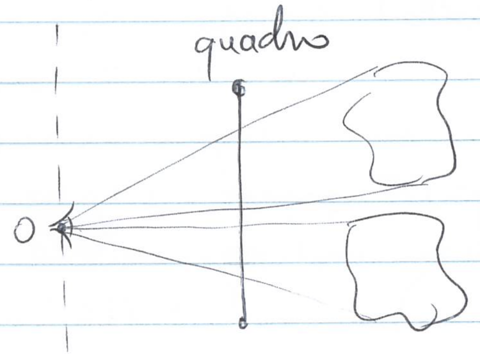
GEOMETRIA PROIETTIVA

Ha origine dagli studi del Rinascimento sulla prospettiva.



Se si vuole riprodurre su un quadro una scena tridimensionale, si sceglie un punto O in cui è posto l'occhio dell'osservatore e "ogni" retta passante per O corrisponde a un punto del quadro: metodo di proiezione e sezione. In realtà "quasi" ogni retta: la biezione si perde per le rette passanti per O contenute nel piano per O parallelo al quadro. Se approssimo tali rette, ottengo punti sempre più lontani, che "vanno all'infinito".

Idea: completare il piano con punti all'infinito, così si riesce a unificare concetti distinti, in modo da ottenere teoremi più generali ("senza eccezioni").

Per esempio nel piano ampliato 2 rette

- incidenti: punto comune
- parallele: direzione (o punto all'infinito) comune.

Nella costruzione formale del piano proiettivo i "punti" sono "le rette passanti per il punto (nella biezione)

Sia V un K-spazio vettoriale.

Def: spazio proiettivo su V $\mathbb{P}(V)$ è l'insieme dei sottospazi di dimensione 1 di V: rette vettoriali, per l'origine.

In particolare $\mathbb{P}(V) = \emptyset$ se $V = (0)$ sp. vett. nullo.

Punti di $\mathbb{P}(V)$ sono le rette di V.

Equivalentemente posso ragionare così:

introduco in V una relazione d'equivalenza $v \sim v' \iff \exists \lambda \neq 0$ in K t.c. $v' = \lambda v$: relazione di proporzionalità.

È una relaz. d'equivalenza non compatibile con la somma.

Le classi d'equivalenza sono:

- $[0] = \{0\} = \langle 0 \rangle$
- le classi dei vettori non nulli: $[v] = \langle v \rangle - \{0\}$.

Le classi dei vettori non nulli sono in biezione con le rette vettoriali di V.

$$\mathbb{P}(V) \longleftrightarrow V - \{0\} / \sim$$

c'è una biezione naturale che li identifica

$v \neq 0$ $\quad \langle v \rangle \quad\quad [v]$

Non c'è una somma in $\mathbb{P}(V)$.

Def. $\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1$

$\dim \emptyset = -1$

Esempi

$V = K^{n+1}$, $\mathbb{P}(K^{n+1}) = \mathbb{P}^n_K$ n-spazio proiettivo numerico

Es. $K = \mathbb{C}, \mathbb{R}$

$\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ retta proiettiva reale
$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ piano — — —

2) $V = \{$polin. omogenei di grado 1, di $K[x_0, \ldots, x_n]$
$\longleftrightarrow$ forme lineari su $K^{n+1}\} \simeq (K^{n+1})^*$
$\mathbb{P}(V) = \{[f] = \{\lambda f \mid \lambda \in K^*, f \neq 0\}\}$

3) Se $\dim V = 1$, $\mathbb{P}(V) = \{*\}$, $\dim = 0$

Se dati $[v] \in \mathbb{P}(V)$ è un punto, $[v] = [w]$
$\Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0$ t.c. $w = \lambda v$!

Se $V = K^{n+1}$, $v = (x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1}$, $[v] = [(x_0, \ldots, x_n)] \in \mathbb{P}^n_K$
$\neq (0, \ldots, 0)$ $\quad$ " notaz. $[x_0, \ldots, x_n]$
$\lambda \neq 0$ " $[\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n]$

v vettore, $[v]$ punto

Def. sistema di coord. omogenee o rif. proiettivo in $\mathbb{P}(V)$: scelta di una base $\mathcal{B}$ di V
$\mathcal{B} = \{e_0, \ldots, e_n\}$
Se $v \in V - \{0\}$, $v = x_0 e_0 + \ldots + x_n e_n$, $(x_0, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$.
Allora il punto $P = [v]$ ha <u>coordinate omogenee</u> $x_0, \ldots, x_n$ nel rif. proiettivo associato alla base $\mathcal{B}$.
Anche $\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n$ sono coordinate omogenee dello stesso punto P.
$E_0 = [e_0]$ ha coord. omog. $[1, 0, \ldots, 0] = [\lambda, 0, \ldots, 0]$
$E_1 = [e_1]$ $\quad [0, 1, 0, \ldots, 0] = [0, \lambda, 0, \ldots]$

punti fondamentali del rif. proiettivo

$U = [1, \dots, 1] = [\lambda, \dots, \lambda] = [e_0 + \dots + e_n]$
punto unità

Se sostituisco a $\mathcal{B}$ una base proporzionale, le coord. omogenee non cambiano.
Due rif. proiettivi sono identici se corrispondono alla scelta di basi proporzionali.
In $\mathbb{P}^n_K$: rif. proiett. standard.

Sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$

Dato $W \subset V$ sottospazio vettoriale, si ha $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$: tutta la retta $\langle w \rangle$ è contenuta in W se $w \in W$.

Def. I sottosp. proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ sono i sottoinsiemi del tipo $\mathbb{P}(W)$.
$\dim \mathbb{P}(W) = \dim W - 1$.

Codimensione: $\dim \mathbb{P}(V) - \dim \mathbb{P}(W) = \dim V - \dim W$; la codim è la stessa.
In particolare: iperpiani sono i sottospazi di codim. 1.

1) Se $H \subset V$ è un iperpiano vettoriale, H ha un'equazione cartesiana (in un rif fissato)
$$a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0, \quad \text{con } (a_0, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0).$$
L'equaz. è det. a meno di un fattore di prop. non nullo.
$v(x_0 \dots x_n) \in H \iff a_0 v_0 + \dots + a_n v_n = 0$
$\iff (\lambda v_0, \dots, \lambda v_n)$ è una soluz. $\forall \lambda$ perché

l'equazione è omogenea.
Allora $P = [v] = [x_0 \dots x_n] \in \mathbb{P}(H) \iff$ $\forall$ scelta di coord. omogenee di P, queste sono soluz. dell'equaz. $a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0$: equaz. cartesiana di $\mathbb{P}(H)$.

Es. $x_0 = 0$ è l'equaz. di $H_0 = \mathbb{P}(\langle e_1, \dots, e_n \rangle)$.
$x_i = 0$ equaz. dell'iperpiano $H_i = \mathbb{P}(\langle e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n \rangle)$.

$H_0, \dots, H_n$ iperpiani coordinati.

Es. in $\mathbb{P}^1_K$ $[x_0, x_1]$ con $(x_0, x_1) \neq (0,0)$
$H_0 : x_0 = 0 \Rightarrow x_1 \neq 0$ è un solo punto E_1
$H_1 : x_1 = 0$ $H_1 = \{[e_0]\} = E_0$

In $\mathbb{P}^2_K$: 3 pti fondam. $[1,0,0] = E_0$
$[0,1,0] = E_1$
$[0,0,1] = E_2$

$H_0 : x_0 = 0$ è $\mathbb{P}(\langle e_1, e_2 \rangle)$
$H_1 : x_1 = 0$
$H_2 = x_2 = 0$

2) Se W è un sottosp. vett. di codim r in V, W è def. da r equazioni lineari omogenee lin. indip., le stesse sono anche equazioni di $\mathbb{P}(W)$. Dunque $\mathbb{P}(W)$ è intersezione di r iperpiani.

Oss. Intersezione di sottospazi proiettivi.
Se W, U sono sottosp. vettoriali di V,

si ha $\mathbb{P}(W) \cap \mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(W \cap U)$: fatto insiemistico. Anche per famiglie di sottospazi.
In particolare $W \cap U = (0) \iff \mathbb{P}(W) \cap \mathbb{P}(U) = \emptyset$.
Def. $\mathbb{P}(W)$, $\mathbb{P}(U)$ si dicono sghembi se $\mathbb{P}(W) \cap \mathbb{P}(U) = \emptyset$, altrimenti sono incidenti.

Sottospazio generato o congiungente:
Se $S \subset \mathbb{P}(V)$ è un sottoinsieme, il sottospazio proiettivo generato da S, $L(S)$ è
$$\bigcap_{\mathbb{P}(W) \supseteq S} \mathbb{P}(W)$$
linear span

In particolare se $S = \{P_1, \dots, P_s\}$, insieme finito di punti, con $P_1 = [v_1], \dots, P_s = [v_s]$,
$$L(P_1, \dots, P_s) = \bigcap_{P_i \in \mathbb{P}(W)\ \forall i} \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(\langle v_1, \dots, v_s \rangle).$$
In particolare $\dim L(P_1, \dots, P_s) \leq s-1$, e vale l'uguaglianza $\iff v_1, \dots, v_s$ sono lin. indip. In tal caso, cioè se $\dim L(P_1, \dots, P_s) = s-1$ i punti $P_1, \dots, P_s$ si dicono lin. indip.
OSS. se $\dim W = r+1$, W è gen. dagli $r+1$ vettori di una sua base $\Rightarrow \mathbb{P}(W)$ è gen. da $r+1$ suoi punti lin. indip.

Relazione tra spazio proiettivo e spazio affine.

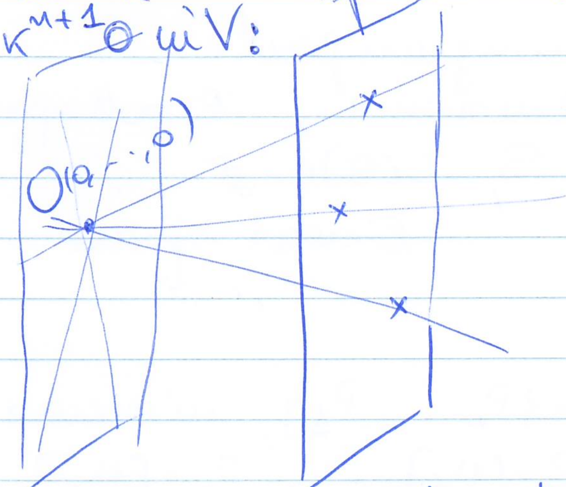
Fissato un rif. proiett., def. $U_0 = \mathbb{P}(V) - H_0$, ...

$U_n = \mathbb{P}(V) \setminus H_n$.

Osserviamo che U_i è def. da $x_i \neq 0$ e $\mathbb{P}(V) = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_n$: è un ricoprimento, l'unione non è disgiunta.

Vedremo che ogni U_i può essere interpretato come uno spazio affine.

In K^{n+1} o in V:



$x_0 = 0$ — W_0 sottosp. vett.

$x_0 = 1$: sottosp. affine A parallelo a W_0: $x_0 = 0$ passante per O

$\mathbb{P}^n_K$: i suoi punti sono le rette vettoriali per O; ogni punto $[v_0, \dots, v_n] = [v] \in \mathbb{P}^n_K$ corrisponde alla retta $\{(\lambda v_0, \dots, \lambda v_n) \mid \lambda \in K\}$.

$\mathbb{P}^n_K = H_0 \cup U_0 = \{x_0 = 0\} \cup \{x_0 \neq 0\}$.

Se $P \in U_0$, $P = [\underset{\neq 0}{v_0}, \dots, v_n] = [1, \frac{v_1}{v_0}, \dots, \frac{v_n}{v_0}]$: classe di un vettore appartenente ad A; punti di U_0 $\longleftrightarrow$ rette incidenti A $\longleftrightarrow$ punti di A

Se $P \in H_0$, $P = [0, y_1, \dots, y_n]$: corrisponde a una retta contenuta nell'iperpiano (affine) $x_0 = 0$, per O parallela ad A, punto all'infinito di A.

Abbiamo una biiezione:

$$j: A \longrightarrow \mathbb{P}^n_K \setminus H_0 = U_0$$

$$(1, y_1, \dots, y_n) \longrightarrow [1, y_1, \dots, y_n]$$

con inversa

$$U_0 \longrightarrow A$$

$$[x_0, x_1, \dots, x_n] \longrightarrow \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$
$$x_0 \neq 0$$

punti propri, punti impropri

Così c'è anche biiezione tra $\mathbb{P}^n_K$ e $A \cup H_0$

gli elem. di H_0 sono anche le rette vettoriali di K^{n+1} contenute in W_0, cioè nella giacitura di A; sono le direzioni delle rette di A.

$\mathbb{P}^n_K$: completam. all'infinito di A.

Stesso discorso per ogni indice $i = 0, \dots, n$.

Invece di A, iperp. di A^{n+1}, posso prendere A^n_K con la biiezione

$$A \longleftrightarrow A^n_K$$

$$(1, y_1, \dots, y_n) \longleftrightarrow (y_1, \dots, y_n).$$

Abbiamo così

$$j_0 : A^n_K \longrightarrow \mathbb{P}^n_K \setminus H_0$$

$$(y_1, \dots, y_n) \longrightarrow [1, y_1, \dots, y_n]$$

$$\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \longleftarrow [x_0, \dots, x_n]$$

$$\mathbb{P}^n_j = j_0(A^n_K) \cup H_0 \xleftrightarrow{\text{identif.}} A^n_K \cup H_0$$

H_0 = iperpiano all'infinito

j_0 fa passare da coord. affini a coord. omogenee.

Es. $\boxed{n=1}$

$\mathbb{P}^1_K = \mathbb{A}^1_K \cup H_0 \qquad H_0 = \{[0,1]\} = \infty$ simbolo

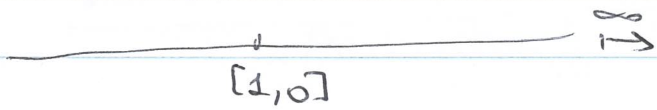
$\qquad = K \cup \{\infty\}$

$$[x_0,x_1] \longleftrightarrow \begin{cases} \frac{x_1}{x_0} \in K & \text{se } x_0 \neq 0 \\ \infty & \text{se } x_0 = 0 \end{cases} \qquad t = \frac{x_1}{x_0}$$

Ma posso prendere $H_1 = [1,0]$ come punto all'∞,

$\mathbb{P}^1_K = \mathbb{A}^1_K \cup H_1$

$$[x_0,x_1] \longleftrightarrow \begin{cases} \frac{x_0}{x_1}, & x_1 \neq 0 \\ \infty & \text{se } x_1 = 0 \end{cases} \qquad [0,1] \longleftrightarrow 0, \quad s = \frac{x_0}{x_1} = \frac{1}{t}$$



$\mathbb{P}^1_K$ si chiude all'∞.

$\boxed{n=2}$

$U_0 \quad \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = (x, y)$

$U_1 \quad \left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}\right) = (s, t)$

$U_2 \quad \left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}\right) = (u, v)$

cambiam. di coordinate:

$s = \frac{1}{x}, \quad t = \frac{y}{x}$

$u = \frac{1}{y}, \quad v = \frac{x}{y}$

$v = \frac{1}{t}, \quad u = \frac{s}{t}$

Def. $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}(V)$ di dim n si dicono <u>in posizione generale</u> se:

a) $r \leq n+1$ e $P_1, \dots, P_r$ sono lin. indip.;
oppure

b) $r > n+1$ e $P_1 \dots P_r$ sono a $n+1$ a $n+1$ lin. indip.

Es. 2 punti distinti, 3 punti non allineati.
In $\mathbb{P}^2$, $r > 3$ punti a 3 a 3 non allineati.

Es. $E_0, \dots, E_n, U$ sono $n+2$ punti in pos. generale
$e_0, \dots, e_n, e_0 + \dots + e_n$

Teorema
Siano $P_0, \dots, P_{n+1}$ punti in posiz. generale di $\mathbb{P}(V)$, $\dim \mathbb{P}(V) = n$.
Allora $\exists$ un rif. proiett. in cui $P_0, \dots, P_n$ sono punti fondam. e P_{n+1} punto unità.
Dim: Sia $P_i = [v_i]$. Allora $v_0, \dots, v_n$ è una base di V, e $v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n$.
Oss. che $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ sono tutti non nulli.
Allora $\underbrace{\lambda_0 v_0}_{v_0'}, \dots, \underbrace{\lambda_n v_n}_{v_n'}$ è una nuova base $\mathcal{B}'$

e $P_i = [v_i] = [v_i']$. Inoltre $v_{n+1} = v_0' + \dots + v_n'$
e perciò $P_{n+1} = [v_0' + \dots + v_n']$ è punto unità nel rif. di $\mathcal{B}'$. ∎

Relazione di Grassmann proiettiva.
Dati $W, U \subseteq V$ sottospazi vettoriali si ha
$\dim U + \dim W = \dim (U \cap W) + \dim (U + W)$.
Siccome $U + W = \langle U \cup W \rangle$, da questa si

Deduco la relazione ~~su~~ in $\mathbb{P}(V)$:

$\dim \mathbb{P}(W) + \dim \mathbb{P}(U) = \dim(\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)) + \dim L(\mathbb{P}(U) \cup \mathbb{P}(W))$:
perché tutte le dimensioni calano di 1.

In particolare:
$\dim(\mathbb{P}(W) \cap \mathbb{P}(U)) = -1 \iff W \cap U = (0) \iff$
$\mathbb{P}(W) \cap \mathbb{P}(U) = \emptyset$.

Inoltre, se $n = \dim \mathbb{P}(V)$,
$\dim(\mathbb{P}(W) \cap \mathbb{P}(U)) = \dim \mathbb{P}(W) + \dim \mathbb{P}(U) - \dim L(\mathbb{P}(W) \cup \mathbb{P}(U)) \geq$
$\geq \dim \mathbb{P}(W) + \dim \mathbb{P}(U) - n$

e perciò se $\dim \mathbb{P}(W) + \dim \mathbb{P}(U) \geq n \implies$
$\dim(\mathbb{P}(W) \cap \mathbb{P}(U)) \geq 0$ e quindi l'intersezione è non vuota.
Per es. in $\mathbb{P}^2$ 2 rette hanno sempre $\cap$ non vuoto;
in $\mathbb{P}^3$: 2 piani oppure retta e piano, ecc.

Equazioni parametriche dei sottospazi.

Se $S = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$, e $W = \langle \overbrace{w_0, \dots, w_s}^{\text{base}} \rangle$,

allora $S = L(P_0, \dots, P_s)$, con $P_i = [w_i]$.

Allora ogni vettore di W è del tipo $\lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_s w_s$,
e ogni punto $P \in S$ è del tipo
$P = [\lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_s w_s]$.

Se è fissata una base di V $\{e_0, \dots, e_n\}$, rispetto al riferimento indotto abbiamo:

$$w_0 = a_{00}e_0 + \dots + a_{0n}e_n$$
$$\vdots$$
$$w_s = a_{s0}e_0 + \dots + a_{sn}e_n$$

$P[x_0, \dots, x_n]$ con

$$\begin{cases} \rho x_0 = \lambda_0 a_{00} + \dots + \lambda_s a_{s0} \\ \vdots \\ \rho x_n = \lambda_0 a_{0n} + \dots + \lambda_s a_{sn} \end{cases}$$

per un $\rho \in K - \{0\}$ opportuno.

Es. retta per 2 punti: $P_0[a_0, \dots, a_n]$
$P_1[b_0, \dots, b_n]$

$$\begin{cases} x_0 = \lambda a_0 + \mu b_0 \\ \vdots \\ x_n = \lambda a_n + \mu b_n \end{cases} \iff rg\begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_n \\ a_0 & \dots & a_n \\ b_0 & \dots & b_n \end{pmatrix} < 3.$$

In $\mathbb{P}^2$ l'equaz. cartesiana della retta per 2 punti è semplicemente:

$$\det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} = 0$$

Chiusura proiettiva

Considero $\mathbb{P}^n$ come $\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^n \cup H_0$, mediante le iniezioni:

$$j_0 : \mathbb{A}^n \longrightarrow U_0 \subset \mathbb{P}^n \qquad ; \qquad j_0^{-1} : U_0 \longrightarrow \mathbb{A}^n$$
$$(y_1, \dots, y_n) \longrightarrow [1, y_1, \dots, y_n] \qquad [x_0, \dots, x_n] \longrightarrow \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

$x_0 \neq 0$

passaggio a coord. omogenee

passaggio a coord. affini o non omog.

Sia $H \subset \mathbb{A}^n$ un iperpiano affine, di equazione:

(*) $$a_1 \cancel{X_1} + \dots + a_n \cancel{X_n} + b = 0$$

$$j_0(H) = \{ P[\underset{\neq 0}{x_0}, \dots, x_n] \mid a_1 \frac{x_1}{x_0} + \dots + a_n \frac{x_n}{x_0} + b = 0 \} =$$

$$= \{ P[\underset{\neq 0}{x_0} \dots x_n] \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b x_0 = 0 \}$$

perché posso elim. il denom.

Ho "omogeneizzato" il pol. $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b = 0$

In $\mathbb{P}^n$ l'equazione lineare omogenea

$b x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ rappresenta un iperpiano proiettivo $\overline{H}$: chiusura proiettiva di H

Si ha: 1) $j_0(H) = \overline{H} \cap U_0$

2) $\overline{H} - j_0(H) = \{ [0, x_1, \dots x_n] \mid \underbrace{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0}_{\text{giacitura di } H} \}$

punti all'infinito che corrispondono ai vettori della giacitura di H

Per es. in $\mathbb{A}^2$

H retta affine $\quad x + y - 1 = 0$

$\overline{H}$ retta proiettiva $\quad -x_0 + x_1 + x_2 = 0$ opp.

$x_0 - x_1 - x_2 = 0$

$$\overline{H} = \underset{\substack{\Updownarrow \\ j_0(H)}}{H} \cup \{ [0, x_1, x_2] \mid x_1 + x_2 = 0 \} = H \cup \{ [0, x_1, -x_1] \}$$

$[0, x_1, -x_1] = [0, 1, -1]$

punto all'infinito di H

Se L è una retta di $\mathbb{P}^2$, di equazione $a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$, ci sono 2 casi:

1) $(a_1, a_2) \neq (0,0)$: L è la chiusura proiettiva di l, retta affine di equazione $a_1 x + a_2 y + a_0 = 0$

2) $(a_1, a_2) = (0,0)$: L ha equaz. $x_0 = 0$: è la retta impropria H_0 ; è l'unica retta di $\mathbb{P}^2$ non chiusura proiettiva di una retta affine.

Analogamente, dato un sottospazio $S \subset \mathbb{A}^4_K$, omogeneizzo le sue equazioni e trovo $\overline{S}$, chiusura proiettiva: $\overline{S} = S \cup (\underbrace{\overline{S} \cap H_0}_{\text{punti all'}\infty \text{ di } S})$

Rette parallele in $\mathbb{A}^2$: $ax + by + c = 0$, $ax + by + c' = 0$

$\Rightarrow \{c x_0 + a x_1 + b x_2 = 0\} \cap \{c' x_0 + a x_1 + b x_2 = 0\} = \{x_0 = 0, a x_1 + b x_2 = 0\}$: pto all'∞.

Fasci di rette

Dato ϕ, fascio di rette in $\mathbb{A}^2$:

1) ϕ proprio: ϕ ha un centro P; faccio la chiusura proiettiva di tutte e trovo in $\mathbb{P}^2$ il fascio di tutte le rette di $\mathbb{P}^2$ passanti per $j_0(P)$:

$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0 \Rightarrow$

$\lambda(c x_0 + a x_1 + b x_2) + \mu(c' x_0 + a' x_1 + b' x_2) = 0$

$P(\overline{x}, \overline{y}) \Longrightarrow j_0 P[1, \overline{x}, \overline{y}]$

$\begin{cases} a\overline{x}_0 + b\overline{y}_0 + c = 0 \\ a'\overline{x}_0 + b'\overline{y}_0 + c' = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} c \cdot 1 + a\overline{x} + b\overline{y} = 0 \\ c' \cdot 1 + a'\overline{x} + b'\overline{y} = 0 \end{cases}$

2) ϕ improprio : ϕ è formato dalle rette parallele a un vettore v, o ortogonali a un vettore u:

$$\lambda(ax+by+c)+\mu(ax+by+c')=0 \Rightarrow$$

$$\lambda(ax_1+bx_2+cx_0)+\mu(ax_1+bx_2+c'x_0)=0 :$$

sono tutte le rette passanti per il punto
$\begin{cases} x_0=0 \\ ax_1+bx_2=0 \end{cases} \iff [0,b,-a]$ punto all'∞ delle 2 chiusure proiettive.

In $\mathbb{P}^2$ non c'è differenza tra fasci propri e impropri.
In $\mathbb{P}^3$ la situazione è analoga per fasci di piani: hanno sempre una retta base;
in $\mathbb{P}^n$ fasci di iperpiani hanno un $\mathbb{P}^{n-2}$ base (Grassmann).

<u>Cambiamento di coordinate</u> omogenee = cambiamento di base.

$B(e_0 - \cdots e_n)$ $\qquad$ $B'(e_0' - - e_n')$

$$X'=AX, \qquad A=M_{B,B'}(1_V)$$

In $\mathbb{P}^n$ il cambiam. di coord. omogenee è dato dalle stesse equazioni, a meno di un fattore di proporzionalità:

$$X'=\lambda AX \quad \text{opp.} \quad \lambda X'=AX.$$

Isomorfismo di spazi proiettivi:

dati $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(V')$ della stessa dim., un isom. è una biiezione indotta da un isomorfismo lineare di V in V'.

$f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ è associato a $\varphi: V \xrightarrow{\sim} V'$ come segue:

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[d, mapsto] & V-\{0\} \arrow[r, "\varphi|"] \arrow[d, "\pi"] & V'-\{0\} \arrow[d, "\pi'"] & v' \arrow[d, mapsto] \\
{[v]} & \mathbb{P}(V) \arrow[r, "f"] & \mathbb{P}(V') & {[v']}
\end{tikzcd}$$

proiezioni canoniche

diagramma commutativo

$$f([v]) = [\varphi(v)] \quad \forall\, v \neq 0.$$

Se $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V')$ si parla di proiettività. e sai

Ogni sp. proiettivo su K di dim n è $\cong \mathbb{P}^n_K$.

Ogni isom. $V \xrightarrow{\sim} V'$ induce un isom. di spazi proiettivi.

Inoltre φ e $\lambda\varphi$ inducono lo stesso isom, se $\lambda \neq 0$

Teorema:

Se $\varphi, \psi: V \to V'$ sono isom. lineari che inducono lo stesso isom. $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$, allora $\exists\, \lambda \neq 0$ t.c. $\psi = \lambda\varphi$.

Dim.

Per ip. $\forall v \in V$ $[\varphi(v)] = [\psi(v)]$

Allora $\forall v$ $\exists\, \lambda_v \in K$ t.c. $\psi(v) = \lambda_v \varphi(v)$.

Consideriamo l'isom. inverso di φ, φ^{-1}, e lo applichiamo alla preced. uguaglianza:

$$\varphi^{-1}(\psi(v)) = \varphi^{-1}(\lambda_v \varphi(v)) = \lambda_v(\varphi^{-1}(\varphi(v))) = \lambda_v v \Longrightarrow$$

Ogni vettore di V è autovettore di $\varphi'^{-1} \circ \varphi$.
Ma allora $\varphi'^{-1} \circ \varphi$ è un'omotetia: $\exists\, \lambda \in K$ t.c.

$$\varphi'^{-1} \circ \varphi = \lambda\, 1_V \Rightarrow \varphi = \lambda\, \varphi'.$$ ∎

Le proiettività di $\mathbb{P}(V)$ formano un gruppo per la composizione: $PGL(\mathbb{P}(V))$!
in partic. $PGL(\mathbb{P}^n_K) = PGL(n+1, K)$: gruppo proiettivo lineare.

$$GL(V) \longrightarrow PGL(\mathbb{P}(V))$$
$$\varphi \longrightarrow [\varphi] \text{ proiettività indotta}$$

$$\{\text{omotetie}\} \longrightarrow 1_{\mathbb{P}(V)}$$
$$\text{''}$$
$$\text{nucleo}$$

$$\Rightarrow \quad PGL(\mathbb{P}(V)) \simeq GL(V)/_{\sim} = GL(V)/\{\text{omotetie}\}$$

Se φ è rappresentata da $Y = AX$, $|A| \neq 0$, $[\varphi]$ è data dalle stesse equazioni o da equazioni proporzionali: $\rho Y = AX$

$$\begin{cases} \rho y_0 = a_{00}x_0 + \dots + a_{0n}x_n \\ \vdots \\ \rho y_n = a_{n0}x_0 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

<u>Def.</u> 2 sottoinsiemi di $\mathbb{P}^n_K$ sono <u>proiettivamente equivalenti</u> se sono mandati l'uno nell'altro da una proiettività.
"Proprietà proiettive" = "conservate per

proiettività". Es. sp. lineari, appartenenza.

Teorema fondamentale sulle proiettività.

Dati $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(V')$ di dim n, e fissati
$P_0, \dots, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$ in posiz. generale
$Q_0, \dots, Q_{n+1} \in \mathbb{P}(V')$ " "
$\exists!$ isomorfismo $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ tale che
$f(P_i) = Q_i \quad \forall i = 0, \dots, n+1$.

Analogo al teor. di determ. di un'appl. lineare.

Cor. Se $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V')$: l'unica proiettività che lascia fissi $n+2$ punti in pos. gen. è l'ident.
In $\mathbb{P}^1$: 3 coppie di punti, in $\mathbb{P}^2$ 4 coppie di punti a 3 a 3 non allineati ecc., determinano una proiettività.
$\Rightarrow$ 2 quadrilateri qualunque nel piano sono proiett. equivalenti!

Dim.

Esistenza $\quad P_i = [v_i] \quad Q_i = [w_i]$

$(v_0, \dots, v_n)$ base di V
$(w_0 \dots w_n)$ — — V'

$v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n$, con $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tutti non nulli
$w_{n+1} = \mu_0 v_0 + \dots + \mu_n v_n$, $\mu_0 \dots \mu_n$ — — —

Allora $(\lambda_0 v_0, \dots, \lambda_n v_n)$
$(\mu_0 w_0, \dots, \mu_n v_n)$ sono nuove basi ed $\exists!\ \varphi: V \to V'$ t.c.
$\lambda_i v_i \to \mu_i v_i$
$\forall i = 0, \dots, n$.

φ è isom. come richiesto.

Unicità.

Se f' è un'altro isomorfismo come sopra, considero $g = (f')^{-1} \circ f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$:

è una proiettività, dunque è indotta da un isomorfismo $\varphi : V \xrightarrow{\sim} V$; $g = [\varphi]$.

Allora $\varphi(v_i) = \rho_i v_i$ $\forall i = 0, \dots, n+1$, per opportuni scalari $\rho_i \in K - \{0\}$. In particolare $\varphi(v_{n+1}) = \rho_{n+1} v_{n+1}$.

Ma $v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n$, con $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tutti $\neq 0$.

Allora $\varphi(v_{n+1}) = \varphi(\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n) =$

$= \lambda_0(\rho_0 v_0) + \dots + \lambda_n(\rho_n v_n) = (\lambda_0 \rho_0) v_0 + \dots + (\lambda_n \rho_n) v_n =$

$= \rho_{n+1}(\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n) = (\rho_{n+1}\lambda_0) v_0 + \dots + (\rho_{n+1}\lambda_n) v_n.$

Siccome $v_0, \dots, v_n$ sono linearmente indip.,

ne segue:

$$\begin{cases} \lambda_0 \rho_0 = \lambda_0 \rho_{n+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \rho_n = \lambda_n \rho_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0(\rho_0 - \rho_{n+1}) = 0 \\ \vdots \\ \lambda_n(\rho_n - \rho_{n+1}) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\lambda_i \neq 0 \, \forall i}$$

$\rho_0 = \rho_{n+1}, \dots, \rho_n = \rho_{n+1}$. Allora φ è t.c.

$\varphi(v_i) = \rho v_i$ $\forall i$ dove $\rho = \rho_{n+1}$.

Per il teor. di det. di un'appl. lineare, segue che $\varphi = \rho \, id_V$, e dunque $g = id_{\mathbb{P}(V)}$.

<u>Conseguenza.</u> In $\mathbb{P}^1$ due terne di punti distinti sono proiettivamente equivalenti.

<u>Problema</u>: Date 2 quaterne ordinate di punti su una retta, quando sono proiettivam. equivalenti?

La risposta è data dal birapporto, I esempio di invariante.

<u>Def.</u> Siano $\underbrace{P_1, P_2, P_3, P_4}_{\text{distinti}}$ punti di una retta proiettiva. Il birapporto della quaterna ordinata $(P_1, \dots, P_4)$ è la coordinata non omogenea di P_4 nel rif. proiettivo in cui P_1, P_2 sono i punti fondam. e P_3 il punto unità. Se $P_4[y_0, y_1]$ il birapporto è $\frac{y_1}{y_0}$.

<u>Notazione</u> $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

Se $P_4 = P_2$, allora $[y_0, y_1] = [0, 1]$ e si pone $\beta(P_1, \dots, P_4) = \infty$.

Supp. fissato un rif. proiettivo in cui $P_1[\lambda_1, \mu_1]$, $P_2[\lambda_2, \mu_2]$, $P_3[\lambda_3, \mu_3]$, $P_4[\lambda_4, \mu_4]$.

Calcoliamo il birapporto: si avrà

$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_4 \\ \mu_4 \end{pmatrix}$ dove $A = B^{-1}$ e

$B = \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_2 \\ a\mu_1 & b\mu_2 \end{pmatrix}$ con a, b tali che

$(\lambda_3, \mu_3) = a(\lambda_1, \mu_1) + b(\lambda_2, \mu_2)$.

$$\begin{cases} a\lambda_1 + b\lambda_2 = \lambda_3 \\ a\mu_1 + b\mu_2 = \mu_3 \end{cases}$$ sistema di Cramer nelle incognite a, b.

Allora $a = \dfrac{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}}$, $b = \dfrac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}}$.

$$A = B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b\mu_2}{|B|} & -\frac{b\lambda_2}{|B|} \\ -\frac{a\mu_1}{|B|} & \frac{a\lambda_1}{|B|} \end{pmatrix} = \frac{1}{|B|}\begin{pmatrix} b\mu_2 & -b\lambda_2 \\ -a\mu_1 & a\lambda_1 \end{pmatrix}.$$

$$|B| = ab\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}.$$

Perciò $y_0 = \dfrac{1}{ab\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}} (b\mu_2\lambda_4 - b\lambda_2\mu_4) =$

$$= \frac{1}{a\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \mu_2 & \mu_4 \\ \lambda_2 & \lambda_4 \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}.$$

sostituendo a e cambiando i segni.

Analogamente $y_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}}$.

Quindi $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \dfrac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix}}$.

In particolare se $P_1, \dots, P_4$ sono tutti punti propri con $[\lambda_i, \mu_i] = [1, z_i]$, $i = 1, \dots, 4$, si ha

$$\beta(P_1 \dots P_4) = \frac{(z_1 - z_4)}{(z_1 - z_3)} \frac{(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_4)}.$$

<u>Teorema</u> Date 2 quaterne ordinate $P_1, \dots, P_4$ e $Q_1, \dots, Q_4$ in pos. generale su $\mathbb{P}^1$, esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ t.c. $f(P_i) = Q_i$ $\forall i = 1, \dots, 4$ se e solo se $\beta(P_1, \dots, P_4) = \beta(Q_1, \dots Q_4)$.

<u>Dim.</u> $\exists!$ proiettività f t.c. $P_1 \to Q_1$, $P_2 \to Q_2$, $P_3 \to Q_3$. Poniamo $P_i = [v_i]$, $Q_i = [w_i]$ in modo che $v_3 = v_1 + v_2$ e $w_3 = w_1 + w_2$. Supp. che $\varphi : V \longrightarrow V$ sia l'isomorf. t.c. $\varphi(v_i) = w_i$, $i = 1, 2$. Si ha allora

$$v_4 = y_0 v_1 + y_1 v_2 \implies f(P_4) = [\varphi(y_0 v_1 + y_1 v_2)] =$$

$$= [y_0 \varphi(v_1) + y_1 \varphi(v_2)] = [y_0 w_1 + y_1 w_2] \text{ e}$$

perciò $f(P_4)$ ha coord. $[y_0, y_1]$ rispetto alla base (w_1, w_2), cioè $\beta(f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4)) = \beta(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

Allora $f(P_4) = Q_4 \iff Q_4$ ha coordinate $[y_0, y_1]$ nel rif. proiettivo associato a (w_1, w_2)

$$\iff \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \frac{y_1}{y_0} = \beta(P_1, P_2, P_3, P_4).$$

$\blacksquare$