Esercizi Analisi Matematica II

Anno accademico 2017-2018

Foglio 8

1. **T** Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitato. Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ limitata e sia $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la sua estensione a zero, cioè
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega. \end{cases}$$
Siano Q_1 e Q_2 due rettangoli tali che $\Omega \subset Q_i$ per $i = 1, 2$.
Dimostrare che $\tilde{f}$ è Riemann integrabile su Q_1 se e solo se lo è su Q_2 e in questo caso vale
$$\int_{Q_1} \tilde{f} = \int_{Q_2} \tilde{f}.$$
Suggerimento: considerare prima il caso in cui $Q_1 \subset Q_2$. Nel caso generale utilizzare $Q = Q_1 \cap Q_2$.

2. **P** Calcolare
   (a) $\displaystyle\iint_Q xy\log(xy)\,dx\,dy$ dove $Q = [1,2] \times [2,3]$
   (b) $\displaystyle\iint_Q \frac{xy}{x+y}\,dx\,dy$ dove $Q = [1,2] \times [2,3]$
   (c) $\displaystyle\iint_Q xye^y\,dx\,dy$ dove $Q = [0,2] \times [0,1]$
   (d) $\displaystyle\iint_Q x\sin(xy)\,dx\,dy$ dove $Q = [-1,1] \times [0,1]$
   (e) $\displaystyle\iint_Q (x+y)\log(1+x)\,dx\,dy$ dove $Q = [0,1] \times [0,1]$
   (f) $\displaystyle\iint_Q x\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy$ dove $Q = [1,2] \times [0,1/2]$
   (g) $\displaystyle\iint_Q (x+y)e^{2xy+y^2}\,dx\,dy$ dove $Q = [1,2] \times [0,1]$
   (h) $\displaystyle\iint_Q \sin(x+y)\,dx\,dy$ dove $Q = [0,\pi] \times [0,\pi]$
   (i) $\displaystyle\iint_Q \sqrt{4x^2-y^2}\,dx\,dy$ dove $Q = [2,3] \times [1,2]$

3. **P** Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ il quarto della palla chiusa di raggio 1 centrata nell'origine contenuto nel primo quadrante, cioè
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}.$$
Calcolare
$$\iint_E \log(1+x^2)y^3\,dx\,dy \quad \text{e} \quad \iint_E y\arcsin(x)\,dx\,dy$$

4. **P** Sia $Q = [-1, 1] \times [0, 2]$. Sia $f : Q \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $(x, y) \in Q$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+2y} & \text{se } y \le 1 - x^2 \\ 1 & \text{se } y > 1 - x^2 \end{cases}$$

Stabilire se f è integrabile su Q e in tal caso calcolare

$$\iint_Q f(x, y)\, dx\, dy$$

5. **P** Calcolare l'area di

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1 \text{ e } y \ge 1 \right\}.$$

Legenda:
T esercizio teorico; **P** esercizio pratico; **F** esercizio facoltativo; $*$ esercizio difficile