Isometrie di E^1.

Dal momento che gli endomorfismi ortogonali di $\mathbb{R}$ sono soltanto $\pm id_{\mathbb{R}}$, le isometrie di E^1 hanno equazione della forma:

$$f(x) = \pm x + c$$

$x + c$ traslazione

$-x + c$ simmetria rispetto al punto $\frac{c}{2}$.

ISOMETRIE DI E^2

Def. $f: A \to A$ affinità, A sp. affine

$S \subset A$ sottosp. affine è detto fisso o invariante per f se $f(P) = P \;\; \forall P \in S$.
$S \subset A$ è detto stabile per f se $f(S) \subseteq S$, ossia $f(S) = S$ perché hanno la stessa dim.

Prop. Sia $f: A \to A$ un'affinità, $P_0 \in A$ un punto fisso di f. Allora:
1) Se $E_\lambda \subset V$ è l'autospazio di φ_f autovalore λ, il sottosp. affine $S \subset A$ di giacitura E_λ passante per P_0, è stabile per f;
2) se inoltre $\lambda = 1$, S è fisso per f.

Dim. se $Q \in S$, $\overrightarrow{P_0Q} \in E_\lambda \Rightarrow \underset{\parallel}{\varphi_f(\overrightarrow{P_0Q})} = \lambda \overrightarrow{P_0Q} \in E_\lambda$

$\overrightarrow{f(P_0)f(Q)} = \overrightarrow{P_0 f(Q)}$

$\Rightarrow f(Q) \in P_0 + E_\lambda = S$. Dunque $f(S) \subseteq S$.

Se $\lambda = 1$, $\overrightarrow{P_0 f(Q)} = \overrightarrow{P_0Q} \Rightarrow Q = f(Q)$. ∎

Cor. Nella rifl. risp. all'iperpiano S, le rette ortog. a S sono stabili.

Isometrie di E^2.

Matrici ortogonali 2x2

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ è ortogonale $\Leftrightarrow {}^tA = A \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \qquad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \end{cases}$$

Allora $\exists$ angoli ϑ, φ, tali che

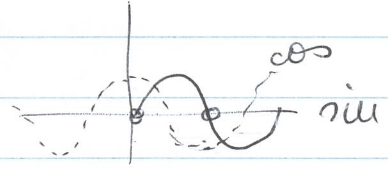
$a_{11} = \cos\vartheta \qquad a_{12} = \sin\varphi$

$a_{21} = \sin\vartheta \qquad a_{22} = \cos\varphi$

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\varphi \\ \sin\vartheta & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

e inoltre $\cos\vartheta\sin\varphi + \sin\vartheta\cos\varphi = 0$

$$\sin(\vartheta+\varphi) = 0$$



$\Rightarrow \vartheta + \varphi = \begin{cases} \pi & \text{supplementari} \\ 2\pi \ (\text{o } 0 \bmod 2\pi) & \text{opposti} \end{cases}$

Allora A è di uno dei tipi:

1) $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} =: R_\vartheta \qquad \det(R_\vartheta) = 1$

$\boxed{\varphi = \cancel{\vartheta}\, 2\pi - \vartheta = -\vartheta}$

$P_\lambda(R_\vartheta) = \lambda^2 - 2\cos\vartheta\,\lambda + 1 = 0 \quad \Delta = \cos^2\vartheta - 1$

(*) Ci sono autoval. solo se $\vartheta = 0, \varphi = 1\,v$; opp. $\vartheta = \pi, \varphi = -1\,v$, $\lambda = -1$.

2) $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix} =: S_\vartheta \qquad \det(S_\vartheta) = -1$

$\boxed{\varphi = \pi - \vartheta}$

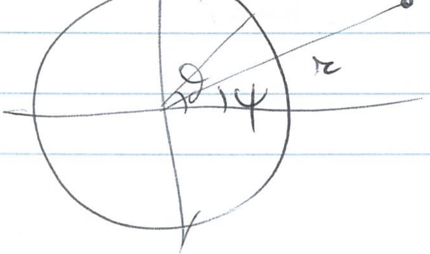
$P_\lambda(S_\vartheta) = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \begin{matrix} \lambda = 1 & (\cos\vartheta - 1)x + \sin\vartheta\, y = 0 \\ \lambda = -1 & \sin\vartheta\, x - (\cos\vartheta + 1)y = 0 \end{matrix}$

simmetrica, 2 autosp. ortogonali

1) L'isom. lin. rappresentata da R_ϑ manda (x,y) in $(x\cos\vartheta - y\sin\vartheta, x\sin\vartheta + y\cos\vartheta)$.

Se $(x,y) = r(\cos\psi, \sin\psi)$ in coord. polari $\longrightarrow (r(\cos\psi\cos\vartheta - \sin\psi\sin\vartheta), r(\cos\psi\sin\vartheta + \sin\psi\cos\vartheta)) =$

$= r(\cos(\psi+\vartheta), \sin(\psi+\vartheta))$



<u>rotaz. di angolo ϑ</u>
(verso antiorario)

2) $S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad (x,y) \to (x,-y)$

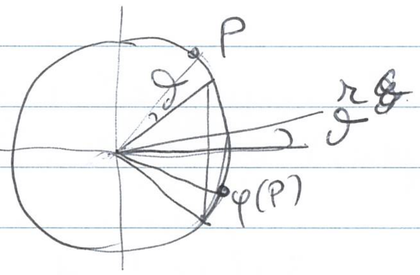
riflessione risp. all'asse x

<u>Oss.</u> $S_{2\vartheta} = R_\vartheta S_0 R_{-\vartheta} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta & 2\sin\cos \\ 2\sin\cos & \sin^2 - \cos^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\vartheta) & \sin(2\vartheta) \\ \sin(2\vartheta) & -\cos(2\vartheta) \end{pmatrix}:$$

riflessione risp. alla retta r che forma angolo ϑ con l'asse x



Ruoto di $-\vartheta$ poi rifletto nell'asse x, poi ruoto di ϑ: nella prima rotaz. la retta r, che forma un angolo ϑ con l'asse x, si sovrappone all'asse x: $S_{2\vartheta}$ rappresenta la riflen. risp. alla retta r. <u>Oss.</u>: $S_{\vartheta_1} S_{\vartheta_2} = R_{\vartheta_1 - \vartheta_2}$: ogni rotaz. è composiz. di 2 simmetrie = riflessioni.

Sia $f: E \to E$ rapp. rispetto a un rif. cartesiano da $Y = AX + C$, $A \in O(2)$.

1) <u>se $A = R_\vartheta$</u> simmetrie dirette, φ è rapp. da $Y = AX$: è la rotaz. di angolo ϑ. Per analizzare f, guardo se ha punti fissi.

a) se f ha un punto fisso, posso supp. sia O, f è la rotaz. di centro O di angolo ϑ in verso ~~antiorario~~ da e_1 a e_2. In tal caso $Y = AX$. Se P_0 è fisso, f è rotaz. di centro P_0.

b) se $A = I_2$, $Y = X + C$ traslazione non ha punti fissi se $C \neq 0$, $f = id$ se $C = 0$.

c) se $A \neq I_2$ $\Rightarrow$ ha un punto fisso.

Infatti consid. l'equazione

$X = AX + C$ ossia $(I_2 - A)X = C$.

La matrice $I_2 - A$ è invertibile: altrim. esisterebbe $v \neq 0$ t.c. $(I_2 - A)v = 0 \iff v = Av$: v è autovett. di autovalore 1 : no perché $A \neq I_2$ (vedi (*))
Allora $X = (I_2 - A)^{-1} C = C - A^{-1}C$ è punto fisso: centro della rotazione.

Prof Dunque se f è un'isometria diretta del piano $\neq 1_E$

f è $\begin{cases} \text{rotazione: un punto fisso} & (C - A^{-1}C) \\ \text{traslazione: non ha punti fissi} \end{cases}$

2) $A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$ ϑ è l'angolo (orientato) di e_1 e $\varphi(e_1)$.

φ ha 2 autosp. ortogonali:

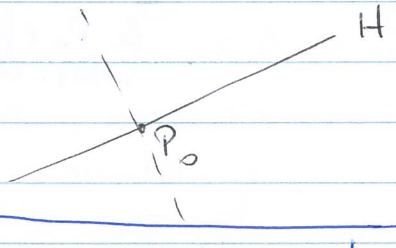
$H : (\cos\vartheta - 1)x + \sin\vartheta\, y = 0$ autoval. 1

$H^\perp : (\cos\vartheta + 1)x + \sin\vartheta\, y = 0$ autoval. -1

$\Rightarrow \varphi = r_H$, H retta che forma angolo $\frac{\vartheta}{2}$ con asse x.
(formule di bisezione) ↳ vedi sotto

Ora guardo f.

a) se f ha un punto fisso P_0, f è la riflessione rispetto alla retta r per P_0 parallela ad H, r è fissa (per quanto appena visto). La retta per P_0 ortog. a r risulta stabile, ma non fissa; questo accade $\forall P_0 \in H$.

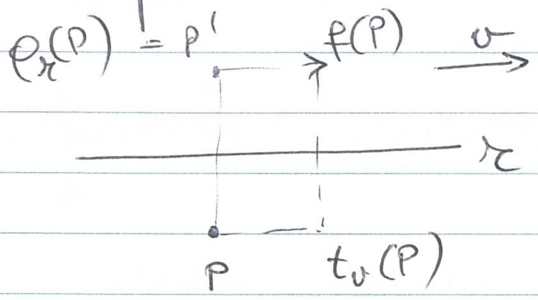


b) se f non ha punti fissi è una glissoriflessione.

Formule di bisezione: $\left|\cos\frac{\vartheta}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\vartheta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\vartheta}{2(1-\cos\vartheta)}} = \sqrt{\frac{\sin^2\vartheta}{2-2\cos\vartheta}} =$

$= \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{2-2\cos\vartheta}}$

Def. una glissoriflessione o antitraslazione è un'isometria del tipo $t_v \circ \rho_r$: riflessione di asse r seguita dalla traslaz. di vettore v, dove v è un vettore parallelo a r.



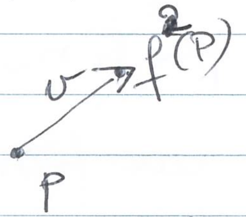
chiaram. si ha $t_v \circ \rho_r = \rho_r \circ t_v$: perché ho un rettangolo

r = asse della glissorifl.

Prop. f isom. inversa priva di punti fissi è glissorifl.

Dim. considero $f^2 = f \circ f$: isom. diretta.

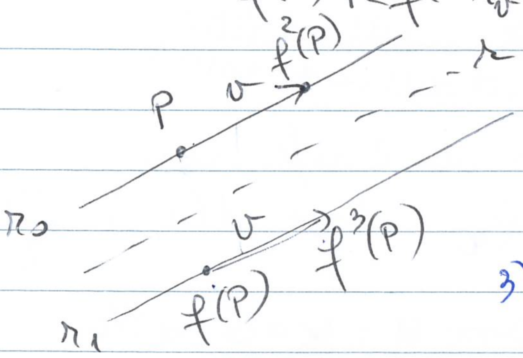
1) È priva di punti fissi: altrim. si avrebbe un P t.c. $f(f(P)) = P$. Dunque il segmento $\overline{Pf(P)}$ sarebbe mandato in $\overline{f(P)f^2(P)} = \overline{f(P)P}$: se stesso con estremi scambiati, quindi il suo punto medio sarebbe fisso :NO



2) Allora $f^2 = t_v$, traslaz. di vettore $v = \overrightarrow{Pf^2(P)}$.
Sia r_0 la retta per questi 2 punti: $P + \langle v \rangle$ e r_1 la retta per $f(P)$ e $f^3(P)$ $= f^2(f(P))$: $f(P) + \langle \overrightarrow{f(P)f^2(f(P))} \rangle = f(P) + \langle \overrightarrow{f(P)t_v(f(P))} \rangle = f(P) + \langle v \rangle$: r_0 e r_1 sono parallele e si ha

$f(r_0) = r_1$ e $f(r_1) = f^2(P) + \langle v \rangle = r_0$

per $P, f(P)$ per $f(P), f^3(P)$



3) Sia r la retta a esse parallela ed equidistante da entrambe: r è trasformata in sé da f, perché è luogo di punti medi di punti corrisp.(*): $f(r) = r$ stabile ma non fissa.

(*) il segm. $\overline{P_0P_1}$, con $P_0 \in r_0$, $P_1 \in r_1$, viene mandato in $\overline{f(P_0)f(P_1)}$; il punto medio M di $\overline{P_0P_1}$ sta su r e viene mandato al punto medio di $\overline{f(P_0)f(P_1)}$ che sta su r.

Isom. dell. di $\mathbb{R}$ è $\pm id_{\mathbb{R}}$. Isom. di E^1 è $f(x) = \pm x + c$ $\begin{cases} x+c & \text{trasl.} \\ -x+c & \text{simm. risp. a } \frac{c}{2} \end{cases}$

se fl_r fosse simmetria, fl_r^2 sarebbe l'identità

$f^2 = t_v$ agisce su r come t_v $\Rightarrow$ fl_r agisce su r come $t_{\frac{v}{2}}$; allora $t_{-\frac{v}{2}} \circ f$ fissa r

$\Rightarrow$ è la riflessione ρ_r, perché è isom. inversa con punti fissi. Ma allora

$$t_{-\frac{v}{2}} \circ f = \rho_r \Rightarrow f = t_{\frac{v}{2}} \circ \rho_r \text{ : glissorifl.}$$

■

Abbiamo così ottenuto la classif. delle isometrie del piano, teorema di Chasles 1831.

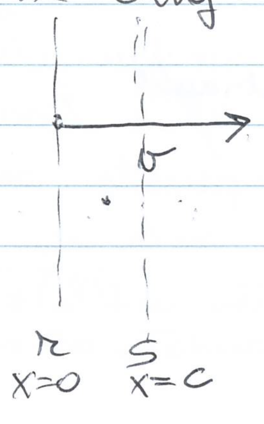
Se f è un'isometria del piano non identica:

diretta	traslazione	no punti fissi
	rotazione	1 pto fisso
inversa	riflessione	1 retta fissa
	glissorifl.	no punti fissi

Oss. Ogni isometria del piano è composta di riflessioni:

1) ogni rotazione lo è; comp. di 2 rifl. rispetto a rette passanti per il centro di rotaz.

2) traslazione di vettore v: composta di 2 rifl. con asse ortog. a v $\quad t_v = \rho_s \rho_r$ dove $d(s,r) = \frac{\|v\|}{2}$



Se supp. r = asse y: $x = 0$, allora $P(x,y)$

s: $x = c$ $\quad (c \neq 0)$

$\rho_r(x,y) = (-x, y)$

$\rho_s(x,y) = (2c - x, y)$

traslaz. di vettori opposti: $\rho_r(\rho_s(x,y)) = \rho_r(2c-x,y) = (x-2c,y) =$
$= (x,y) + (-2c,0)$

$\rho_s(\rho_r(x,y)) = \rho_s(-x,y) = (2c+x,y) = (x,y)+(2c,0)$

3) glissorifl. OK perché composta di ~~rotaz~~ rifl. e traslaz.

$\Rightarrow$ ne bastano 3.

In E^3 ci sono 6 classi di isometrie, Eulero 1776 (prima di Chasles)

- una matrice ortog. 3x3 ha sempre come autovalore 1 o -1 e può essere rapp. rispetto a un'opportuna base ortonormale nella forma $M = \left(\begin{array}{c|c} \pm 1 & 0 \\ \hline 0 & R_\vartheta \end{array}\right)$ — 1 se $M \in SO(3)$, -1 se $M \in O^-(3)$

Se $M \in SO(3)$, rotaz. di angolo ϑ di asse l'autosp. di autovalore 1; se $\varphi \in O^-(3)$, dopo la rotaz. ribalto l'asse.

- Le 6 classi sono:
  1) traslazione, diretta senza pti fissi: t_v
  2) riflessione, inversa, piano fisso: ρ_π
  3) rotazione, diretta, retta fissa r: σ_r
  4) glissoriflessione, $t_v \circ \rho_\pi$, π piano, $v \parallel \pi$, inversa senza pti fissi
  5) glissorotazione: $t_v \circ \sigma_r$, $r \parallel v$, diretta senza punti fissi
  6) riflessione rotatoria: $\rho_\pi \circ \sigma_r$: $r \perp \pi$, inversa, un pto fisso $P_0 = \pi \cap r$: ruoto e poi inverto l'asse di rotaz.

Simmetrie di un quadrato: possono essere solo rotaz. o riflessioni, no traslaz.; questo per tutte le figure finite.
ne glissorifl.

Ogni isometria di $\mathbb{R}^n$ è composiz. di al più $n+1$ riflessioni. Se ha un punto fisso, ne bastano n. Induz.