

nell'emisfero nord) dall'accelerazione di Coriolis  $C$ . Sulla faccia superiore della colonna agisce la *forza meteorologica*

$$\mathbf{F} = \frac{\gamma}{h} \mathbf{W} \mathbf{W} - \frac{1}{\rho} \nabla p_0 \quad , \quad (5.24)$$

risultante dall'azione del vento nella (5.18) e dal gradiente della pressione atmosferica nella (5.15); sulla faccia inferiore agisce l'attrito di fondo  $-kU$ . Una forza  $-g \nabla \eta$  proporzionale a  $g$  ed alla pendenza della superficie marina rappresenta l'azione livellatrice della gravità.  $F_M$  è il valor medio sulla colonna della componente orizzontale della forza specifica di marea astronomica  $f_M$  (2.45).

Le (5.21, 5.22) sono note come equazioni “*delle onde lunghe*”, “*di marea*” o “*per l'acqua alta*” (*long wave, tidal, storm surge equations*); in particolare l'ultimo termine inglese denota l'innalzamento del livello (*surge*) causato dalle forze meteorologiche associate a situazioni isobariche più (*storm*) o meno intense.

Le *condizioni al contorno* impongono che la velocità sia nulla ( $U=0$ ) sui “confini rigidi”, cioè sulle coste e sul fondo del bacino (*no-slip conditions*); lungo l'eventuale confine aperto bisogna prescrivere  $\eta$ , od  $U$ , oppure una loro relazione. Per la soluzione  $\eta(x,y,t)$ ,  $U(x,y,t)$  del sistema devono essere inoltre assegnate le *condizioni iniziali*  $\eta(x,y,0)$  e  $U(x,y,0)$ .

Le equazioni di “*storm surge*” sono *lineari*, e ciò in virtù delle approssimazioni adottate. Linearità significa che, se alla forza  $F_n$  corrisponde la soluzione  $(\eta_n, U_n)$ , allora alla forza  $\Sigma a_n F_n$  corrisponde la soluzione  $(\Sigma a_n \eta_n, \Sigma a_n U_n)$ : l'effetto complessivo di una combinazione lineare di cause è la stessa combinazione lineare dei corrispondenti effetti.

## 5. Oscillazioni libere o sesse

Un fenomeno occasionale, consistente in un periodico innalzamento ed abbassamento del livello dell'acqua lungo le rive, era noto nel lago di Ginevra almeno dal XV secolo; chiamato “*seiche*” da de Duillier nel 1730, è stato ben descritto da François-Alphonse Forel, pioniere della limnologia, nel suo lavoro “*Le Léman*” del 1895. Le sesse in effetti si possono osservare in bacini d'acqua di ogni dimensione e nei mari; l'innescò è dato di solito dalle forze atmosferiche, ma può dipendere da perturbazioni di altro tipo (piene fluviali, terremoti, ecc.). Una caratteristica delle sesse è che si manifestano con periodi fissi, compresi tra secondi ed ore, che dipendono dalle dimensioni e dalla forma del bacino.

Matematicamente, le sesse sono le soluzioni delle equazioni delle onde lunghe *omogenee*, nelle quali cioè le forze esterne sono poste uguali a zero; ovvero le *oscillazioni libere* in vigore quando la causa che le aveva generate è cessata. La soluzione è facile da trovare nel caso di un bacino chiuso, non rotante ( $C=0$ ), del quale consideriamo il moto nella sola sezione longitudinale  $(x,z)$  di lunghezza  $A$  e di profondità  $h$  costante (fig. 5.4); le (5.22, 5.23) diventano:

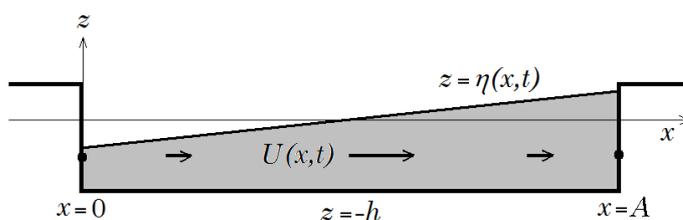


Fig. 5.4.- *Sesse longitudinali in un bacino chiuso.*

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -h \frac{\partial U}{\partial x} \quad , \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - kU + X \quad ; \quad (5.26)$$

le condizioni al contorno sono:

$$U(0,t) = U(A,t) = 0 \quad . \quad (5.27)$$

In *assenza di forze* ( $X=0$ ) la soluzione generale delle (5.25,

5.26) è data dalla combinazione lineare di onde stazionarie:

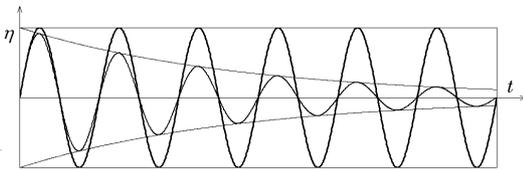
$$\eta_0 = \sum_{n=1}^N \eta_n, \quad U_0 = \sum_{n=1}^N U_n, \quad (5.28)$$

$$\eta_n(x,t) = \varepsilon_n \cos(\kappa_n x) \cos(\sigma_n t + \tau_n) e^{-kt/2}, \quad (5.29)$$

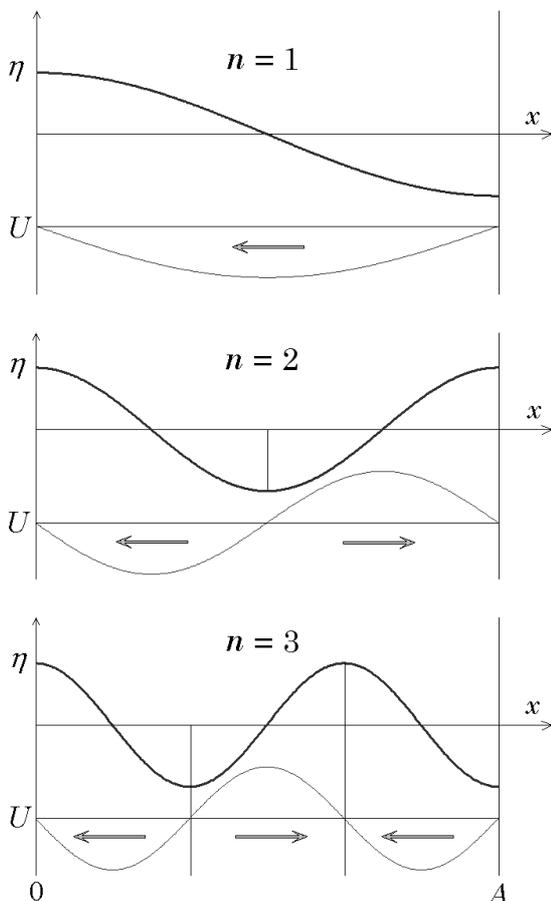
$$U_n(x,t) = \frac{c_0}{h} \varepsilon_n \sin(\kappa_n x) \sin(\sigma_n t + \tau_n + \delta_n) e^{-kt/2}; \quad (5.30)$$

le notazioni sono:

$\varepsilon_n$	ampiezza,
$c_0 = \sqrt{gh}$	velocità di fase dell'onda lunga,
$\kappa_n = n\pi / A$	numero d'onda,
$\sigma_n = \sqrt{c_0^2 \kappa_n^2 - (k/2)^2}$	frequenza angolare,
$L_n = 2\pi / \kappa_n = 2A / n$	lunghezza d'onda,
$T_n = 2\pi / \sigma_n$	periodo,
$\tau_n$	fase iniziale dell'onda $n$ ,
$\delta_n = \arctg(k/2\sigma_n)$	sfasamento. <span style="float: right;">(5.31)</span>



**Fig. 5.5.-** Evoluzione temporale del livello con e senza smorzamento.



**Fig. 5.6.-** Sezione longitudinale delle prime tre sesse.

La soluzione può essere verificata sostituendo le (5.29, 5.30) nelle (5.25, 5.26). Considerata la linearità delle equazioni, il moto più generale del bacino in esame, in assenza di forze, consiste quindi in una sovrapposizione di sesse di periodo  $T_n$  ( $n=1,2,3, \dots$ ) di diversa ampiezza e fase. La possibilità per la lunghezza d'onda e di conseguenza per il periodo di assumere solamente valori discreti è una conseguenza delle condizioni al contorno (5.26): queste sono soddisfatte per  $x=0$ , mentre all'estremità  $x=A$  del bacino deve essere  $\sin(\kappa_n A) = 0$  ossia  $\kappa_n A = n\pi$ . La lunghezza d'onda della *sesse fondamentale* ( $n=1$ ) è quindi pari al doppio della lunghezza del bacino. L'attrito di fondo ha un duplice effetto: (a) ridurre l'ampiezza della sesse esponenzialmente nel tempo con il coefficiente di smorzamento  $k/2$  (fig. 5.5), e (b) sfasare di  $\delta_n$  la velocità, in modo che il livello risulta un po' ritardato rispetto ad essa. Il numero  $N$  di sesse, infinito dal punto di vista matematico, è limitato in questo modello dalla necessità che l'onda rimanga lunga ( $2A/N \gg h$ ,  $N \ll 2A/h$ ); in natura l'ampiezza decresce rapidamente con  $n$ , in modo che sesse di ordine superiore a tre non sono in genere osservabili. Il profilo longitudinale del livello e della corrente orizzontale

assunto dalle prime tre sesse in un bacino chiuso è illustrato nella fig. 5.6. La velocità deve avere sempre un nodo agli estremi del bacino; in generale, la sessa di ordine  $n$  presenta  $n$  nodi di livello ed  $n$  ventri di velocità,  $n+1$  nodi di velocità ed  $n+1$  ventri di livello. Per quanto riguarda l'evoluzione temporale, allo spostamento massimo del livello corrisponde la minima corrente orizzontale (nulla se l'attrito è nullo), mentre la corrente è prossima ai suoi valori massimi quando la superficie è orizzontale; il trasporto orizzontale è sempre diretto concordemente all'aumento del livello.

Una superficie piana può essere ottenuta, per il teorema di Fourier, con un'opportuna combinazione di sesse: la conseguente oscillazione è paragonabile a quella di una tavola che altalena attorno ad un perno centrale.

E' interessante esaminare una caratteristica delle sesse nel caso di attrito nullo. Per  $k = 0$  la velocità angolare diventa  $\sigma_n = c_0 \kappa_n = n\pi \sqrt{gh}/A$  ed il periodo

$$T_n = \frac{1}{n} \frac{2A}{\sqrt{gh}} \quad (5.32)$$

La (5.32), nota come *formula di Merian*, stabilisce che il periodo dell'onda stazionaria fondamentale tra due sponde di un bacino è pari al tempo che impiega un'onda (lunga) progressiva, che viaggia con la velocità di fase  $c_0$ , a percorrere andata e ritorno la distanza tra di esse. In effetti la formula di Merian può essere ricavata direttamente, ricordando l'equivalenza tra onde progressive e stazionarie (4.10).

In un mare adiacente la condizione al contorno normalmente imposta è che il *livello sia nullo* lungo il confine *aperto* del bacino. La formula di Merian può essere ancora usata in questo caso, considerando il bacino aperto come la metà di un bacino chiuso, per cui il suo periodo fondamentale diventa  $T = 4A/c_0$ .

Le equazioni per le onde lunghe omogenee (forza esterna nulla) possono essere risolte per via analitica anche nel caso di bacini dalla forma più complessa: bacini unidimensionali con profondità variabile linearmente o a gradini; bacini bidimensionali rettangolari, circolari, ellittici con profondità costante oppure a conca sferica o parabolica. In tutti questi casi si trova che la soluzione rappresenta una sovrapposizione di onde stazionarie, date da funzioni sinusoidali o da altre funzioni periodiche (ad esempio di Bessel), e che i periodi sono sempre fissati dalla geometria. Nel caso di un bacino reale, di geometria complessa ed in rotazione, non è possibile trovare la soluzione per via analitica e bisogna fare ricorso a metodi di calcolo numerico. Comunque, per analogia con i casi conosciuti, si può dedurre che *sesse di periodo fisso esistono per ogni bacino reale*: cosa che è in accordo con l'esperienza. Inoltre, fissate due sponde opposte e la profondità media tra di esse, la formula di Merian (5.32) costituisce sempre un'ottima approssimazione per il calcolo del periodo di oscillazione.

## 6. Effetti di una forza esterna

Per studiare gli effetti di una forza esterna su di un bacino bisogna considerare le equazioni di "storm surge" (5.22, 5.23). L'effetto sarà indipendente dal "tipo" della forza orizzontale, sia essa dovuta al vento o alle differenze della pressione atmosferica sulla superficie (5.24), oppure all'azione lunisolare sull'intera colonna d'acqua.

La soluzione completa è del tipo:

$$\eta = \eta_0 + \eta_x \quad , \quad U = U_0 + U_x \quad , \quad (5.33)$$

consistente nella combinazione  $(\eta_0, U_0)$  delle sesse proprie del bacino più una

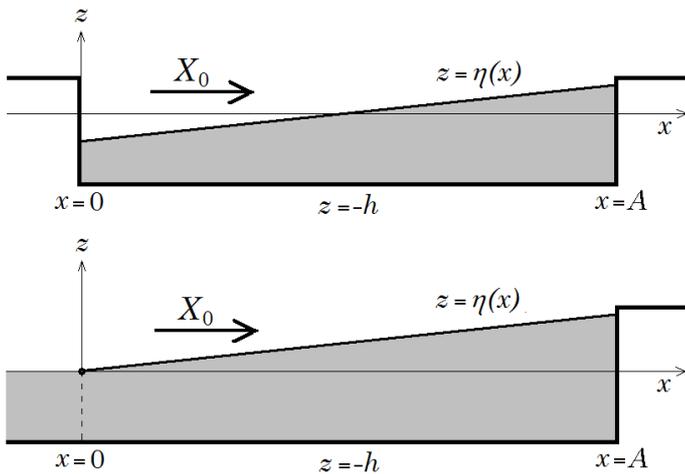


Fig. 5.7.- Ingorgo ("surge") in un bacino chiuso (sopra) e aperto (sotto).

$U(x) = \text{cost} = U(A) = 0$  deve essere uniforme, ed in particolare nulla per le condizioni al contorno. Dalla (5.35) segue dunque che, sotto l'azione di una forza costante  $X_0$ , la superficie del bacino assume, all'equilibrio, la forma di un piano inclinato con una pendenza uguale al rapporto tra la forza specifica e la gravità:

$$\eta(x) = \frac{1}{g} \int_0^x X_0 dx = \frac{X_0}{g} x + \eta(0) \quad (5.36)$$

Nel caso di un bacino chiuso (fig. 5.7) il valore di  $\eta(0)$  è definito dalla conservazione del volume, per cui al centro del bacino  $\eta(A/2) = 0$  e  $\eta(0) = -AX_0/2g$ . Nel caso di un bacino aperto si può definire  $\eta(0) = 0$ , nell'ipotesi che il bacino esterno abbia una "capacità infinita", ovvero che sia capace di scambiare acqua senza subire variazioni di livello.

Secondo la (5.24) l'azione della pressione atmosferica sul bacino è indipendente dalla profondità, mentre l'azione del vento è inversamente proporzionale ad essa. Per comprendere meglio gli effetti della batimetria, consideriamo un caso tipico: il fondale sale (per semplicità, linearmente) dalla profondità  $h_0$  del confine aperto ad un valore basso ( $h_A$ ) presso l'estremità chiusa

$$h(x) = h_0 - m x, \quad m = (h_0 - h_A)/A \quad (5.37)$$

ed il vento spirava con velocità costante  $W_0$  verso la costa (fig. 5.8),

$$X_0 = \frac{\gamma}{h} W_0^2 \quad (5.38)$$

Per la (5.36) avremo dunque

$$\eta(x) = \frac{\gamma}{mg} W_0^2 \ln \frac{h_0}{h(x)} \quad (5.39)$$

l'innalzamento  $\eta(A)$  presso la costa sottovento risulta amplificato in

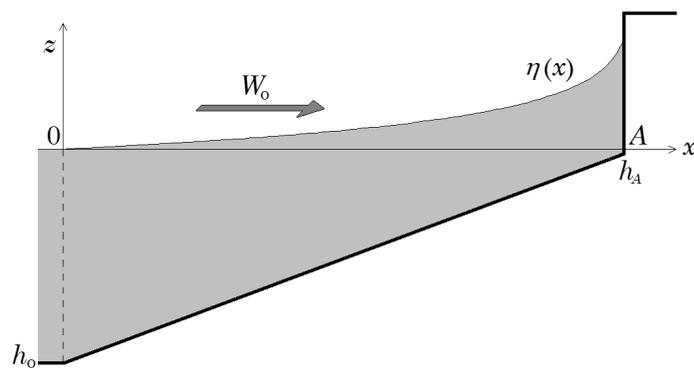


Fig. 5.8.- Accumulo prodotto da un vento costante in un bacino aperto con profondità decrescente.

funzione del rapporto  $h_0/h_A$ , ovvero lo stesso accumulo costiero è ottenuto con un minor apporto di acqua nel bacino. Questo "effetto amplificatore dell'acqua bassa" agisce anche dinamicamente nella propagazione delle onde lunghe, quali le sesse e le onde di marea.

Il caso stazionario rappresenta un limite teorico: in presenza di una forza costante, il bacino raggiunge l'equilibrio dopo un tempo infinito. Da un punto di vista pratico, tempo "infinito" vuol dire lungo abbastanza perchè l'ampiezza delle sesse si sia ridotta, per attrito, ad un valore trascurabile. Se la forza varia nel tempo, il bacino cerca continuamente di adeguarsi alla nuova condizione di equilibrio, alla quale si avvicina tanto più quanto la variazione, riferita al periodo fondamentale di oscillazione, è "lenta". Il passaggio da una condizione di equilibrio ad un'altra avviene attraverso una combinazione di sesse smorzate; l'ampiezza di queste è tanto maggiore quanto più è brusco il cambiamento della forza applicata sul bacino.

## 7. Esempi

Proviamo ad usare la formula di Merian per stimare i periodi di oscillazione di alcuni bacini (a,b,c).

**(a) Mare Adriatico.** Il periodo fondamentale è quello della prima sessa longitudinale: il bacino è aperto ad Otranto, sede di una linea nodale di livello. Approssimando la lunghezza con  $A=800$  km e la profondità media con  $h=200$  m, la velocità dell'onda lunga è  $c_0=44.3$  m/s e  $T = 4A/c_0 = 20.1$  h; le sesse successive hanno i periodi  $T/2=10.0$  h e  $T/3 = 6.7$  h. I corrispondenti periodi effettivamente osservati sono di 21.5, 11.0 e 7.1 h: L'approssimazione è buona, soprattutto considerando che la batimetria dell'Adriatico è estremamente differenziata. Supponendo che la sessa abbia un'ampiezza  $\varepsilon = 50$  cm, con la (5.30) possiamo calcolare per la velocità un'ampiezza pari a  $\varepsilon c_0/h = 11$  cm/s: questo valore rappresenta una stima dell'intensità massima della corrente.

**(b) Golfo di Trieste.** Il periodo di oscillazione trasversale (5.32;  $n=1$ ) del Golfo tra la costa SE (da Punta Salvore a Trieste) e la costa NW (da Grado a Monfalcone) distanti 22 km, con una profondità media di 17 m e  $c_0=12.9$  m/s è di 57 min, praticamente uguale a quello osservato.

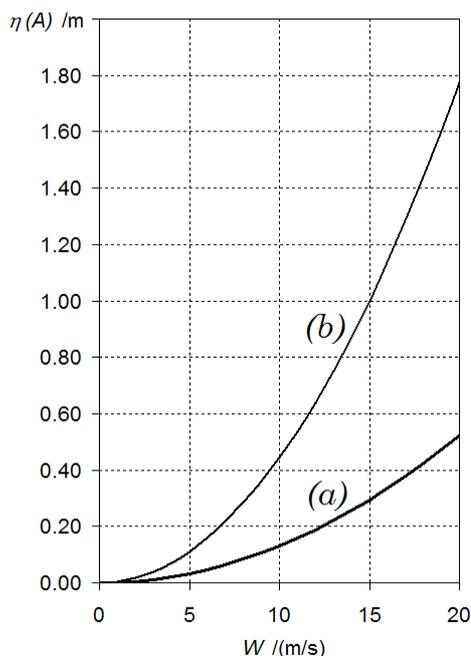
**(c) Oceano.** Ad una profondità di 5000 m corrisponde una velocità dell'onda lunga (per inciso, la velocità alla quale viaggiano gli "tsunami") di 220 m/s = 800 km/h; una eventuale sessa tra due sponde distanti 5000 km avrebbe un periodo di 12.5 h.

**Effetti del vento e della pressione atmosferica.** Calcoliamo ora l'accumulo  $\eta(A)$  prodotto nell'Adriatico settentrionale da un vento meridionale. Sia il bacino aperto in  $x = 0$ , con  $A=800$  km; consideriamo due modelli di profondità: (a) costante,  $h=200$  m e (b) linearmente variabile da  $h(0)=1000$  m a  $h(A)=20$  m. L'accumulo risulta proporzionale a  $W^2$  (5.36; 5.38, 5.39); il fondale decrescente produce effetti molto più vistosi (fig. 5.9).

La forza atmosferica (5.24) sul bacino è originata dalle perturbazioni in transito; sono evidenziati due termini, di intensità

$$F_w = \frac{\gamma}{h} W^2, \quad F_p = \frac{1}{\rho} |\nabla p_0|. \quad (5.40)$$

Normalmente la velocità del vento si calcola



**Fig. 5.9.-** Elevazione all'estremità chiusa in funzione della velocità del vento con profondità costante (a) e lineare (b).

con la formula geostrofica (3.8)  $W = \frac{1}{\rho_a f} |\nabla p_0|$ , in funzione del gradiente della pressione atmosferica, della densità dell'aria ( $\rho_a \approx 1.2 \text{ kg/m}^3$ ) e del parametro di Coriolis; con  $f(45^\circ) = 1.031 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  il rapporto

$$\frac{F_w}{F_p} = \frac{\gamma \rho}{h(\rho_a f)^2} |\nabla p_0| = \alpha \frac{|\nabla p_0|}{h}, \quad (5.41)$$

con  $\alpha = 2.14 \times 10^5 \text{ m}^3 \text{ s}^2 / \text{kg}$ , dipende dalla profondità del bacino, oltre che dall'intensità della perturbazione. Ad esempio se  $|\nabla p_0| = 2 \text{ hPa} / (100 \text{ km}) = 2 \times 10^{-3} \text{ Pa/m}$

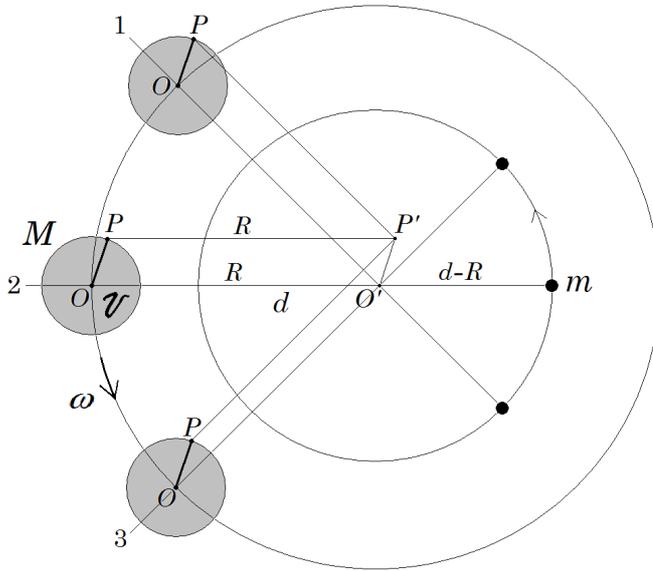
$$\frac{F_w}{F_p} = \frac{428 \text{ m}}{h}; \quad (5.42)$$

in questo caso la profondità di circa 400 m segna un limite: in acque più basse prevale l'effetto del vento, a profondità maggiori quello della pressione atmosferica.

## 6. LA MAREA ASTRONOMICA

### 1. La forza di marea

Durante la trasformazione dell'equazione di Newton da un sistema di riferimento inerziale ad uno terrestre, passando per successive rotazioni di periodo annuale, mensile e diurno, è stato individuato un campo di forza, detto marea lunisolare, definito come la somma del campo gravitazionale del Sole e della Luna con le forze centrifughe proprie dei corrispondenti moti orbitali (2.42, 2.43). Un corpo celeste è



**Fig. 6.1.-** Rivoluzione di due corpi celesti attorno al baricentro del sistema  $O'$ .

soggetto quindi ad una forza di marea causata da altri corpi presenti nello spazio; vediamo di dedurne le proprietà. Per semplificare il problema consideriamo due soli corpi celesti, di massa  $M$  (e baricentro  $O$ ) ed  $m$ , tali da costituire un sistema *legato*: sia cioè costante la distanza  $d$  tra i rispettivi baricentri. In un sistema di riferimento inerziale,  $d$  può rimanere invariata a condizione che la forza di attrazione gravitazionale

$$F_G = G \frac{mM}{d^2} \quad (6.1)$$

sia bilanciata, nel centro di massa di ciascun corpo, da una

$$MR = m(d-R) \quad , \quad (6.2)$$

dove  $R = \overline{OO'}$ , e la velocità angolare  $\omega$  è tale da sviluppare una forza centrifuga

$$F_C = M \omega^2 R = m \omega^2 (d-R) = F_G \quad . \quad (6.3)$$

Ai fini della dinamica celeste il corpo di volume  $\mathcal{V}$  e di massa  $M$  si comporta come se questa fosse tutta concentrata nel suo baricentro, dove vale l'equilibrio (6.3); nei punti di  $\mathcal{V}$  diversi da  $O$  la somma  $F_M$  della forza gravitazionale  $F_G$  e di quella centrifuga  $F_C$  risulta però non nulla, e viene chiamata *forza di marea astronomica*.

Il volume  $\mathcal{V}$  mantiene inalterato il suo orientamento nello spazio inerziale, vale a dire che ogni vettore da  $O$  ad un generico punto  $P$  si mantiene parallelo nel corso della rotazione del sistema, che per tale motivo è detta *rivoluzione* (fig. 6.1). L'eventuale rotazione del corpo immerso nello spazio  $\mathcal{V}$  attorno ad un suo proprio asse comunque orientato non è rilevante ai fini di questo modello.

Nel moto di rivoluzione ogni punto  $P$  ha un *suo proprio centro di rotazione*  $P'$ , tale che  $OO'P'$  è un parallelogramma, e quindi ha un raggio di rotazione  $R$  parallelo ed uguale a quello del baricentro  $O$ . Il campo della forza centrifuga specifica è quindi rappresentato da un vettore costante (fig. 6.2) di modulo (6.3, 6.1):

$$f_c = \omega^2 R = Gm/d^2 \quad . \quad (6.4)$$

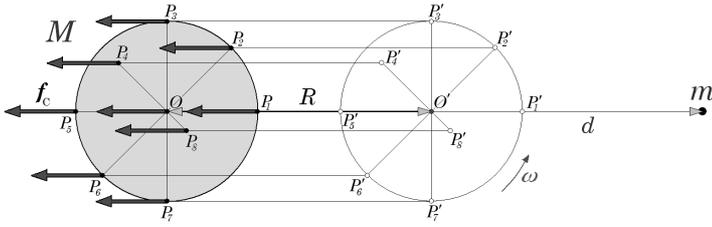


Fig. 6.2.- Il campo della forza centrifuga del moto di rivoluzione è costante.

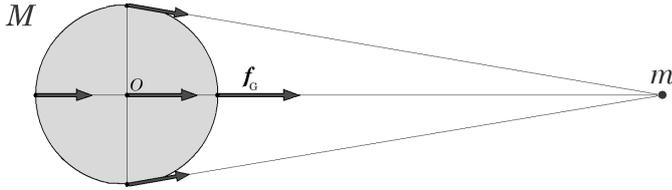


Fig. 6.3.- Il campo della forza gravitazionale dipende dalla posizione.

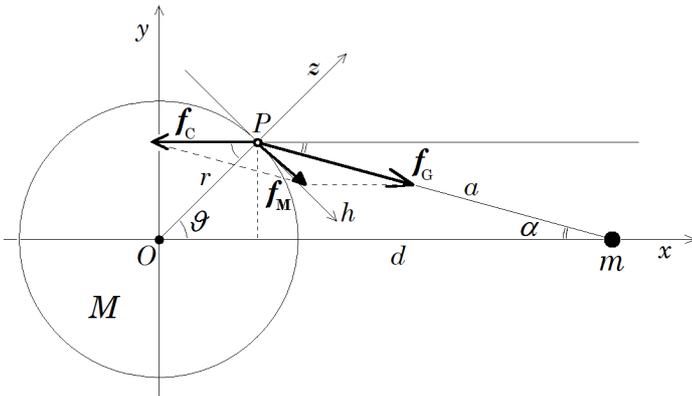


Fig. 6.4.- Sistema di riferimento  $(O,x,y)$  sul piano della rivoluzione per il calcolo della forza di marea.

Il campo della forza gravitazionale specifica è invece funzione del punto  $P$  : è sempre diretto verso l'astro di massa  $m$ , dal quale dista  $a$ , ed il suo modulo  $f_G = Gm/a^2$  (fig. 6.3).

Il compito a questo punto è di calcolare il campo vettoriale della forza di marea specifica

$$f_M = f_c + f_G \quad (6.5)$$

nello spazio  $\mathcal{V}$  in funzione delle caratteristiche (massa e posizione relativa) del secondo astro. E' conveniente adottare un sistema di coordinate con origine nel centro di massa  $O$ , l'asse  $x$  che punta verso l'astro  $m$  e l'asse  $y$  sul piano della rivoluzione (fig. 6.4). Nel punto  $P = (x,y) = (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$  la posizione di  $m$  è individuata dalla distanza  $d$  e dall'angolo zenitale baricentrico  $\vartheta$ ; è quindi opportuno esprimere la forza di marea come  $f_M(d, \vartheta)$ . Scrivendo pertanto i vettori per componenti, abbiamo:

$$f_c = \left\{ -\frac{Gm}{d^2}, 0 \right\},$$

$$f_g = \left\{ \frac{Gm}{a^2} \cos \alpha, -\frac{Gm}{a^2} \sin \alpha \right\},$$

$$f_M = Gm \left\{ \frac{\cos \alpha}{a^2} - \frac{1}{d^2}, -\frac{\sin \alpha}{a^2} \right\}. \quad (6.6)$$

Il raggio  $r$  è molto minore di  $d$ , per cui l'angolo di parallasse  $\alpha \cong 0$  e possiamo approssimare  $\cos \alpha \cong 1$ ; inoltre  $\sin \alpha = y/a$ . Per il teorema di Euclide

$$a^2 = d^2 + r^2 - 2dx = d^2 (1 - 2x/d + (r/d)^2) \cong d^2 (1 - 2x/d), \quad (6.7)$$

$$a^{-2} \cong d^{-2} (1 - 2x/d)^{-1} \cong d^{-2} (1 + 2x/d),$$

$$a^{-2} - d^{-2} = 2x/d^3. \quad (6.8)$$

La forza di marea (6.6), usando la (6.8) e ponendo  $a = d$  nella componente  $y$  diventa:

$$f_M \cong Gm \left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{d^2}, -\frac{y}{d^3} \right\} \cong Gm \left\{ \frac{2x}{d^3}, -\frac{y}{d^3} \right\} = \{2C \cos \vartheta, -C \sin \vartheta\}, \quad (6.9)$$

dove si è posto

$$C = G r \frac{m}{d^3}. \quad (6.10)$$

La forza di marea  $f_M(r, \vartheta; m, d)$  dipende quindi dalla *posizione* del punto  $P(r, \vartheta)$  nel volume  $\mathcal{V}$  relativa alla direzione dell'astro (ovvero dalla sua altezza  $z$  sul piano di riferimento  $r_0$ ,  $r = r_0 + z$ , e dall'angolo zenitale  $\vartheta$ ) e dalle caratteristiche (massa e distanza) dell'astro stesso. Per  $r = 0$ , si ha che  $C = 0$ : la forza di marea è nulla nel centro di massa  $O$ , come richiesto dall'ipotesi di partenza. Da notare che  $f_M \sim m/d^3$ ,

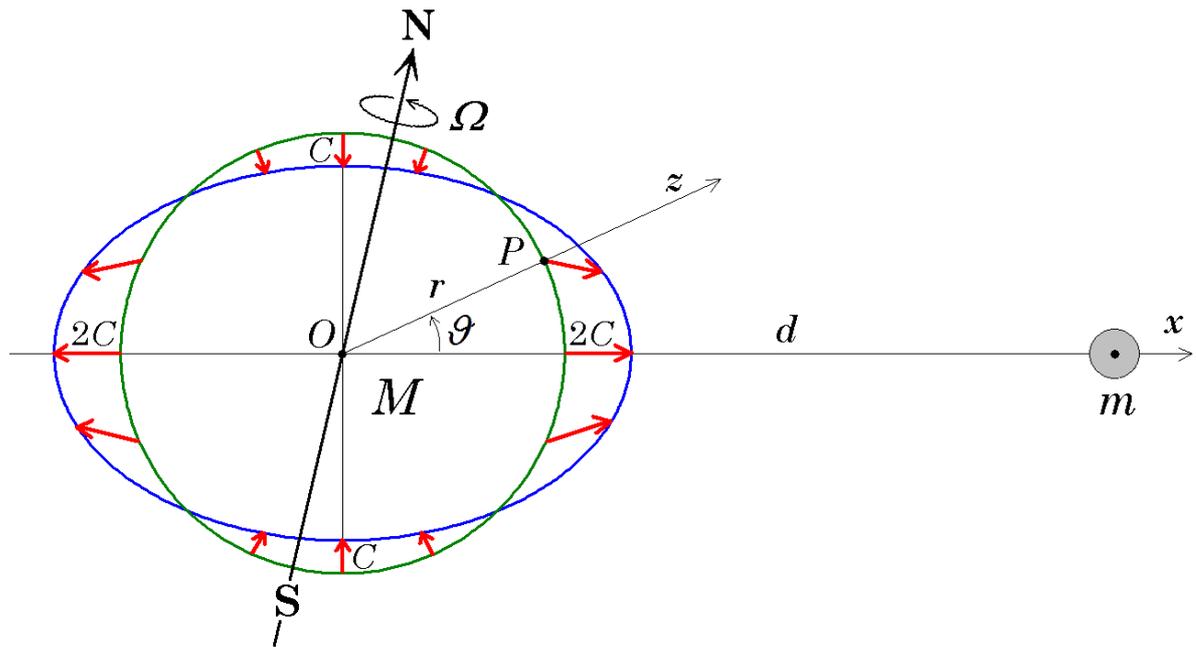


Fig. 6.5.- Deformazione di una sfera omogenea in un ellissoide di rotazione attorno all'asse  $x$  per azione del campo di forza della marea astronomica (sezione sul piano meridiano di  $M$ ).

ovvero decresce molto più rapidamente con la distanza rispetto all'attrazione gravitazionale  $f_G \sim m/d^2$ . La costante di gravitazione universale è

$$G = (6.67259 \pm 0.00085) \times 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2} \quad (6.11)$$

		$m$ /kg	$d$ /m	$C/C_L$
	<b>Terra</b>	$5.9742 \times 10^{24}$		
1	Luna	$7.3477 \times 10^{22}$	$3.844 \times 10^8$	1
2	Sole	$1.9891 \times 10^{30}$	$1.496 \times 10^{11}$	$4.59 \times 10^{-1}$
3	Venere	$4.8685 \times 10^{24}$	$4.139 \times 10^{10}$	$5.31 \times 10^{-5}$
4	Giove	$1.8990 \times 10^{27}$	$6.288 \times 10^{11}$	$5.90 \times 10^{-6}$
5	Marte	$6.4185 \times 10^{23}$	$7.834 \times 10^{10}$	$1.03 \times 10^{-6}$
6	Mercurio	$3.3020 \times 10^{23}$	$9.169 \times 10^{10}$	$3.31 \times 10^{-7}$
7	Saturno	$5.6846 \times 10^{26}$	$1.277 \times 10^{12}$	$2.11 \times 10^{-7}$
8	Urano	$8.6832 \times 10^{25}$	$2.721 \times 10^{12}$	$3.33 \times 10^{-9}$
9	Nettuno	$1.0243 \times 10^{26}$	$4.349 \times 10^{12}$	$9.63 \times 10^{-10}$

Tab. 6.1.- Forze di marea sulla Terra ( $C_L = 5.50 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2$ ).

		$d$ /( $10^9$ m)	$f_M$ /( $\text{m/s}^2$ )	periodo /a
1	Giove	778	$1.8698 \times 10^{-10}$	11.86
2	Venere	108	$1.7845 \times 10^{-10}$	0.62
3	Terra	150	$8.2872 \times 10^{-11}$	1.00
4	Mercurio	58	$7.8966 \times 10^{-11}$	0.24
5	Saturno	1427	$9.0904 \times 10^{-12}$	29.45
6	Marte	228	$2.5171 \times 10^{-12}$	1.88
7	Luna	150	$1.0192 \times 10^{-12}$	1.00
8	Urano	2871	$1.7041 \times 10^{-13}$	84.07
9	Nettuno	4498	$5.2264 \times 10^{-14}$	164.88

Tab. 6.2.- Forze di marea sul Sole.

Le componenti della forza di marea (6.9) sul piano  $(O, x, y)$  soddisfano all'equazione di un'ellisse di semiassi  $2C, C$ :

$$\frac{f_{Mx}^2}{4C^2} + \frac{f_{My}^2}{C^2} = 1 \quad (6.12)$$

Il campo tridimensionale della forza specifica di marea si ottiene ruotando l'ellisse di forza (6.12) attorno all'asse  $x$  congiungente i due astri. Il vettore  $f_M$  (6.9) forma con  $x$  un angolo  $\varphi$  tale che

$$\tan \varphi = \frac{f_{My}}{f_{Mx}} = -\frac{1}{2} \tan \vartheta \quad (6.13)$$

La forza di marea deformerebbe un corpo celeste sferico elastico ed omogeneo in un ellissoide di rotazione con l'asse maggiore diretto verso l'astro  $m$  (fig. 6.5). Il campo è simmetrico rispetto al piano per  $O$  normale ad  $x$ : vale a dire che l'effetto su  $M$  è il medesimo sia che  $m$  abbia ascissa  $d$  oppure  $-d$ .