e continua

Allora $f \in \mathcal{R}(\Omega)$

Dimostrazione

Sia Q rettangolo tale che $\bar{\Omega} \subseteq \mathring{Q} \subseteq Q$

Sia $\tilde{f}$ l'estensione a zero della f fuori da Ω.

$\tilde{f}$ è limitata ed è discontinua al più nei punti del $\partial\Omega$. Ma Ω misurabile implica che $\partial\Omega$ ha misura nulla, quindi $\tilde{f}$ è integrabile su Q essendo generalmente continua. $\square$

Applicazione: integrazione sui domini normali

Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$ e $c < d$

Siano $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ tali che

$g_1, g_2 \in \boxed{C([a,b])}$ E $g_1 \leq g_2$ SU $[a,b]$

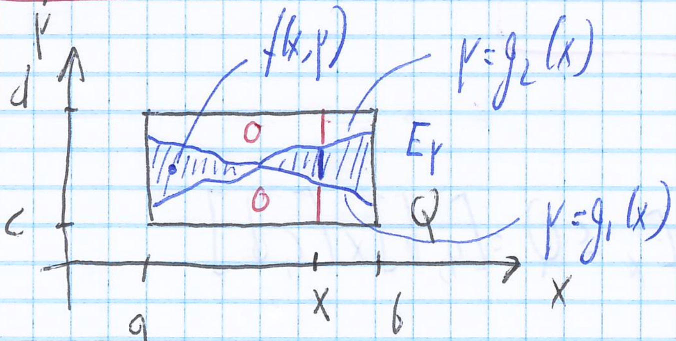
SIA $E_y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$

E NOTIAMO CHE $\mathring{E}_y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a,b),\ g_1(x) < y < g_2(x)\}$

SIA $f : E_y \to \mathbb{R}$ <u>LIMITATA</u> E CON<u>TINUA</u> SU $\mathring{E}_y$

ALLORA $f \in \mathcal{R}(E_y)$ E VALE

$$\boxed{\iint_{E_y} f = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx}$$



$E_y \subseteq Q = [a,b] \times [c,d]$

PER IL TEOREMA DI RIDUZIONE, <u>SE</u> VALE b),

$$\iint_{E_y} f = \iint_{Q \supseteq E_y} \tilde{f}(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d \tilde{f}(x,y)\, dy \right) dx$$

<u>MA</u> $\exists \int_c^d \tilde{f}(x,y)\, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy \quad \forall x \in [a,b]$

- SIANO $h_1, h_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ TALI CHE

$h_1, h_2 \in \boxed{C([c,d])}$ e $h_1 \le h_2$ in $[c,d]$

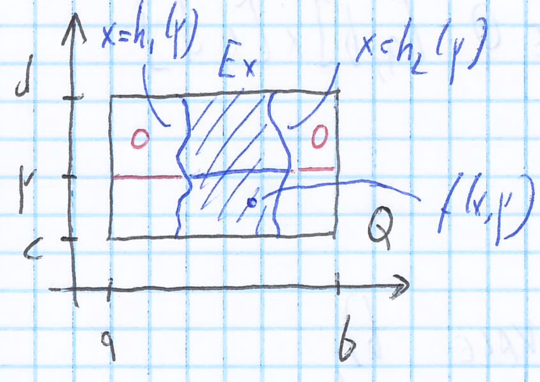
Sia $E_x = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d],\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$

e notiamo che $\mathring{E}_x = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in (c,d),\ h_1(y) < x < h_2(y)\}$

Sia $f : E_x \to \mathbb{R}$ <u>limitata</u> e <u>continua</u> in $\mathring{E}_x$

Allora $f \in \mathcal{R}(E_x)$ e vale

$$\boxed{\iint_{E_x} f = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\, dx \right) dy}$$



$E_x \subseteq Q = [a,b] \times [c,d]$

Per il Teorema di riduzione, <u>se</u> vale a)

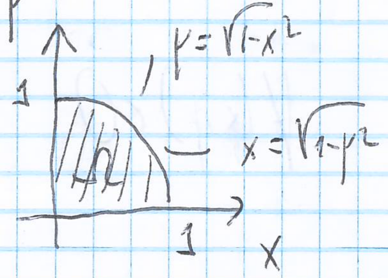
$$\iint_{E_x} f = \iint_Q \tilde{f}(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b \tilde{f}(x,y)\, dx \right) dy$$

<u>Ma</u> $\exists \int_a^b \tilde{f}(x,y)\, dx = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\, dx \quad \forall y \in [c,d]$

Esempi

1) Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ \underset{g_1(x)}{0} \le y \le \underset{g_2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\}$

Calcolare $\iint_\Omega x\sqrt{y}\,dx\,dy$



$\left.\begin{array}{l}\Omega \text{ misurabile compatto} \\ f(x,y) = x\sqrt{y} \text{ continua in } \Omega\end{array}\right\} \Rightarrow f \in \mathcal{R}(\Omega)$

$$\iint_\Omega x\sqrt{y}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\sqrt{y}\,dy \right) dx = (1)$$

ma $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ \underset{h_1(x)}{0} \le x \le \underset{h_2(x)}{\sqrt{1-y^2}}\}$, quindi

$$\iint_\Omega x\sqrt{y}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\sqrt{y}\,dx \right) dx = (2)$$

$$(2) = \int_0^1 \sqrt{y} \left(\left(\frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{y}\,(1-y^2)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(y^{1/2} - y^{5/2} \right) dy = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{7} \right) = \frac{4}{21}$$

$$(1) = \int_0^1 x \left(\left(\frac{2}{3} y^{3/2} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} \right) dx =$$

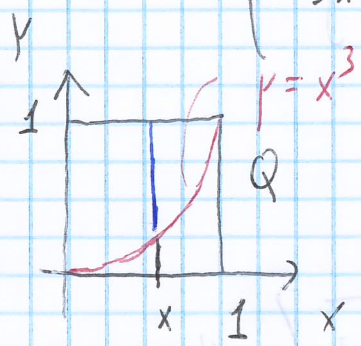
$$= \frac{2}{3}\int_0^1 x(1-x^2)^{3/4}\,dx = -\frac{1}{3}\int_0^1 (-2x)(1-x^2)^{3/4}\,dx =$$

$s = 1-x^2$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 s^{3/4}\,ds = \frac{4}{21}$$

2) SIA $Q=[0,1]\times[0,1]$. SIA $f: Q \to \mathbb{R}$ TALE CHE

$$f(x,y) = \begin{cases} 2+y & \text{SE } y \geq x^3 \\ 3x+1 & \text{SE } y < x^3 \end{cases} \quad \forall (x,y) \in Q$$



DETERMINARE SE $f \in \mathcal{R}(Q)$ E IN TAL CASO CALCOLARE $\iint_Q f$.

f È <u>DISCONTINUA</u> AL PIÙ SU $\{(x,y): 0 \leq x \leq 1,\ y = x^3\}$ CHE HA MISURA NULLA, QUINDI $f \in \mathcal{R}(Q)$.

$\forall x \in [0,1]$, $y \to f(x,y)$ HA AL PIÙ 1 PUNTO DI DISCONTINUITÀ QUINDI È INTEGRABILE SU $[0,1]$. PER IL TEOREMA DI RIDUZIONE

$$\iint_Q f = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx =$$

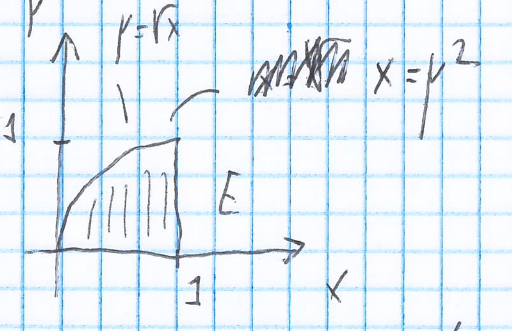
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{x^3} (3x+1)\,dy + \int_{x^3}^1 (2+y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left((3x+1)x^3 + \left(2y + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x^3}^{y=1} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left((3x+1)x^3 + \frac{5}{2} - 2x^3 - \frac{1}{2}x^6 \right) dx = \dots$$

3) Sia $E = \{ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{x} \}$

Calcolare $\displaystyle\iint_E x y e^y \, dx\, dy$



$$\iint_E x y e^y \, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} x y e^y \, dy \right) dx = 1$$

Ma $E = \{ 0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le 1 \}$, quindi

$$\iint_E x y e^y \, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^1 x y e^y \, dx \right) dy = 2$$

$$(2) = \int_0^1 \left(y\, e^y \left(\frac{x^2}{2} \right)\Big|_{x=y^2}^{x=1} \right) dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y\,(1-y^4)\, e^y\, dy = \dots$$

$$(1) = \int_0^1 x \left(\left((y-1)e^y\right)\Big|_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \right) dx =$$

$$\int y\, e^y\, dy = y\, e^y - \int e^y = (y-1)e^y + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

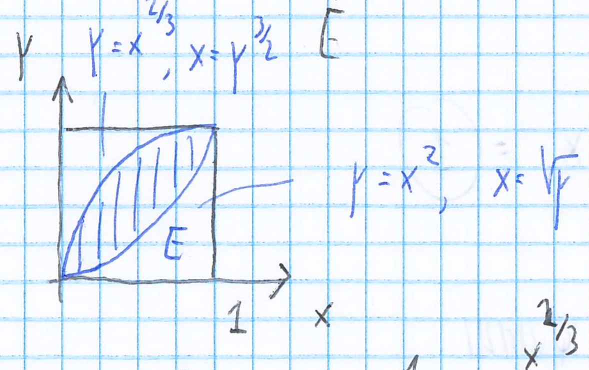
$$= \int_0^1 x \left[(\sqrt{x}-1)\, e^{\sqrt{x}} + 1 \right] dx = 2\int_0^1 \frac{x^{3/2}}{2\sqrt{x}} \left[(\sqrt{x}-1)\, e^{\sqrt{x}} + 1 \right] dx \underset{s=\sqrt{x}}{=}$$

$$= 2\int_0^1 s^3 \left[(s-1)\, e^s + 1 \right] ds = \dots$$

4) Sia $E = \{ 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x^{2/3} \}$

Calcolare

$$\iint_E x\, e^{y^2}\, dx\, dy$$



$$\iint_E x\, e^{y^2}\, dx\, dy = \int_0^1 x \left(\int_{x^2}^{x^{2/3}} e^{y^2}\, dy \right) dx$$

<u>non calcolabile analiticamente</u>! (almeno in termini di funzioni elementari)

ma $E = \{ 0 \le y \le 1,\ y^{3/2} \le x \le \sqrt{y} \}$ quindi

$$\iint_E x e^{y^2} dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{y^{3/2}}^{\sqrt{y}} x e^{y^2} dx \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{y^2} (y - y^3)\, dy = \frac{1}{4} \int_0^1 e^{y^2} (1-y^2)(2y)\, dy \underset{s=y^2}{=}$$

$$= \int_0^1 e^{s} (1-s^2)\, ds = \ldots$$