Esercizi Analisi Matematica II

Anno accademico 2017-2018

Foglio 9

1. **T** Siano E_1 ed E_2 due sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$. Dimostrare che se $E_1 \subset E_2$ allora $m(E_1) \leq m(E_2)$ (monotonia della misura).

   Ricordiamo che per ogni $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile con $m(E)$ intendiamo la misura di E, cioè $|E|$.

2. **T** Sia $A \subset \mathbb{R}^N$, A aperto non vuoto misurabile. Dimostrare che $m(A) > 0$.

3. **T** Siano E_1 e E_2 due sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$. Dimostrare che $E_1 \cup E_2$ e $E_1 \cap E_2$ sono misurabili e che vale

$$m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = m(E_1) + m(E_2).$$

4. **T** Siano $E_1, \dots, E_n$ sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$. Dimostrare che $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ è misurabile e che vale la subadditività finita della misura cioè

$$m(E) \leq \sum_{i=1}^n m(E_i).$$

   Dimostrare che se i sottoinsiemi $E_1, \dots, E_n$ sono inoltre a due a due disgiunti, cioè $E_i \cap E_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$, allora vale l'additività finita della misura cioè

$$m(E) = \sum_{i=1}^n m(E_i).$$

5. **T** Sia $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi di $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Sia $E = \bigcup_{i=1}^\infty E_i$. Costruire un esempio in cui E_i è misurabile per ogni $i \in \mathbb{N}$ mentre E non è misurabile (secondo Peano-Jordan).

6. **T** Sia $E \subset \mathbb{R}$ misurabile, tale che $m(E) = 0$. Dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, esiste $c \in \mathbb{R} \backslash E$ tale che $a < c < b$. Concludere quindi che $\overline{\mathbb{R} \backslash E} = \mathbb{R}$.

7. **T** Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia E un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^N$ tale che $E \subset \mathbb{R}^{N-1} \times \{a\} \subset \mathbb{R}^N$. Dimostrare che E ha misura (N-dimensionale) nulla.

8. **T** Sie $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile, tale che $m(E) = 0$. Sia $f : E \to \mathbb{R}$ limitata. Dimostrare che f è integrabile su E e che $\int_E f = 0$.

9. **T** Per ogni $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^N$ definiamo

$$E_1 \Delta E_2 = (E_1 \backslash E_2) \cup (E_2 \backslash E_1).$$

   Dimostrare che se E_1 e E_2 sono misurabili, allora $E_1 \Delta E_2$ è misurabile.

   Sia Q un pluriintervallo di $\mathbb{R}^N$. Per ogni $E_1, E_2 \subset Q$, misurabili, diciamo che $E_1 \sim E_2$ se e solo se $m(E_1 \Delta E_2) = 0$. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza sull'insieme $\{E_1 \subset Q : \ E_1 \text{ misurabile}\}$.

Sia $X = \{[E_1]_\sim : \ E_1 \subset Q, \ E_1 \text{ misurabile}\}$. Per ogni $E_1, E_2 \subset Q$, misurabili, definiamo

$$d([E_1]_\sim, [E_2]_\sim) = m(E_1 \Delta E_2).$$

Dimostrare che d è una distanza su X.

10. **T** Sia Q un pluriintervallo di $\mathbb{R}^N$. Siano $f, g : Q \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ limitate. Diremo che $f = g$ quasi ovunque se $\{f \neq g\}$ ha misura nulla.

    Dimostrare che se $f = g$ quasi ovunque allora f è integrabile se e solo se g è integrabile e in tal caso vale

    $$\int_Q f = \int_Q g.$$

    Siano $f, g \in \mathcal{R}(Q) = \{h : Q \to \mathbb{R} : \ h \text{ è Riemann integrabile su } Q\}$. Diremo che $f \sim g$ se e solo se $f = g$ quasi ovunque.

    Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza sull'insieme $\mathcal{R}(Q)$

11. **P** Calcolare

    $$\iiint_Q \frac{1 + 2xy}{1 + z^2}\, dx\, dy\, dz$$

    dove $Q = [-1, 1] \times [0, 1] \times [2, 3]$.

12. **T** Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ misurabile, di misura non nulla. Sia $\mu : E \to \mathbb{R}$, $\mu \geq 0$ su E, integrabile e tale che $\int_E \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz > 0$. Scrivere le formule per calcolare il baricentro di E, (x_b, y_b, z_b), e il momento d'inerzia di E rispetto all'asse x, I_x, all'asse y, I_y, all'asse z, I_z, e all'origine, I_0.

13. **P** Calcolare il volume del tronco di cono ottenuto facendo ruotare attorno al cateto maggiore il triangolo rettangolo i cui cateti misurano 3 cm e 4 cm, rispettivamente.

14. **P** Sia dato il triangolo di vertici $A = (0, 2)$, $B = (5, 0)$ e $C = (0, 6)$. Calcolare il volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare il triangolo attorno al suo lato AC.

15. **P** Calcolare il volume della piramide retta la cui base è un rettangolo di lati 3 e 5 cm e la cui altezza è 10 cm.

16. **P** Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -x < y < 2 - x, \ 0 < x < 2\}$. Calcolare l'area di E e

    $$\iint_E (x^2 - y^2) \mathrm{e}^{-(x+y)}\, dx\, dy$$

17. **P** Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x < y < 3x, \ -x + 2 < y < -x + 4\}$. Calcolare l'area di E e

    $$\iint_E \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy$$

18. **P** Sia $E = B_3(0) \backslash \overline{B_2(0)} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

    $$\iint_E e^x |y|\, dx\, dy$$

19. **P** Sia $A = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq z \leq 1, \ z^4 \leq y \leq 2 + e^z\}$. Sia V il solido ottenuto ruotando in senso orario A attorno all'asse z di un angolo $\pi/4$. Calcolare il volume di A. Sia invece V_1 il solido ottenuto ruotando in senso orario A attorno all'asse y di un angolo 2π. Calcolare il volume di V_1.

20. **P** Sia $y = \varphi(z) = |z|e^{|z|}$, $-1 \leq z \leq 1$. Sia $A = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq z \leq 1, \ 0 \leq y \leq \varphi(z)\}$. A meno che non sia diversamente indicato, in questo esercizio e in quelli successivi supponiamo sempre che le regioni piane o i solidi considerati siano occupati da un corpo omogeneo con densità di massa costantemente uguale a 1. Calcolare il baricentro di A, il momento d'inerzia di A rispetto all'asse z, all'asse y e all'origine. Determinare infine il volume del solido ottenuto ruotando A attorno all'asse z di un angolo $\pi/3$ e di quello ottenuto ruotando A attorno all'asse y di un angolo π.

21. **P** Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$. Calcolare il baricentro di A e il momento d'inerzia di A rispetto all'asse x. Sia V il solido ottenuto ruotando A di π attorno all'asse x. Calcolare il baricentro di V e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse x.

22. **P** Sia C la corona circolare aperta in $\mathbb{R}^3$, centrata nell'origine, di raggio interno 2 e raggio esterno 3, cioè $C = B_3(0) \backslash \overline{B_2(0)} \subset \mathbb{R}^3$. Calcolare

$$\iiint_C y^2 xz \, dx \, dy \, dz \quad \text{e} \quad \iiint_C y^2 |x||z| \, dx \, dy \, dz$$

23. **P** Sia V la palla unitaria in $\mathbb{R}^3$ intersecata con il cono $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \geq 0, \ (x^2+y^2) \leq z^2\}$. Calcolare il volume di V e il suo baricentro. Inoltre calcolare

$$\iiint_V x^2 \, dx \, dy \, dz.$$

24. **P** Sia V la palla unitaria in $\mathbb{R}^3$ intersecata con il cono $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \geq 0, \ (x^2+y^2) \leq 3z^2\}$. Calcolare il volume di V, il suo baricentro e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse x, y e z. Inoltre calcolare

$$\iiint_V \log(z) z^2 \, dx \, dy \, dz \quad \text{e} \quad \iiint_V (x^2 e^z + y^2) \, dx \, dy \, dz$$

25. **P** Sia V la calotta sferica

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \|(x,y,z)\| \leq 2, \ z \geq 1\}.$$

Scrivere V in coordinate cartesiane, come dominio normale rispetto all'asse z, in coordinare cilindriche e in coordinate sferiche. Calcolarne quindi il volume, il baricentro e il momento d'inerzia rispetto all'asse z. Calcolare infine

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2} \, dx \, dy \, dz \quad \text{e} \quad \iiint_V \log(1+x^2+y^2) \, dx \, dy \, dz$$

26. **TF** Sia M una matrice reale 2×2, invertibile. Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi(x,y) = M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dimostrare che φ è un

C^1-diffeomorfismo tra $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2$. Sia $Q = [0,1] \times [0,1]$. Dimostrare, senza usare il Teorema del cambiamento di variabili, che $m_2(\varphi(Q)) = |\text{det}M|$. Qui e nel prossimo esercizio m_2 è la misura 2-dimensionale.

Dimostrare che per ogni rettangolo $Q \subset \mathbb{R}^2$ vale $m_2(\varphi(Q)) = |\text{det}M| m_2(Q)$.

27. **TF∗** Sia M una matrice reale 2×2, invertibile. Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi(x,y) = M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dimostrare, senza usare il Teorema del cambiamento di variabili, che per ogni $E \subset \mathbb{R}^2$, E misurabile, si ha che $\varphi(E)$ è misurabile e $m_2(\varphi(E)) = |\text{det}M| m_2(E)$.

28. **T** Sia $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un cambiamento rigido di coordinate cioè

$$T(x) = M \cdot x + y_0, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N,$$

dove $y_0 \in \mathbb{R}^N$ e M matrice ortogonale $N \times N$ sono fissati. Dimostrare che la misura è invariante per cambiamenti rigidi di coordinate, cioè $E \subset \mathbb{R}^N$ è misurabile se e solo se lo è $T(E)$ e in tal caso vale $|E| = |T(E)|$.

29. **T** Dimostrare la formula del Teorema del cambiamento di variabili per $N = 1$, usando l'integrazione per sostituzione.

Suggerimento: notare che se $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, allora si usa la notazione $\int_{[a,b]} = \int_a^b$, mentre la notazione $\int_b^a = -\int_a^b = -\int_{[a,b]}$ è solamente una convenzione! È conveniente formulare l'enunciato usando solo la notazione $\int_{[a,b]}$ e distinguere i casi in cui il cambiamento di variabile cambia o meno l'ordine degli estremi.

Legenda:
T esercizio teorico; **P** esercizio pratico; **F** esercizio facoltativo; ∗ esercizio difficile