CAMBIAMENTO DI VARIABILI PER L'INTEGRALE DI RIEMANN

DEFINIZIONE

Siano $\Omega, \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti

$T:\Omega \to \Omega_1$ si dice un C^1-diffeomorfismo se

- T è biettiva (in particolare $T(\Omega) = \Omega_1$)
- T è di classe C^1
- $T^{-1}:\Omega_1 \to \Omega$ è di classe C^1

OSSERVAZIONE

1) $\forall p \in \Omega \quad \det JT(p) \neq 0$

Infatti $Id = T^{-1} \circ T : \Omega \to \Omega$ e $Id = T \circ T^{-1} : \Omega_1 \to \Omega_1$

quindi

$$I_n = JT^{-1}(T(p)) \cdot JT(p)$$

e, visto che $p = T^{-1}(T(p))$,

$$I_n = JT(p) \cdot JT^{-1}(T(p))$$

da cui $(JT(p))^{-1} = JT^{-1}(T(p))$

2) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

Sia $T:\Omega \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1, iniettiva

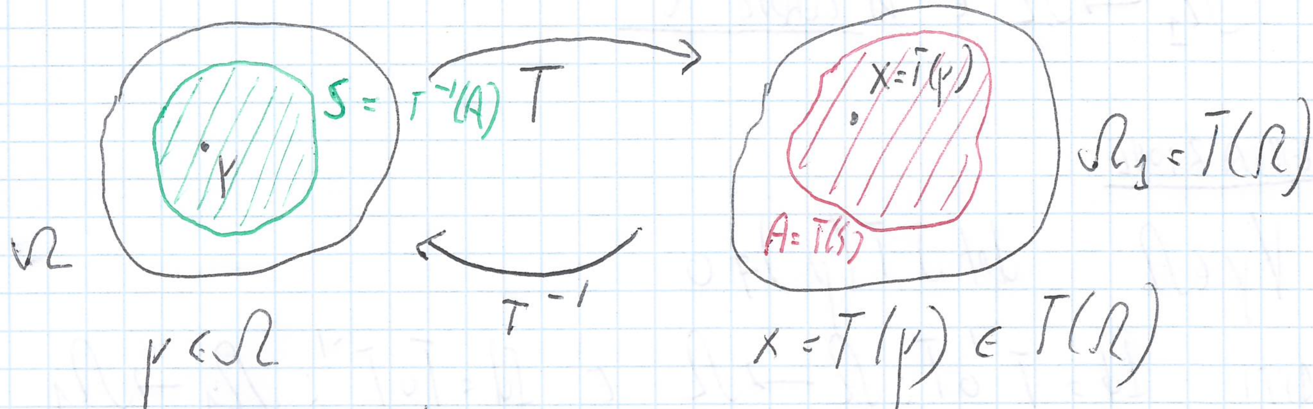
Se $\forall p \in \Omega$, $\det JT(p) \neq 0$, allora $T(\Omega)$ è aperto e $T: \Omega \to T(\Omega)$ è un C^1-diffeomorfismo

(conseguenza del teorema di inversione locale)

—— x ——

Studiamo il comportamento dell'integrale rispetto ai cambiamenti di variabile (C^1-diffeomorfismi) in $\mathbb{R}^n$

(generalizzazione dell'integrale per sostituzione)



Siano $\Omega, \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti e

$T: \Omega \to \Omega_1$ C^1-diffeomorfismo

Sia $A \subseteq \Omega_1 = T(\Omega)$ misurabile e tale che

$\bar{A}$ compatto e $\bar{A} \subseteq \Omega_1$.

Sia $f \in C(\bar{A})$. Vogliamo calcolare

$$\int_A f(x)\, dx = \int_{S = T^{-1}(A)} f(T(p)) \underbrace{??}_{\text{elemento di misura}} dp$$

COME SI TRASFORMA L'ELEMENTO DI MISURA (D'AREA IN $\mathbb{R}^2$ O DI VOLUME IN $\mathbb{R}^3$) ATTRAVERSO IL CAMBIAMENTO DI VARIABILI? ㉙

OSSERVAZIONE $T: \Omega \to \Omega_1$ C^1-DIFFEOMORFISMO

- $C \subseteq \Omega$ COMPATTO $\Longleftrightarrow$ $T(C) \subseteq \Omega_1$ COMPATTO
- SIA $S \subseteq \Omega$ TALE CHE $\bar{S} \subseteq \Omega$ COMPATTO.

  ALLORA $\overline{T(S)} = T(\bar{S}) \subseteq \Omega_1$ COMPATTO
- ANALOGAMENTE, SIA $A \subseteq \Omega_1$ TALE CHE $\bar{A} \subseteq \Omega_1$ COMPATTO

  ALLORA $\overline{T^{-1}(A)} = T^{-1}(\bar{A}) \subseteq \Omega$ COMPATTO

TEOREMA (CAMBIAMENTO DI VARIABILI)

SIA $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ APERTO

SIA $T: \Omega \to T(\Omega)$ BIIETTIVA E TALE CHE

$T \in C^1(\Omega)$ E $\det JT(p) \neq 0$ $\forall p \in \Omega$

ALLORA VALGONO LE SEGUENTI AFFERMAZIONI

a) SIA $S \subseteq \Omega$ TALE CHE $\bar{S} \subseteq \Omega$ COMPATTO. ALLORA

S È MISURABILE SE E SOLO SE $T(S)$ È MISURABILE

b) SIA $A \subseteq T(\Omega) = \Omega_1$ TALE CHE $\bar{A} \subseteq \Omega_1$ COMPATTO

SE A È MISURABILE E $f \in C(\bar{A})$ VALE LA

FORMULA DEL CAMBIAMENTO DI VARIABILI

$$(*) \quad \int_A f(x)\,dx = \int_{T^{-1}(A)} f(T(p))\,|\det JT(p)|\,dp$$

DOVE $JT(p)$ È LA MATRICE JACOBIANA DI T NEL PUNTO $p \in \Omega$

OSSERVAZIONI

1) SE Ω E $T(\Omega)$ SONO MISURABILI (E QUINDI LIMITATI) E LE DERIVATE PARZIALI DI T SONO LIMITATE IN Ω (OLTRE A ESSERE CONTINUE PER L'IPOTESI $T \in C^1(\Omega)$), ALLORA SI HA:

a1) SIA $S \subseteq \Omega$. ALLORA

S È MISURABILE SE E SOLO SE $T(S)$ È MISURABILE

b1) SIA $A \subseteq T(\Omega) = \Omega_1$ MISURABILE E $f \in C(A)$ CON f LIMITATA SU A. ALLORA VALE LA FORMULA DEL CAMBIAMENTO DI VARIABILI $(*)$

2) IL TEOREMA CONTINUA A VALERE ANCHE NEL CASO IN CUI LA BIUNIVOCITÀ DI T E L'IPOTESI CHE $\det JT(p) \neq 0$ VALGANO IN Ω ECCETTO UN INSIEME DI MISURA NULLA

3) $|\det JT(p)|$ RAPPRESENTA IL FATTORE LOCALE DI INGRANDIMENTO

PER LA MISURA N-DIMENSIONALE

SIA $y_0 \in \Omega$ E $r > 0$ TALE CHE $B_r = B_r(y_0) \subseteq \overline{B_r(y_0)} \subseteq \Omega$

ALLORA

$$\frac{|T(B_r)|}{|B_r|} = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |\det JT(y)| \, dy \xrightarrow{r \to 0^+} |\det JT(y_0)|$$

PER LA CONTINUITÀ DELLE DERIVATE PARZIALI DI T. QUINDI

$|\det JT(y_0)|$ È IL TASSO (PUNTUALE) DI VARIAZIONE RELATIVA

ALLA MISURA N-DIMENSIONALE

INFATTI $y \to |\det JT(y)|$ È CONTINUA SU Ω QUINDI $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0$ TALE CHE $\forall y \in \Omega \cap B_\delta(y_0)$ SI HA

$|\det JT(y_0)| - \varepsilon \leq |\det JT(y)| \leq |\det JT(y_0)| + \varepsilon$

QUINDI, PER IL TEOREMA DELLA MEDIA, $\forall\, 0 < r \leq \delta$ SI HA

$$|\det JT(y_0)| - \varepsilon \leq \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |\det JT(y)| \, dy \leq |\det JT(y_0)| + \varepsilon$$

IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI CAMBIAMENTO DI VARIABILI

CI LIMITIAMO AL CASO $n = 2$

Siano $\Omega_1, \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ aperti

$T: \Omega \to \Omega_1$ C^1-diffeomorfismo

$(u,v) \in \Omega$; $(x,y) = T(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v)) \in \Omega_1$

$\forall (u,v) \in \Omega$ $J(u,v) = JT(u,v)$

$$\det J(u,v) = \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}(u,v) = \varphi_u(u,v)\psi_v(u,v) - \varphi_v(u,v)\psi_u(u,v)$$

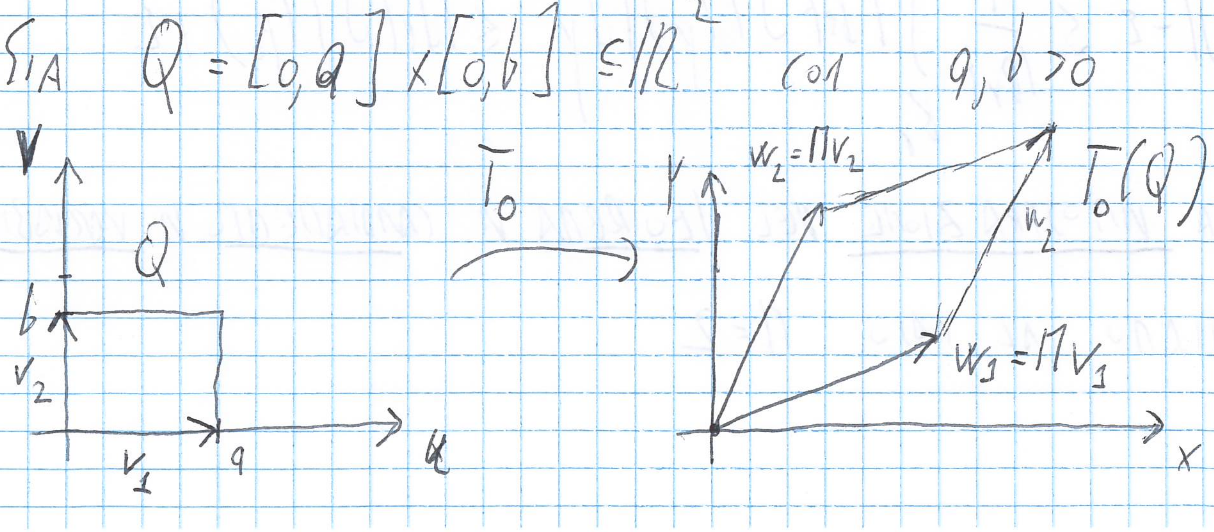
La formula del cambiamento di variabili è

$$\iint_{A \subseteq \Omega_1} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{T^{-1}(A) \subseteq \Omega} f(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \left|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right|(u,v)\,du\,dv$$

Supponiamo che $T_0: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare invertibile, cioè $\exists M \in M^{2\times 2}(\mathbb{R})$ invertibile tale che

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T_0(u,v) = M \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \qquad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

Sia $Q = [0,a] \times [0,b] \subseteq \mathbb{R}^2$ con $a, b > 0$



Siano $v_1 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$ e $w_1 = M v_1$, $w_2 = M v_2$

Allora $T_0(Q)$ è il parallelogramma individuato dai vettori w_1 e w_2. Inoltre si ha

$$\text{area } T_0(Q) = |\det M| \text{ area } Q$$

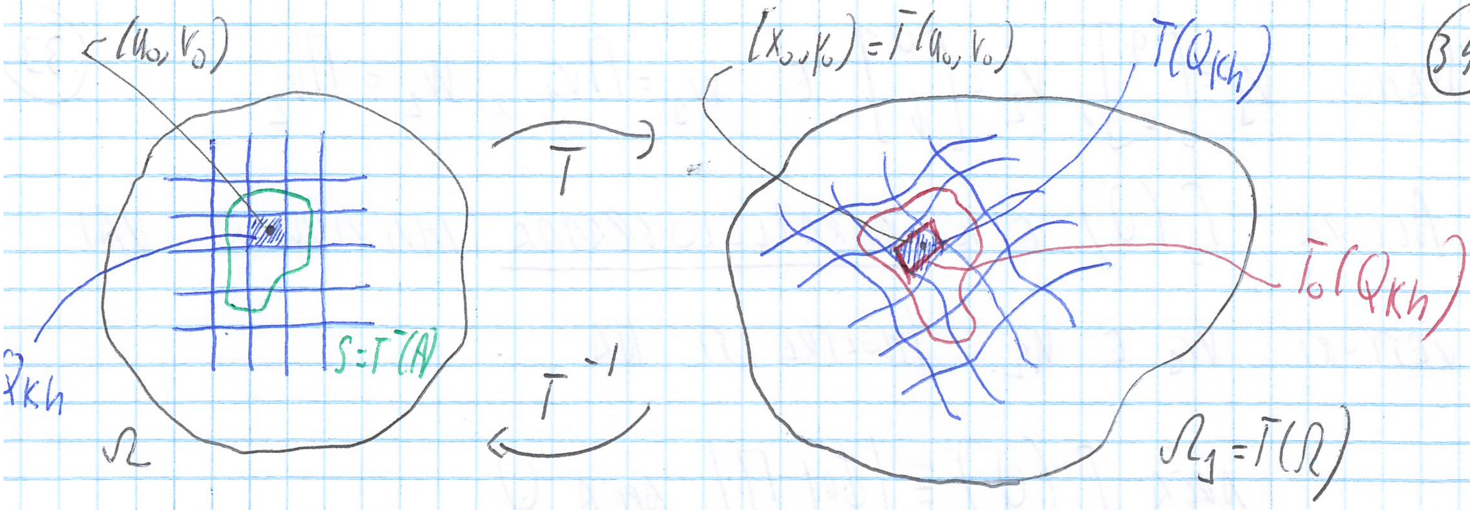
Ovviamente la stessa proprietà si ha se T_0 è affine invertibile, cioè $\exists M \in M^{2\times 2}(\mathbb{R})$ invertibile e $\exists \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T_0(u,v) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

Per semplicità consideriamo la formula del cambiamento di variabili per l'area. Sia $A = T(\Omega) = \Omega_1$ tale che $\bar{A} \subseteq \Omega_1$ compatto e A è misurabile. Allora

$$\text{area } A = \iint_A 1 \, dx \, dy = \iint_{T^{-1}(A)} 1 \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u,v)} \right| (u,v) \, du \, dv$$

L'idea è la seguente: sia $(u_0, v_0) \in T^{-1}(A)$ e sia $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0) \in A$



Localmente, in un intorno di (u_0,v_0), approssimiamo T con T_0, l'approssimante lineare di T in (u_0,v_0)

$$T(u,v) \approx T_0(u,v) = T(u_0,v_0) + JT(u_0,v_0)\cdot\begin{bmatrix} u-u_0 \\ v-v_0 \end{bmatrix}$$

per (u,v) in un intorno di (u_0,v_0)

$$\text{area } T(Q_{kh}) \approx \text{area } T_0(Q_{kh}) = \underbrace{|\det JT(u_0,v_0)|}_{\left|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right|(u_0,v_0)} \text{area } Q_{kh}$$

Esercizi ed esempi

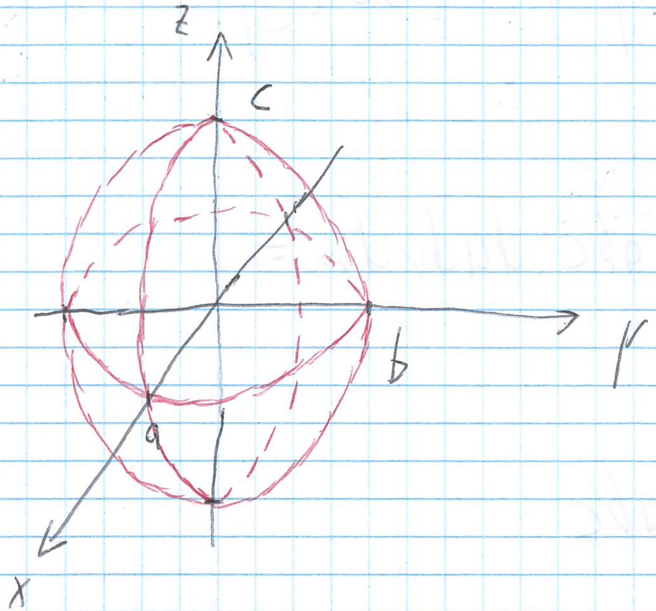
1) Siano $a,b,c>0$

Calcolare il volume dell'ellissoide

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1\right\}$$

SVOLGIMENTO

OSSERVIAMO CHE SE $a \neq b \neq c$ NON È UN SOLIDO DI ROTAZIONE



CONSIDERIAMO IL CAMBIO DI VARIABILI. SIANO (u, v, w) TALI CHE

$$u = \frac{x}{a}, \quad v = \frac{y}{b}; \quad w = \frac{z}{c}$$

NELLE NUOVE VARIABILI E È UNA PALLA DI RAGGIO 1!

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/a \\ y/b \\ z/c \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}(E) = \left\{ (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : \ u^2 + v^2 + w^2 \leq 1 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au \\ bv \\ cw \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

T È UN'APPLICAZIONE LINEARE INVERTIBILE, QUINDI È UN

C^1-DIFFEOMORFISMO DA $\mathbb{R}^3$ A $\mathbb{R}^3$

$$\left|\frac{\partial T}{\partial(u,v,w)}(u,v,w)\right| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}(u,v,w)\right| = \left|\det\begin{bmatrix} a&0&0\\ 0&b&0\\ 0&0&c\end{bmatrix}\right| = abc$$

QUINDI

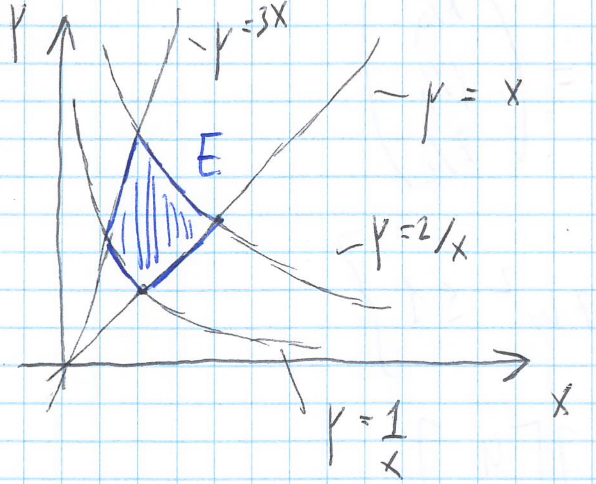
$$\text{volume } E = \iiint_E 1 \, dx\,dy\,dz = \iiint_{T^{-1}(E)} 1 \cdot abc \, du\,dv\,dw =$$

$$= abc \text{ volume } T^{-1}(E) = \frac{4}{3}\pi abc$$

2) CALCOLARE L'AREA DELL'INSIEME E DATO DA

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 3x, \ 1 < xy < 2\}$$

SVOLGIMENTO



$$\begin{cases} u = xy \\ v = y/x \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ y/x \end{pmatrix} \qquad x, y > 0$$

$$T^{-1}(E) = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : \ 1<u<2, \ \ 1<v<3\} = \underset{u}{[1,2]}\times\underset{v}{[1,3]}$$

$$u,v>0 \quad \begin{cases} xy = u \\ \frac{y}{x} = v \end{cases} \quad \begin{cases} xy = u \\ y = vx \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = \frac{u}{v} \\ y = vx \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{u}{v}} \\ y = \pm\sqrt{uv} \end{cases}$$

CONSIDERIAMO SOLO LE SOLUZIONI POSITIVE E VERIFICHIAMO

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{u}{v}} \\ \sqrt{uv} \end{pmatrix}, \quad u,v>0$$

SIA $\Omega = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2, \ \ u,v>0\}$. ALLORA

$T: \Omega \to \Omega$ È UNA BIIEZIONE

T È UN $\underline{C^1\text{-DIFFEOMORFISMO}}$? T È $\underline{\text{CHIARAMENTE}}$ C^1 SU Ω

SIA $(u,v)\in\Omega$

$$\frac{\partial T}{\partial(u,v)}(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{u}}{(\sqrt{v})^3} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{bmatrix}$$

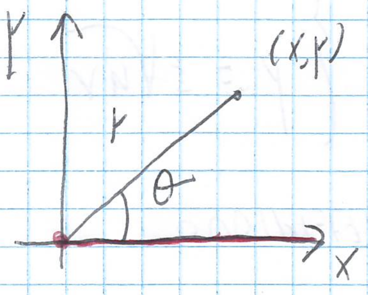
$$\left|\frac{\partial T}{\partial(u,v)}(u,v)\right| = \frac{1}{4}\,\frac{1}{v} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{v} = \frac{1}{2v} > 0 \quad \text{SU} \quad \Omega$$

QUINDI T È UN C^1-DIFFEOMORFISMO SU Ω!

$$\text{AREA } E = \iint_E 1\,dx\,dy = \iint_{T^{-1}(E)} 1 \ \frac{1}{2v}\,du\,dv = \int_1^2 du \int_1^3 dv \left(\frac{1}{2v}\right) = \frac{\log 3}{2}$$

COORDINATE POLARI, CILINDRICHE E SFERICHE

1) COORDINATE POLARI



$$\Omega = \underset{r}{[0, +\infty)} \times \underset{\theta}{[0, 2\pi)} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2 \qquad \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \quad \forall (r,\theta) \in \Omega$$

$$\begin{cases} x = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

SEMIRETTA !

$$\varphi(\Omega) = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0,\ x \geq 0\};$$

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial(r,\theta)}(r,\theta)\right| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}(r,\theta)\right| = r \qquad \forall (r,\theta) \in \Omega$$

φ è un C^1-DIFFEOMORFISMO TRA Ω E $\varphi(\Omega)$

Siano $(x,y) \in \varphi(\Omega)$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} & \text{DISTANZA DALL'ORIGINE} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad x,y > 0 & \text{ANGOLO CON L'ASSE X POSITIVO} \end{cases}$$

Sia $A \subseteq \varphi(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^2$ MISURABILE

SIA $f \in C(A)$, f LIMITATA. ALLORA

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\varphi^{-1}(A)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

OGNI SOTTOINSIEME LIMITATO DI $\mathbb{R}^2 \setminus \varphi(\Omega)$ HA MISURA NULLA!

ESEMPI

1) SIA $s>0$; $B_s(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < s^2\}$

AREA $B_s(0) = |B_s(0)| = |B_s(0) \cap \varphi(\Omega)| + |B_s(0) \setminus \varphi(\Omega)| =$

$= |B_s(0) \cap \varphi(\Omega)|$

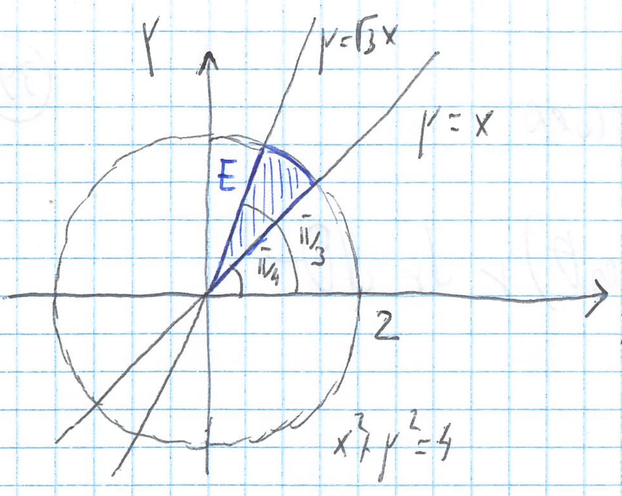
$$\varphi^{-1}(B_s(0) \cap \varphi(\Omega)) = \{(r,\theta) \in \Omega : 0<r<s,\ 0<\theta<2\pi\} = \underset{r}{(0,s)} \times \underset{\theta}{(0,2\pi)}$$

$$|B_s(0)| = \iint_{B_s(0)\cap\varphi(\Omega)} 1\,dx\,dy = \int_0^s dr \int_0^{2\pi} d\theta\, r = 2\pi \cdot \frac{s^2}{2} = \pi s^2$$

2) SIA $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < \sqrt{3}\,x,\ x^2+y^2 < 4\}$

CALCOLARE L'AREA DI E E $\iint_E xy\,dx\,dy$

SVOLGIMENTO



$E \subseteq \varphi(R)$

$$\varphi^{-1}(E) = \{(r,\theta) \in \Omega : \ 0<r<2, \ \pi/4 < \theta < \pi/3\}$$

$$\text{AREA } E = \iint_E 1 \, dx\,dy \int_0^2 dr \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \, r = \frac{1}{2} 2^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\iint_E xy \, dx\,dy = \int_0^2 dr \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \ r\cos\theta \ r \operatorname{sen}\theta \ r =$$

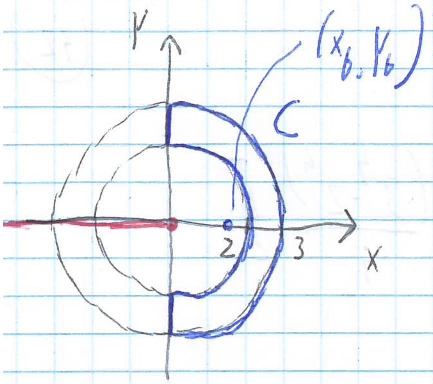
$$= \left(\int_0^2 r^3 \, dr\right)\left(\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta\right) = \dots$$

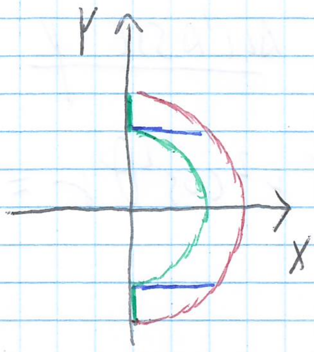
3) SIA DATO UN CORPO OMOGENEO, CON DENSITÀ DI MASSA PARI A 1, CHE OCCUPA LA REGIONE

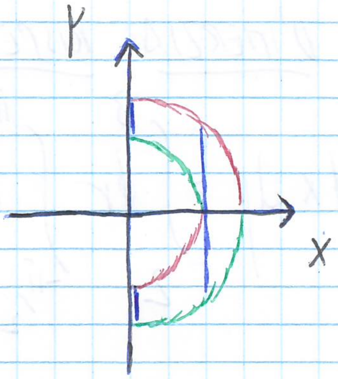
$$C = \{(x,y) : \ 4 \leq x^2+y^2 \leq 9, \ x \geq 0\}$$

CALCOLARE IL BARICENTRO DI C E IL SUO MOMENTO D'INERZIA RISPETTO ALL'ASSE X E RISPETTO ALL'ASSE Y

SVOLGIMENTO







IN COORDINATE POLARI C SI PUÒ DESCRIVERE

$$\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 2 \le r \le 3,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\text{AREA } C = \iint_C 1 \, dx\,dy = \int_2^3 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \, r = \pi\left(\frac{9-4}{2}\right) = \frac{5}{2}\pi$$

BARICENTRO (x_b, y_b)

$$x_b = \frac{1}{\frac{5}{2}\pi}\iint_C x \, dx\,dy = \frac{1}{\frac{5}{2}\pi}\int_2^3 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \, r\cos\theta \, r =$$

$$= \frac{1}{\frac{5}{2}\pi}\,\frac{(27-8)}{3}\left[\sin\theta\right]_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2} = \frac{4\cdot 19}{15\pi} = \frac{76}{15\pi} < 2!$$

$$y_b = \frac{1}{\frac{5}{2}\pi}\iint_C y \, dx\,dy = \frac{1}{\frac{5}{2}\pi}\int_2^3 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \, r\sin\theta \, r = 0$$ (PER SIMMETRIA!)

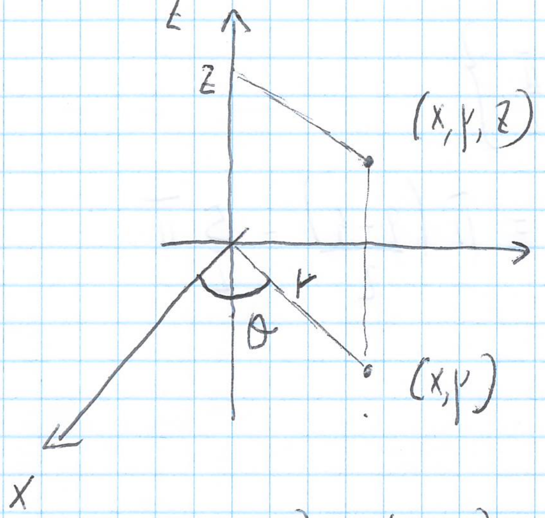
I_x MOMENTO D'INERZIA RISPETTO ALL'ASSE X

$$I_x = \iint_C y^2 \, dx\,dy = \int_2^3 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \, r^2 \sin^2\theta \, r = \frac{(3^4-2^4)}{4}\,\frac{\pi}{2}$$

I_y MOMENTO D'INERZIA RISPETTO ALL'ASSE y

$$I_y = \iint_C x^2\,dx\,dy = \int_2^3 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\; r^2\cos^2\theta\, r = \frac{(3^4-2^4)}{4}\frac{\pi}{2}$$

2) COORDINATE CILINDRICHE



$$\underset{r}{\Omega = (0,+\infty)} \times \underset{\theta}{(0,2\pi)} \times \underset{z}{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(r,\theta,z) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z) \quad \forall (r,\theta,z) \in \Omega$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

SEMIPIANO!

$$\varphi(\Omega) = \mathbb{R}^3 \setminus \{y = 0,\ x \geq 0\};$$

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial(r,\theta,z)}(r,\theta,z)\right| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}(r,\theta,z)\right| = r \qquad \forall (r,\theta,z) \in \Omega$$

φ È UN C^1-DIFFEOMORFISMO FRA Ω E $\varphi(\Omega)$

SIANO $(x,y,z) \in \varphi(\Omega)$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} & \text{DISTANZA DALL'ASSE } z! \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x,y>0 \\ z = z \end{cases}$$

SIA $A \subseteq \varphi(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^3$ MISURABILE

SIA $f \in C(A)$, f LIMITATA. ALLORA

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\varphi^{-1}(A)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,dr\,d\theta\,dz$$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

OGNI SOTTOINSIEME LIMITATO DI $\mathbb{R}^3 \setminus \varphi(\Omega)$ HA MISURA NULLA!

APPLICAZIONE: TEOREMA DI GULDINO

SIA A UNA REGIONE PIANA CONTENUTA NEL SEMIPIANO xy CON $y \geq 0$, CIOÈ IN

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=0,\ y \geq 0\}$

SUPPONIAMO CHE $A \subseteq \mathbb{R}^2$ SIA MISURABILE E AREA $A > 0$

SIA V IL SOLIDO OTTENUTO RUOTANDO LA FIGURA PIANA A

DI UN ANGOLO α, $0 < \alpha \leq 2\pi$, IN SENSO ORARIO (O ANTIORARIO)

ATTORNO ALL'ASSE z. ALLORA

$$\boxed{\text{VOLUME } V = \alpha \cdot \text{AREA } A \cdot y_b}$$

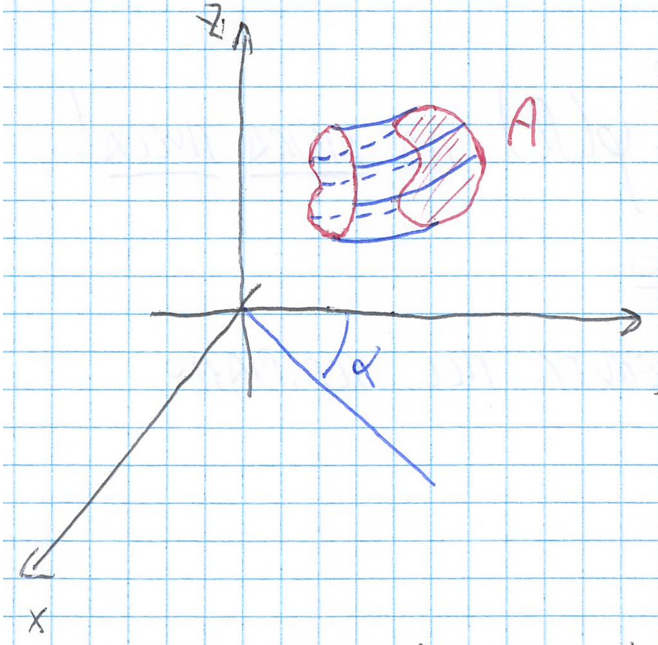
DOVE (y_b, z_b) È IL CENTROIDE DI A

OSSERVAZIONE

1) SE $\alpha = 2\pi$, IL TEOREMA PRENDE IL NOME DI TEOREMA DI PAPPO

2) y_b È LA DISTANZA MEDIA DALL'ASSE z DEI PUNTI DI A

DIMOSTRAZIONE



VOLUME $V = |V| = |V \cap \varphi(\Omega)| + |V - \varphi(\Omega)| = |V \cap \varphi(\Omega)|$

IN COORDINATE CILINDRICHE V SI PUÒ DESCRIVERE

$\left\{(r,\vartheta,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{\pi}{2}-\alpha\le\vartheta\le\frac{\pi}{2},\ (r,z)\in A\right\}$

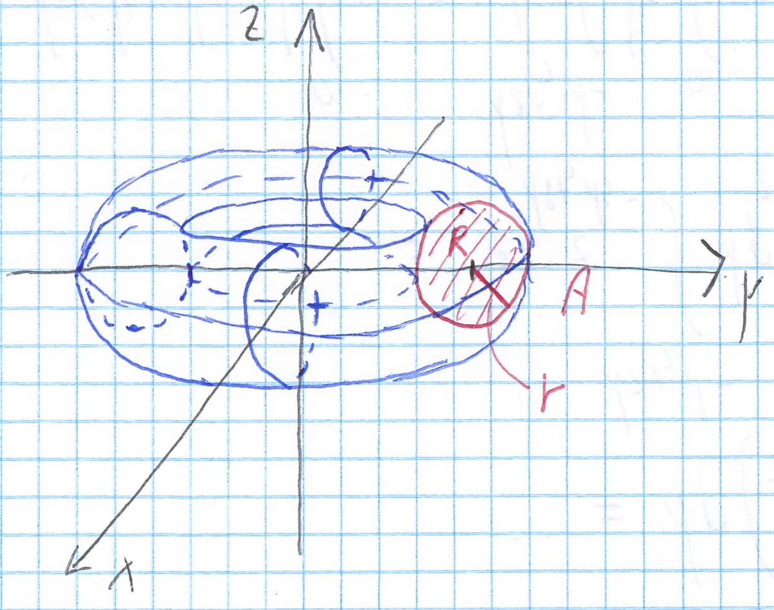
⑮

$$|V| = \iiint_V 1\,dx\,dy\,dz = \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} d\vartheta \iint_A dr\,dz\,r =$$

$$= \alpha \text{ AREA } A\cdot\left(\frac{1}{\text{AREA } A}\iint_A y\,dy\,dz\right) = \alpha\cdot\text{AREA } A\cdot y_b \qquad \square$$

ESEMPI

1) SIA T IL TORO DI RAGGI $0<r<R$



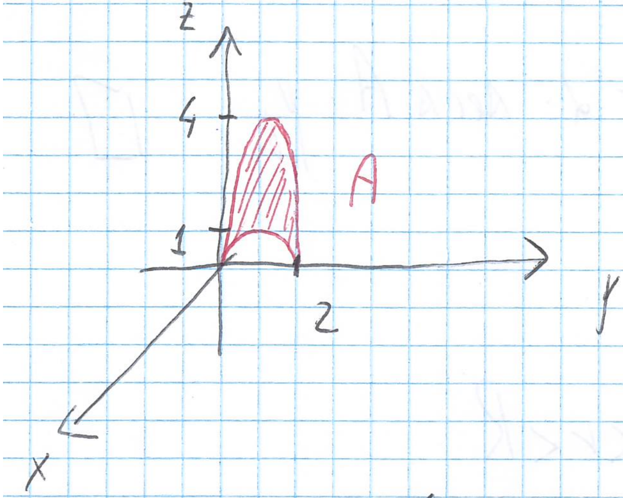
ALLORA VOLUME $V = 2\pi\ \pi r^2 R$

2) SIA $A=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 2,\ -y^2+2y\le z\le -4y^2+8y$

CALCOLARE IL VOLUME DI V_1 E V_2 DOVE V_1 È IL SOLIDO

OTTENUTO RUOTANDO DI 2π LA REGIONE A ATTORNO ALL'ASSE z E V_2 È IL SOLIDO OTTENUTO RUOTANDO DI π LA REGIONE A ATTORNO ALL'ASSE y

SVOLGIMENTO



$$\text{VOLUME } V_1 = 2\pi \iint_A y\, dy\, dz = 2\pi \int_0^2 dy \int_{-y^2+2y}^{-4y^2+8y} y\, dz = 2\pi \int_0^2 y(-3y^2+6y)\, dy = \dots$$

$$\text{VOLUME } V_2 = \pi \iint_A z\, dy\, dz = \pi \int_0^2 dy \int_{-y^2+2y}^{-4y^2+8y} z\, dz =$$

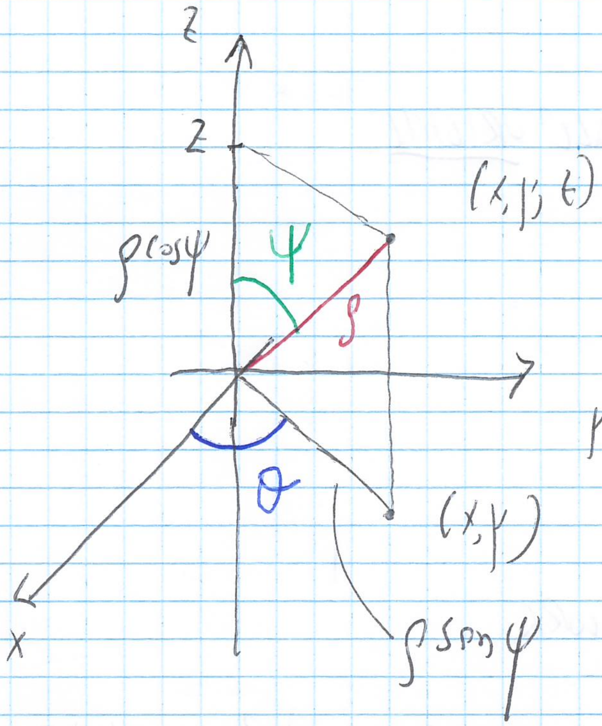
$$\frac{\pi}{2} \int_0^2 \left((-4y^2+8y)^2 - (-y^2+2y)^2 \right) dy = \dots$$

ESERCIZIO CALCOLARE IL CENTROIDE DI V_1 $(\tilde{x}_G, \tilde{y}_G, \hat{z}_G)$

PER SIMMETRIA, $\hat{x}_G = \hat{y}_G = 0$ MA, IN GENERALE,

$$\hat{z}_G \neq z_G \quad \text{DOVE } (y_G, z_G) \text{ È IL CENTROIDE DA } A!$$

3) COORDINATE SFERICHE



$$\Omega = (0,+\infty) \times (0,2\pi) \times (0,\pi) \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\rho \qquad \theta \qquad \psi$$

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^3 \qquad \varphi(\rho,\theta,\psi) = (\rho\,\mathrm{sen}\,\psi\cos\theta,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\psi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \rho\cos\psi)\ \ \forall(\rho,\theta,\psi)\in\Omega$$

$$\begin{cases} x = \rho\,\mathrm{sen}\,\psi\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\psi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = \rho\cos\psi \end{cases}$$

$$\varphi(\Omega) = \mathbb{R}^3 \setminus \{y=0,\ \underset{}{\overset{\text{SEMIPIANO!}}{x \geq 0}}\};$$

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial(\rho,\theta,\psi)}(\rho,\theta,\psi)\right| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\psi)}(\rho,\theta,\psi)\right| = \rho^2\,\mathrm{sen}\,\psi \quad \forall(\rho,\theta,\psi)\in\Omega$$

φ È UN C^1-DIFFEOMORFISMO TRA Ω E $\varphi(\Omega)$

SIANO $(x,y,z) \in \varphi(\Omega)$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} & \text{DISTANZA DALL'ORIGINE} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x,y>0 \\ \psi = \arccos\left(z/\rho\right) \end{cases}$$

SIA $A \subseteq \varphi(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^3$ MISURABILE

SIA $f \in C(A)$, f LIMITATA. ALLORA

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\varphi^{-1}(A)} f(\rho \operatorname{sen}\psi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\psi)\,\rho^2 \operatorname{sen}\psi\, d\rho\, d\theta\, d\psi$$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

OGNI SOTTOINSIEME LIMITATO DI $\mathbb{R}^3 \setminus \varphi(\Omega)$ HA MISURA NULLA!

ESEMPI

1) SIA $s>0$; $B_s(0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < s^2\}$

VOLUME $B_s(0) = |B_s(0)| = |B_s(0) \cap \varphi(\Omega)| + |B_s(0) \setminus \varphi(\Omega)| =$

$= |B_s(0) \cap \varphi(\Omega)|$

$\varphi^{-1}(B_s(0) \cap \varphi(\Omega)) = \{(\rho,\theta,\psi) \in \Omega : 0<\rho<s, 0<\theta<2\pi, 0<\psi<\pi\} =$

$$= \underset{\rho}{(0,5)} \times \underset{\theta}{(0,2\pi)} \times \underset{\psi}{(0,\pi)}$$

$$|B_5(0)| = \iiint_{B_5(0)\cap\varphi(\Omega)} 1\, dx\, dy\, dz = \int_0^5 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\psi\, \rho^2 \operatorname{sen}\psi =$$

$$= 2\pi \left(\int_0^5 \rho^2\, d\rho\right)\left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\psi\, d\psi\right) = 2\pi \cdot \frac{5^3}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}\pi 5^3$$

2) Sia $B = B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^3$

Calcolare

$$\iiint_B (x^4+y^4)\, dx\, dy\, dz \quad \text{e} \quad \iiint_B z^4\, dx\, dy\, dz$$

Svolgimento

$$\iiint_B (x^4+y^4)\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\psi \left(\rho^4 \operatorname{sen}^4\psi \cos^4\theta + \rho^4 \operatorname{sen}^4\psi \operatorname{sen}^4\theta\right)\rho^2 \operatorname{sen}\psi =$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^1 \rho^6\, d\rho\right)}_{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{7}}} \underbrace{\left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^5\psi\, d\psi\right)}_{\operatorname{sen}^5\psi = (1-\cos^2\psi)^2 \operatorname{sen}\psi} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} (\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta)\, d\theta\right)}_{\text{laborioso!}}$$

Coordinate cilindriche

$$\iiint_B (x^4+y^4)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^{1} dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} dr\, r\left(r^4\cos^4\theta + r^4\sin^4\theta\right) =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{6}\int_{-1}^{1} (1-z^2)^3\, dz\right)}_{\text{FACILE}} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} (\cos^4\theta + \sin^4\theta)\, d\theta\right)}_{\underline{\text{LABORIOSO}}\,!}$$

OSSERVIAMO CHE

$$\iiint_B x^4\,dx\,dy\,dz = \iiint_B y^4\,dx\,dy\,dz = \iiint_B z^4\,dx\,dy\,dz$$

$$\iiint_B z^4\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi\ \rho^4\cos^4\varphi\ \rho^2 \sin\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{7}\int_0^{\pi} \cos^4\varphi\, \sin\varphi = \frac{2\pi}{7}\left[-\frac{\cos^5\varphi}{5}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \frac{4}{35}\pi$$

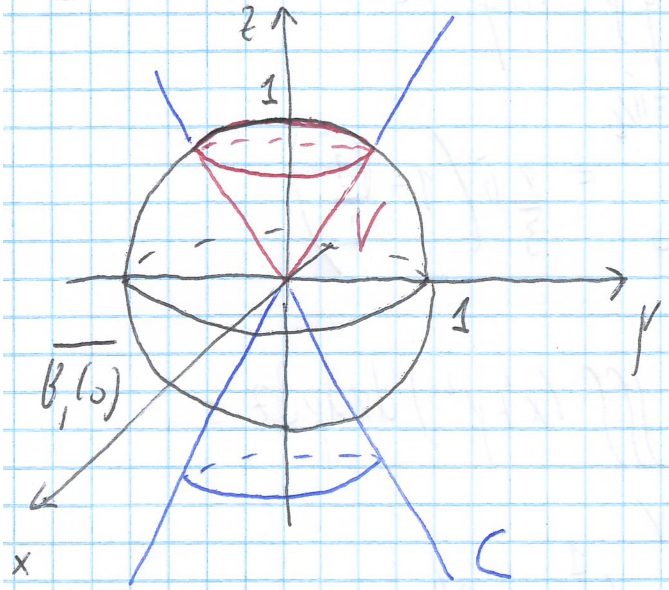
QUINDI $$\iiint_B (x^4+y^4)\,dx\,dy\,dz = \frac{8}{35}\pi$$

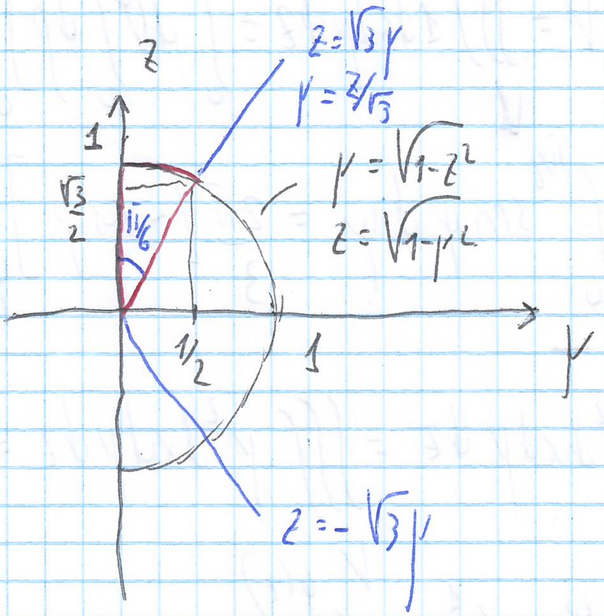
3) SIA V IL SOLIDO OTTENUTO INTERSECANDO LA PALLA $\overline{B_1(0)} \subseteq \mathbb{R}^3$ CON IL CONO $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0,\ (3x^2+3y^2) \leq z^2\}$

CALCOLARE IL VOLUME DI V E

$$\iiint_V x^2\,dx\,dy\,dz \qquad \text{E} \qquad \iiint_V z\,dx\,dy\,dz$$

SVOLGIMENTO





COORDINATE CARTESIANE

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \sqrt{x^2+y^2}\leq\frac{1}{2},\ \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$$

COORDINATE CILINDRICHE

$$\left\{(r,\theta,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq z\leq 1,\ 0\leq r\leq g(z)\right\}$$

DOVE

$$g(z)=\begin{cases}\sqrt{1-z^2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\leq z\leq 1\\ z/\sqrt{3} & 0\leq z\leq \sqrt{3}/2\end{cases}$$

OPPURE

$$\left\{(r,\theta,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq r\leq \frac{1}{2},\ \sqrt{3}r\leq z\leq\sqrt{1-r^2}\right\}$$

COORDINATE SFERICHE

$$\left\{(\rho,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3:\ 0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq\rho\leq 1,\ 0\leq\varphi\leq\pi/6\right\}$$

$$\text{Volume } V = \iiint_V 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/6} d\psi\, \rho^2 \sin\psi =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/6} \sin\psi\, d\psi = \frac{2\pi}{3}\Big[-\cos\psi\Big]_{\psi=0}^{\psi=\pi/6} = \frac{2}{3}\pi\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

— x —

$$\iiint_V x^2\,dx\,dy\,dz = \iiint_V y^2\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\iiint_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz \int_0^{g(z)} dr\, r\, r^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4}\int_0^1 (g(z))^4\,dz =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{z^4}{9}\,dz + \int_{\sqrt{3}/2}^1 (1-z^2)^2\,dz\right] = \dots$$

OPPURE

$$\iiint_V x^2\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\iiint_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/2} dr \int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{1-r^2}} r^2\,dz =$$

$$\underbrace{\pi\int_0^{1/2} r^2\left(\sqrt{1-r^2}-\sqrt{3}r\right)dr}_{\text{LABORIOSO!}}$$

— x —

$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz = \iint_{\{x^2+y^2\le 1/4\}} dx\,dy \int_{\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{\{x^2+y^2\le 1/4\}} \Big[(1-x^2-y^2) - 3(x^2+y^2)\Big]\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2} \iint\limits_{\{x^2+y^2 \le \frac{1}{2}} \left(1 - 4(x^2+y^2)\right) dx\,dy = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} dr \int_0^{2\pi} d\theta \left(1-4r^2\right) r =$$

$$= \pi \int_0^{1/2} \left(r - 4r^3\right) dr = \pi\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right) = \frac{\pi}{16}$$