INTEGRALI CURVILINEI - FORME DIFFERENZIALI LINEARI

Ω dominio di $\mathbb{R}^n$
considero una funzione

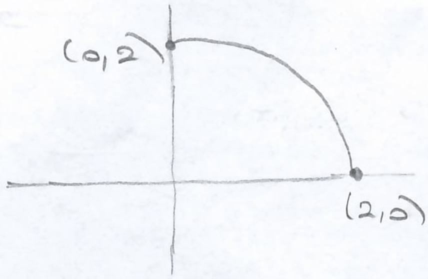
$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{continua}$$

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti di sostegno γ tale che $\gamma \subset \Omega$.

Def: Si dice integrale di linea (di prima specie (o integrale curvilineo di una funzione) di f lungo γ

$$\int_\gamma f \, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \, |\gamma'(t)| \, dt$$

Es: Cons: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \to x^2 \cdot y$



e sia $\gamma : [0;\pi/2] \to \mathbb{R}^2$
$t \longmapsto (2\cos t, 2\sin t)$

γ = sostegno di γ

$$\int_\gamma f \, ds = \int_0^{\pi/2} f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| \, dt =$$

$\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = 2$

$$= \int_0^{\pi/2} (2\cos t)^2 \cdot (2\sin t) \cdot 2 \, dt = 16 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \cdot \sin t \, dt =$$

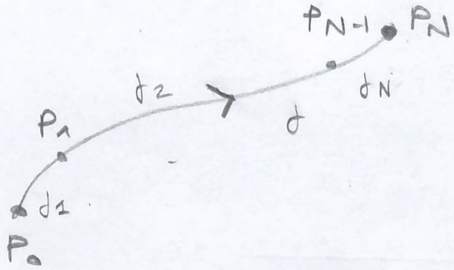
$$= 16 \int_0^{\pi} -\frac{1}{3} \frac{d}{dt} (\cos^3 t) \, dt = \frac{16}{3}.$$

Prop: $\int_\gamma f \, ds$ è invariante per parametrizzazioni equivalenti
($\rightarrow$ è indipendente anche dall'orientazione).

Oss: Se $\gamma : [0;L] \to \mathbb{R}^n$ è una rappresentazione parametrica con parametro uguale all'ascissa curvilinea, dato che $|\gamma'(s)| \equiv 1$ allora l'integrale curvilineo diventa

$$\int_0^L f(\gamma(s)) \, ds$$

L'integrale si può ottenere (in maniera intrinseca) con un procedimento analogo a quello con cui si definisce l'integrale (di Riemann) per funzioni continue su $[a,b]$



$P_0 = \gamma(0)$, $P_N = \gamma(L)$

Scegliamo $P_1, \dots, P_{N-1}$ punti sul sostegno Γ ordinati in maniera concorde al verso indotto da s

$P_i \leftrightarrow s_i = s(P_i)$ con $s_{i-1} < s_i$

γ_i = porzione di curva di estremi P_{i-1} e P_i

$L(\gamma_i)$ = lunghezza di
lunghezza del pezzo di curva γ_i

Su ciascun γ_i, prendo un ~~uni~~ punto P_i' $\quad s(P_i') = s_i'$

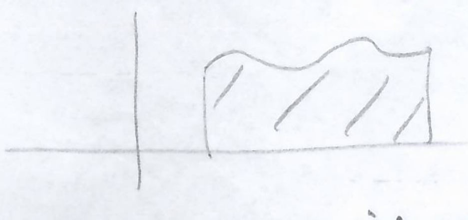
Allora la somma $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} f(P_i')L(\gamma_i) = \sum_{i=1}^{N} f(\gamma(s_i'))(s_i - s_{i-1})$ (*)

essendo $(f\circ\gamma)(s)$ continua in $[0,L]$ (*) converge $\int_0^L f(\gamma(s))\,ds$

se $\max\{s_i - s_{i-1} : 1 \le i \le N\} \to 0$

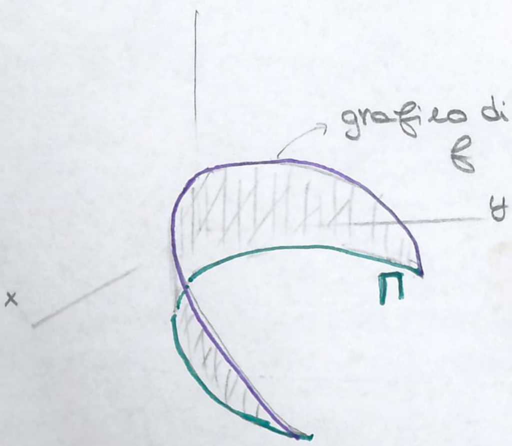
Come nel caso di integrali di funzioni continue di una variabile reale anche l'integrale di linea può dare una misura di un'area

$\int_a^b f(x)\,dx$ = Area sottografico di f $\qquad f \geq 0$



Caso γ una curva nel piano e sia Γ il suo sostegno

Sia $f : \Gamma \to [0,+\infty)$ continua,



$\int_\gamma f\,ds$ = area superficie formata dai punti compresi tra Γ e il grafico di f (su Γ)

Verifichiamo con un esempio.

Ex. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\Gamma} (x+y^2)\, ds$$

dove Γ è il segmento di estremi $(0,0)$ e $(1,\sqrt{3})$.

dim: $\gamma(t) = (0,0) + t\left((1,\sqrt{3}) - (0,0)\right)$ con $0 \le t \le 1$

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sqrt{3}\, t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$

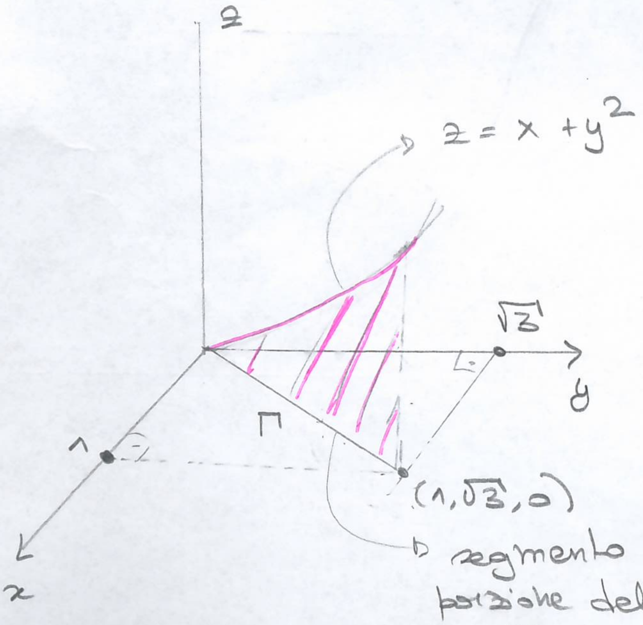
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+3} = 2$$

Quindi

$$\int_{\Gamma} (x+y^2)\, ds = \int_0^1 \overbrace{(t+3t^2)}^{f} \cdot \overset{\|\gamma'(t)\|}{2}\, dt =$$

$$= 2\left[\frac{t^2}{2} + \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}} t^3\right]_0^1 = 3$$

Interpretiamo ora l'integrale come l'area di una superficie.



porzione della retta sul segmento $y=\sqrt{3}\,x$

Area /// = parte del piano $y = \sqrt{3}\,x$ che si trova sopra il piano $z=0$ e sotto il grafico della funzione $f(x,y) = x + y^2$

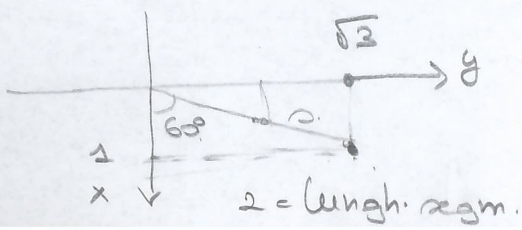
$\Downarrow$

la vedo come sottografico di una funzione di una variabile definita

Considero s

s = lunghezza del segmento $(0,0)$ e (x,y) allora

$$\begin{cases} x = \dfrac{s}{2} \\ y = s \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} s = x \cdot \cos\alpha \\ s = y \sin\alpha \end{cases}$$

$\alpha = 60°$

Area sottografico = $\int_0^2 \left(\frac{s}{2} + \frac{3}{4} s^2 \right) ds = \frac{s^2}{4} + \frac{3}{3 \cdot 4} s^3 \Big|_0^2 = 3$

Proprietà dell'integrale curvilineo

Sia γ una curva regolare e siano $f, g : \Gamma \to \mathbb{R}$ funzioni continue allora si ha

- $\int_\gamma (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_\gamma f + \beta \int_\gamma g \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $\int_\gamma f \, ds \leq \int_\gamma g \, ds \qquad$ se $f \leq g$ su Γ

- $\left| \int_\gamma f \, ds \right| \leq \int_\gamma |f| \, ds \leq \max_\Gamma |f| \, L(\gamma)$

Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ si spezza nell'unione delle curve regolari $\gamma_1 : [a,c] \to \mathbb{R}^n$ e $\gamma_2 : [c,b] \to \mathbb{R}^n$ con $a < c < b$ allora si ha

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

Applicazioni

- Massa di un filo non omogeneo nota la densità lineare

Sia γ una linea materiale non omogenea di densità lineare ρ e sia $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrizzazione regolare di γ. Allora la massa totale è data da

$$m = \int_\gamma \rho \, ds = \int_a^b \rho(x(t)) \, |x'(t)| \, dt$$

Se il corpo è omogeneo, cioè con densità ρ costante, allora si ritrova $\underbrace{m = \rho \, \ell(\gamma)}_{(*)}$, dove $\ell(\gamma)$ = lunghezza di γ.

- Il baricentro di γ è il punto $B = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, dove γ è parametrizzato da

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_\gamma x \cdot \rho \cdot ds = \frac{1}{m}\int_a^b x(t)\cdot \rho(r(t))\,|\dot{r}(t)|\,dt$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\int_\gamma y \cdot \rho\, ds = \frac{1}{m}\int_a^b y(t)\cdot \rho(r(t))\,|\dot{r}(t)|\,dt$$

è una massa

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\int_\gamma z \cdot \rho \cdot ds = \frac{1}{m}\int_a^b z(t)\cdot \rho(r(t))\,|\dot{r}(t)|\,dt$$

di N punti materiali $x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n}$ caso discreto.

Baricentro = punto geometrico corrispondente al valore medio della distribuzione di massa del sistema

- Se il corpo è omogeneo (cioè ρ costante) allora il baricentro si dice centroide e ha coordinate

$$\bar{x} = \frac{\rho}{m}\int_\gamma x\, ds \overset{*}{=} \frac{1}{\ell(\gamma)}\int_\gamma x\, ds = \frac{\int_a^b x(t)\,|\dot{r}(t)|\,dt}{\int_a^b |\dot{r}(t)|\,dt}$$

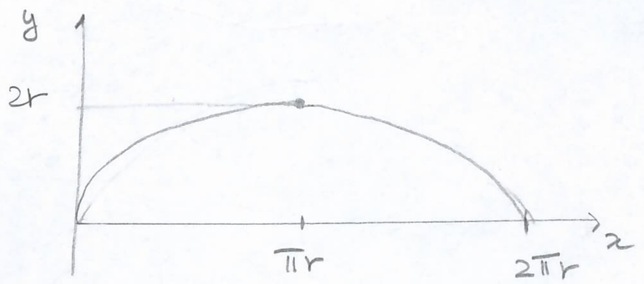
$$\bar{y} = \frac{\rho}{m}\int_\gamma y\, ds = \frac{1}{\ell(\gamma)}\int_\gamma y\, ds = \frac{\int_a^b y(t)\,|\dot{r}(t)|\,dt}{\int_a^b |\dot{r}(t)|\,dt}$$

$$\bar{z} = \frac{\rho}{m}\int_\gamma z\, ds = \frac{1}{\ell(\gamma)}\int_\gamma z\, ds = \frac{\int_a^b z(t)\,|\dot{r}(t)|}{\int_a^b |\dot{r}(t)|\,dt}$$

Ex. Determinare il centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ dell'arco γ di cicloide di equazioni

$$\begin{cases} x(t) = r(t - \sin t) \\ y(t) = r(1 - \cos t) \end{cases} \quad \text{per } t \in [0, 2\pi].$$

dim:



$$\dot{x}(t) = r(1 - \cos t)$$
$$\dot{y}(t) = r \sin t$$

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = r\sqrt{1 - 2\cos t + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1}}$$
$$= r\sqrt{2 - 2\cos t}$$

Calcoliamo la lunghezza di γ

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} r\sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt = \int_0^{2\pi} 2r\sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}\, dt =$$

↑ formule di bisezione.

$$= 2r \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 8r$$

$$\bar{x} = \frac{1}{8r} \int_0^{2\pi} x(t) \, \|\gamma'(t)\| \, dt =$$

$$\|\gamma'(t)\| = 2r \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8r} \int_0^{2\pi} r(t - \sin t) \cdot 2r \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = \frac{r}{4} \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

$$= \frac{r}{4} \cdot \frac{4}{3} \left[3 \sin\frac{t}{2} - \frac{3}{2} t \cos\frac{t}{2} - \sin 3\frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi r$$

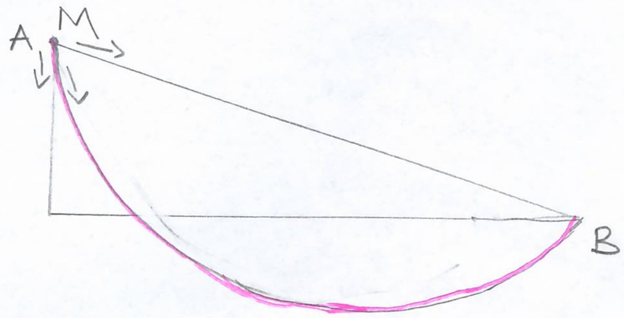
$$\bar{y} = \frac{4}{3} r.$$

Cicloide è la curva tracciata da un punto fisso su una circonferenza che rotola lungo una retta. Si pensi ad un punto su una ruota di bicicletta in movimento

La cicloide risolve il problema della brachistocrona (→ tempo più corto), cioè è la curva che permette ad una particella di andare da un punto A ad un punto B nel minor tempo possibile.

La particella ha massa (puntiforme) ed è soggetta al campo di gravità

A non sta sulla verticale di B



Ex. Cons. la curva

$$\gamma : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longmapsto (t^2, 2\cos t, 2\sin t)$$

Calcolare la massa del filo rappresentato dal supporto di γ.
che ha densità $\rho(x,y,z) = \sqrt{z}$

dim: $m = \int_\gamma \rho \, ds = \int_0^\pi \rho(\gamma(t)) \, |\gamma'(t)| \, dt =$

$$\gamma'(t) = (2t, -2\sin t, 2\cos t)$$
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = 2\sqrt{t^2+1}$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{t^2} \cdot 2\sqrt{t^2+1} \, dt = \int_0^\pi 2t\sqrt{t^2+1} \, dt =$$

$$= \frac{2}{3}(t^2+1)^{3/2} \Big|_0^\pi = \frac{2}{3}\left[(\pi^2+1) - 1\right]$$

Forme differenziali lineari. Integrali curvilinei di 2ª specie.

Def: Un funzionale lineare su $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineare, cioè un elemento dello spazio duale $(\mathbb{R}^n)^*$ di $\mathbb{R}^n$,

Si ha che

- $\mathbb{R}^n \simeq (\mathbb{R}^n)^*$, $\mathbb{R}^n$ e il suo duale sono isomorfi (teo rappr. di Riesz).

- $n = \dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathbb{R}^{n*})$ e se
  - $e_1, \dots, e_n$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$ allora
  - $e_1^*, \dots, e_n^*$ " " " " " $(\mathbb{R}^n)^*$ dove

$$e_i^*: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x_i$$ è la proiezione sulla i-esima componente

Per indicare la base canonica del duale $\{e_i^*\}_{i=1}^n$ useremo la notazione $dx_1, \dots, dx_n$ ($dx_i = e_i^* = d(e_i^*)$)
↳ e_i^* sono lineari

Def: Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Si dice forma differenziale lineare un'applicazione

$$\omega: \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*, \quad x \longmapsto \omega(x)$$

tale che $\omega(x)(h) = \sum_{i=1}^n a_i(x)\, dx_i(h) = \sum_{i=1}^n a_i(x) h_i$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$

Es L'esempio principale di forma differenziale lineare è il differenziale.

$$f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{di classe } C^1$$

allora è differenziabile in $x_0 \in \Omega$ cioè esiste $L_{x_0}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineare tale che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0.$$

quindi $L_{x_0} \in (\mathbb{R}^n)^*$ e quindi posso costruire una forma diff. lineare

$$df : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$$ differenziale di f.

$$\begin{array}{c} x_0 \longmapsto df(x_0). \\ \cap \\ \Omega \end{array}$$

Def: Diremo che $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,dx_i$ è

- continua se gli $a_i(x)$ sono continui, $\forall i$
- di classe C^k se gli $a_i(x)$ sono di classe C^k, $\forall i$

Useremo il linguaggio delle forme differenziali lineari ma c'è corrispondenza con il calcolo vettoriale.

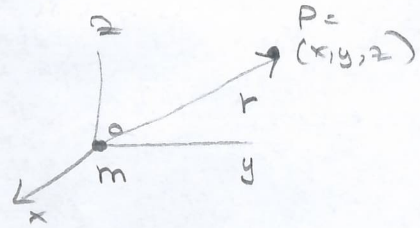
Elementi di calcolo vettoriale

Def: Un campo vettoriale è una funzione $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Se $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ viene anche detto campo scalare.

Esempio (di campo vettoriale).

$$F : (x,y,z) \longmapsto (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$$



$F(x,y,z)$

dove $F_1(x,y,z) = -\dfrac{Gm}{r^2}\,\dfrac{x}{r}$

$F_2(x,y,z) = -\dfrac{Gm}{r^2}\,\dfrac{y}{r}$

$F_3(x,y,z) = -\dfrac{Gm}{r^2}\,\dfrac{z}{r}$

dove $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

G è la costante di gravitazione universale

F è il campo gravitazionale $\to$ forza d'attrazione che un corpo puntiforme di massa m posto nell'origine esercita su una massa unitaria posta in (x,y,z).

Def: Sia $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe $C^1(\Omega)$
Si definisce rotore di $F = (F_1, F_2, F_3)$ il campo.

$$\operatorname{rot} F = \underbrace{\nabla \times F}_{\text{prodotto vettoriale formale}} = \underbrace{\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}}_{\text{determinante}} =$$

$$= (\partial_y F_3 - \partial_z F_2 , \partial_z F_1 - \partial_x F_3 , \partial_x F_2 - \partial_y F_1)$$

Def: Se $\operatorname{rot} F = 0$ allora F si dice irrotazionale

Def: Sia $F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo di classe $C^1(\Omega)$, con $F = (F_1, \dots, F_n)$. Si definisce divergenza di F il campo scalare

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \sum_{i=1}^{n} \partial x_i F_i$$

$\operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f = \sum_{i=1}^{n} \partial^2 x_i f$

Oss: $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \xrightarrow[\nabla]{} \nabla f$ campo vettoriale $= (\partial x_1 f, \dots, \partial x_n f)$

$f \xleftarrow{?} G$ Dato un campo vettoriale G

trovo f t.c. $\nabla f = G$?

non sempre !!

Def: Un campo vettoriale F si dice conservativo in un aperto Ω se $F \in C^0(\Omega)$ ed esiste una funzione $U: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $F = \nabla U$ in Ω.

▷ Esempio: Consideriamo il campo vettoriale $F(x,y) = (3x^2, -x \cdot y)$ e facciamo vedere che non è conservativo.
Se lo fosse esisterebbe una funzione $U(x,y)$ differenziabile
$$\underbrace{\partial_x U(x,y) = 3x^2}_{①} \quad e \quad \underbrace{\partial_y U(x,y) = -xy}_{②}$$

Dalla ① e integrando rispetto a x avrei che ↗ diff. per ip.

$U(x,y) = x^3 + \varphi(y)$ (con φ differenz. essendo $\varphi(y) = U(x,y) - x^3$).

Derivando questa relazione rispetto a y trovo

$\partial_y U(x,y) = \varphi'(y) \to$ costante rispetto a x

② $\to = -xy \to$ non è costante risp a x

assurdo! $\Rightarrow F$ non è conservativo.

Ritorniamo alle forme diff. lineari.

Cons. una forma differenziale lineare

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx_i \quad \underline{\text{continua}} \text{ in } \Omega$$

Sia $x: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare

$t \longmapsto (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ t.c. $\gamma = \operatorname{supp} x \subset \Omega$

Def: L'<u>integrale curvilineo</u> di ω lungo γ (o integrale curvilineo di seconda specie) si indica con

$$\int_\gamma \omega$$

ed è definito dalla seguente formula

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b a_i(x(t)) \cdot \dot{x}_i(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b \left(a_1(x(t)) \cdot \dot{x}_1(t) + \ldots + a_n(x(t)) \cdot \dot{x}_n(t) \right) dt \quad (=)$$

C'è corrispondenza tra forme differenziali lineari e campi vettoriali

$$\omega: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* \qquad \longleftrightarrow \qquad F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx_i \qquad\qquad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (a_1(x), \ldots, a_n(x))$$

ω è una f.d.l. $\qquad$ F è un campo vettoriale.

$$(=) \int_a^b \langle F(x(t)), \dot{x}(t) \rangle\, dt$$

, dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare euclideo.

Interpretazione fisica:

$L = \int_a^b \langle F(x(t)), \dot{x}(t) \rangle \, dt$ è il lavoro totale compiuto da una forza F per spostare il suo punto d'applicazione da $x(a)$ a $x(b)$.

In maniera formale, il lavoro infinitesimo (per $n=3$)

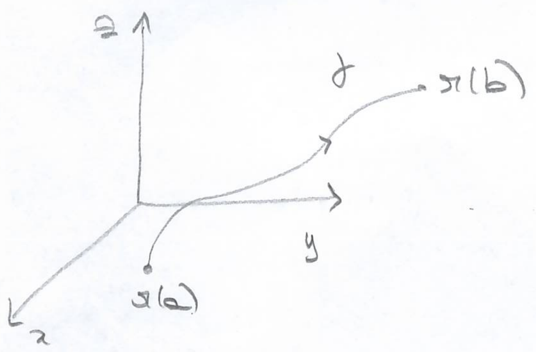
$$dL = \underbrace{F \cdot ds}_{\text{Forza per spostamento}} = F_1 \cdot dx_1 + F_2 \cdot dx_2 + F_3 \cdot dx_3$$

$$ds = (dx_1, dx_2, dx_3)$$

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \overset{!}{=} (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$ param. della curva γ

$$ds = (\dot{x}_1(t)\,dt, \dot{x}_2(t)\,dt, \dot{x}_3(t)\,dt) = \dot{x}(t)$$

$$L = \int_\gamma dL = \int_\gamma F \cdot ds = \int_a^b F(x(t)) \cdot \dot{x}(t)\, dt$$



$F(x)$ = forza che agisce su una particella puntiforme che si trova nel punto $x \in \Omega$.

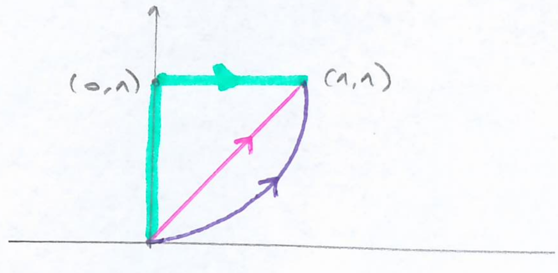
$\int_\gamma F \cdot ds$ = lavoro compiuto per spostare la particella da $x(a)$ a $x(b)$ lungo γ.

Esempio: Calcoliamo il lavoro del seguente campo vettoriale $F(x,y) = (y^2, 2xy)$ lungo 3 percorsi diversi che partono da $(0,0)$ e arrivano in $(1,1)$.

a) lungo il segmento $y = x$

b) lungo la curva $y = x^2$

c) lungo la curva costituita dal segmento $\overline{(0,0),(0,1)}$ e poi da $\overline{(0,1),(1,1)}$.



$F_1(x,y) = y^2$

$F_2(x,y) = 2xy$

$U(x,y) = y^2 \cdot x$

$\partial_x U = F_1 = y^2$

$\partial_y U = 2yx = F_2$

$\Rightarrow F$ è conservativo.

a) $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (t,t) \quad 0 \le t \le 1 \quad x'(t) = (1,1)$

$$L = \int_0^1 [F_1(x_1(t), x_2(t)) \cdot x_1'(t) + F_2(x_1(t), x_2(t)) x_2'(t)]\, dt =$$

$$= \int_0^1 (t^2 + 2t^2)\, dt = \int_0^1 3t^2 = t^3 \Big|_0^1 = 1$$

b) $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (t, t^2) \quad 0 \le t \le 1 \quad x'(t) = (1, 2t)$

$$L = \int_0^1 (t^2)^2 + 2t\, t^2\, 2t \, dt = \int_0^1 5t^4 = t^5 \Big|_0^1 = 1$$

c) $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ con

$$x_1(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le 1 \quad \gamma_1 \\ t-1 & 1 \le t \le 2 \quad \gamma_2 \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1 \quad \gamma_1 \\ 1 & 1 \le t \le 2 \quad \gamma_2 \end{cases}$$

Quindi $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \quad \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \quad \gamma_2 : [1,2] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma_1'(t) = (0,1) \quad \gamma_2'(t) = (1,0)$

$$L = \underbrace{\int_0^1 t^2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 t \cdot 1 \, dt}_{\int_{\gamma_1} = 0} + \underbrace{\int_1^2 1 \cdot 1 + 2(t-1) \cdot 1 \cdot 0 \, dt}_{\int_{\gamma_2} = 1} = 1$$

→ Il lavoro sembra non dipendere dal cammino d'integrazione ...

<u>Proposizione</u>

Siano ω_1 e ω_2 due forme lineari continue e siano $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ curve regolari allora

i) $\int_\gamma (\alpha \omega_1 + \beta \omega_2) = \alpha \int_\gamma \omega_1 + \beta \int_\gamma \omega_2$ linearità

ii) $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$ additività rispetto al cammino di integrazione

iii) Se γ_1 è equivalente a γ_2 e γ_1, γ_2 hanno la stessa orientazione allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

se sono equivalenti ma con orientazione opposta allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = - \int_{\gamma_2} \omega$$

Esempio: Teorema dell'energia cinetica

Sia $F: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo di forze, Ω dominio.
Sotto l'azione di F una particella di massa m compie un cammino γ regolare di classe C^2, di parametrizzazione

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \quad , x_i \in C^2(\Omega) \qquad i = 1, 2, 3.$$

Calcoliamo il lavoro compiuto da F per trasportare la particella da $x(a)$ a $x(b)$.

Dalla seconda legge della dinamica abbiamo $F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$ quindi

$$L = \int_a^b \left[F_1(x(t)) \cdot \dot{x}_1(t) + F_2(x(t)) \cdot \dot{x}_2(t) + F_3(x(t)) \cdot \dot{x}_3(t) \right] dt =$$

$$= \int_a^b \left[m \ddot{x}_1(t) \cdot \dot{x}_1(t) + m \ddot{x}_2(t) \cdot \dot{x}_2(t) + m \ddot{x}_3(t) \cdot \dot{x}_3(t) \right] dt =$$

$$= \int_a^b \frac{1}{2} m \left[\frac{d}{dt} (\dot{x}_1)^2(t) + \frac{d}{dt} (\dot{x}_2)^2(t) + \frac{d}{dt} (\dot{x}_3)^2(t) \right] dt$$

$$= \int_a^b \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \left(v(t)^2 \right) dt = \frac{1}{2} m \left[v(b)^2 - v(a)^2 \right]$$

$$v(t)^2 = |\dot{x}(t)|^2 = \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 \right) \to \text{velocità scalare al quadrato}$$

Ricordiamo che $E = \frac{1}{2} m v(t)^2$ l'energia cinetica della particella.
Il lavoro calcolato è uguale alla variazione di energia cinetica dal punto finale al punto iniziale.

Def: Una forma differenziale lineare $\omega: \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ si dice esatta in Ω se esiste un una funzione differenziabile $U: \Omega \to \mathbb{R}$ tale che detta primitiva di ω (o potenziale) tale che

$$\omega = df$$

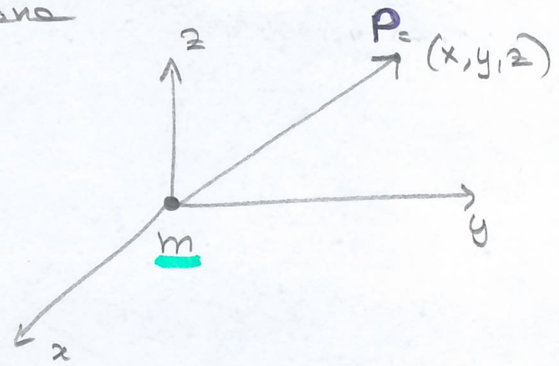
Ovvero se $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx_i$ allora $\exists f: \Omega \to \mathbb{R}$ t.c.

$\partial_{x_i} f(x) = a_i(x) \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, n$ e quindi

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f(x) dx_i$$

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx_i \text{ è esatta} \quad \longleftrightarrow \quad F(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x)) \text{ è un campo conservativo.}$$

Esempio: Considero il campo di attrazione gravitazionale newtoniana



$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\downarrow$ distanza del punto in cui misuro la forza dal punto in cui è localizzata la massa m che genera il campo

agente su un corpo puntiforme **P** di massa unitaria e dovuto alla presenza di una massa m che supponiamo posta nell'origine.

Le componenti sono

$$F_1(x,y,z) = -\frac{Gm}{r^3}x, \quad F_2(x,y,z) = -\frac{Gm}{r^3}y, \quad F_3(x,y,z) = -\frac{Gmz}{r^3}$$

dove G è la costante di gravitazione universale.

F è un campo conservativo infatti $U(x,y,z) = -\frac{G \cdot m}{r}$ è un potenziale (il potenziale gravitazionale).

Oss: • Se f è una primitiva di ω, cioè se $df = \omega$ allora anche $f + c$ lo è.

• Su insiemi Ω aperti e connessi questa è l'unica forma di non unicità, infatti se

$$df = dg = \omega \Rightarrow \partial x_i (f - g) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \nabla(f-g) = 0 \text{ in } \Omega \Rightarrow f - g = \text{costante}.$$

Lemma

Sia ω una forma differenziale esatta e continua in Ω allora

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \quad (\text{dove } df = \omega)$$

dim: Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ regolare con supp γ

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_i(t)\, dt =$$

ω è esatta quindi $\exists f : \Omega \to \mathbb{R}$ t.c. $\partial x_i f = a_i$

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^n \partial x_i f(\gamma(t))\, \dot{\gamma}_i(t)\, dt =$$

Definiamo la funzione

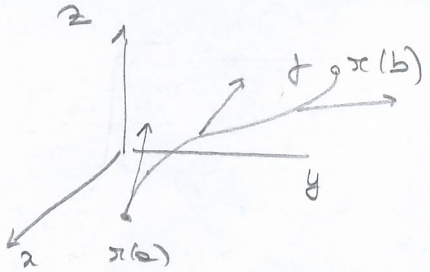
$$F(t) = (f \circ x)(t) = f(\underbrace{x(t)}_{\in \mathbb{R}^n})$$

$$\frac{d}{dt} F(t) = \sum_{i=1}^{n} \partial x_i f(x(t)) \cdot \dot{x}_i(t)$$

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{d}{dt} F(t)\, dt = F(b) - F(a) = f(x(b)) - f(x(a))$$

ω esatta $\longleftrightarrow$ $F = (a_1, \ldots a_n)$ campo conservativo.

Diamo ora una giustificazione del nome "conservativo".



$$\int_\gamma F\, ds = \frac{1}{2} m \left[v^2(b) - v^2(a) \right] \quad (1)$$

$\downarrow$ $F = ma$

Assumiamo inoltre che il campo F sia conservativo, allora

$$(2) \int_\gamma F\, ds = U(x(b)) - U(x(a))$$

U è un potenziale
$\partial x_i U = F_i$

Quindi eguagliando (1) e (2) si ha che

$$\underbrace{\frac{1}{2} m\, v^2(b)}_{\text{energ cinetica}} - \underbrace{U(x(b))}_{\text{energ potenziale}} = \frac{1}{2} m\, v^2(a) - U(x(a))$$

Legge conserv. energia meccanica

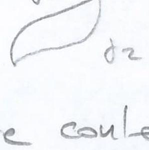
Teorema (caratterizzazione delle forme differenziali esatte)

Sia Ω un dominio (aperto e connesso di $\mathbb{R}^n$) e sia ω una forma differenziale lineare continua in Ω.

Le seguenti 3 affermazioni sono equivalenti:

a) per ogni coppia di curve regolari γ_1 e γ_2 contenute in Ω e aventi lo stesso punto iniziale e stesso punto finale, si ha

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$



b) per ogni curva chiusa regolare contenuta in Ω

$$\int_\gamma \omega = 0 \quad \left(\to \oint_\gamma \omega = 0 \right)$$

notazione per integrali su curve chiuse

c) ω è esatto in Ω.

dim: Struttura della dimostrazione

1) c) $\Rightarrow$ b)
2) a) $\Rightarrow$ c)
3) b) $\Rightarrow$ a)

1) c) $\Rightarrow$ b) già visto caso particolare per $\gamma(a) = \gamma(b)$ del Lemma precedente

2) Dimostriamo $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega \Rightarrow \omega$ esatta

$\forall \gamma_1, \gamma_2$

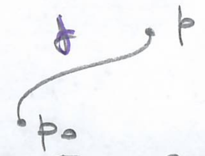
Lo facciamo in maniera "costruttiva", ovvero esibiamo un potenziale φ t.c. $d\varphi = \omega$. $U : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

Consideriamo due punti in Ω

$p_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ e $p = (x_1, \ldots, x_n)$

↳ lo penso fissato

Sia γ una curva regolare



avente come punto iniziale p_0 e come punto finale p

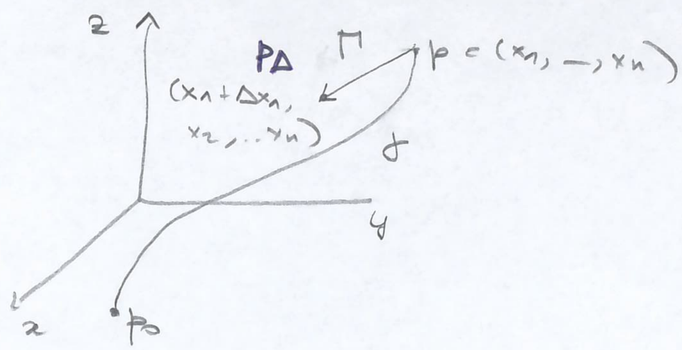
$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \int_\gamma \omega$ la dipendenza risp. $(x_1, \ldots, x_n)$ avviene attraverso γ.

φ è il nostro candidato ad essere un potenziale.

Facciamo vedere $\partial_{x_i} \varphi = a_i$

Consideriamo il caso $i = 1$, stimo lo scarto

$\varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots, x_n) - \varphi(x_1, \ldots, x_n)$



Γ = curva da p a p_Δ (non importa quale).

$$\varphi(x_1+\Delta x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{\gamma\cup\Gamma} \omega \underset{\uparrow}{=} \int_\gamma \omega + \int_\Gamma \omega$$

additività degli integrali

$$\varphi(x_1+\Delta x_1, x_2, \dots, x_n) - \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_\gamma \omega + \int_\Gamma \omega - \int_\gamma \omega \overset{(*)}{=}$$

$$= \int_\Gamma \omega$$

Scelgo una parametrizzazione conveniente per Γ

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1 + t\Delta x_1 \\ x_2(t) = x_2 \\ \quad | \\ x_n(t) = x_n \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \qquad \dot{x}(t) = (\Delta x_1, 0, \dots, 0)$$

Quindi

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^1 a_1(x_1 + t\Delta x_1, x_2, \dots, x_n)\Delta x_1 \, dt \qquad (**)$$

Da $(*)$ e $(**)$ trovo che

$$\frac{\varphi(x_1+\Delta x_1, x_2, \dots, x_n) - \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_1} = \int_0^1 a_1(x_1 + t\Delta x_1, x_2, \dots, x_n)\,dt$$

Facendo tendere $\Delta x_1 \to 0$ e applicando il teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale$^{(*)}$ trovo che

$$= \int_0^1 a_1(x_1, \dots, x_n)\,dt = a_1(x_1, \dots, x_n)$$

$$\Rightarrow \quad \partial_{x_1}\varphi = a_1$$

Questo vale $\forall i = 1, \dots, n \qquad \partial_{x_i}\varphi = a_i$

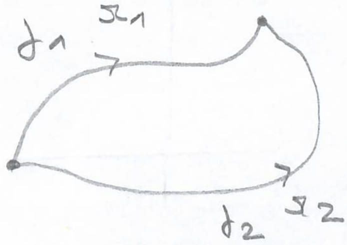
φ è di classe C^1 (le a_i sono continue per ipotesi) quindi è differenziabile e vale $d\varphi = \omega$.

✱ Teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale

Consideriamo $f: E=[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ continua in E, allora la funzione $\phi(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ è continua in $[c,d]$ e vale

$$\lim_{y\to y_0}\phi(y)=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx$$

3) Consideriamo due curve regolari



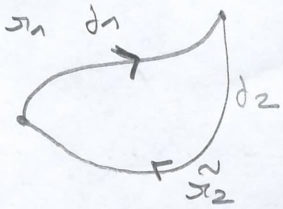
$r_1: [a,b]\to\mathbb{R}^n$

$r_2\ [\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$

t.c. $r_1(a)=r_2(\alpha)$ e $r_1(b)=r_2(\beta)$

Vogliamo far vedere che $\int_{\gamma_1}\omega=\int_{\gamma_2}\omega$

Per poter utilizzare l'ipotesi vogliamo costruire una curva chiusa a partire da γ_1 e γ_2



Voglio invertire il verso di percorrenza di r_2 e parametrizzarla su un intervallo $[b,c]$

$\tilde{r}_2: [b,c]\to\mathbb{R}^n$

Allora

$$t:[b,c]\longrightarrow[\alpha,\beta]$$
$$\tau\longmapsto -\frac{\beta-\alpha}{c-d}\,\tau+\frac{c\beta-b\alpha}{c-b}$$

Si ha che $t'(\tau)<0$ $\quad t(b)=\beta$, $t(c)=\alpha$

Quindi definisco

$\tilde{r}_2(\tau)=r_2(t(\tau))$ $\Rightarrow$ ho cambiato orientazione

$$\int_{\gamma_2}\omega=-\int_{\tilde{\gamma}_2}\omega$$

$\gamma=\gamma_1\cup\tilde{\gamma}_2$ è una curva chiusa param. su $[a,c]$

$$0\underset{\text{ipotesi}}{=}\int_\gamma\omega\underset{\text{additt.}}{=}\int_{\gamma_1}\omega+\int_{\tilde{\gamma}_2}\omega=\int_{\gamma_1}\omega-\int_{\gamma_2}\omega$$

$$\Rightarrow\int_{\gamma_1}\omega=\int_{\gamma_2}\omega$$

Def: Una forma differenziale $\omega: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$ di classe C^1 si dice chiusa se $\partial x_k a_i(x) = \partial x_i a_k(x)$ $\forall x \in \Omega$, $i,k = 1, \dots, n$.
(dove $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx_i$).

Oss. In dimensione $n = 3$

$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx_i$ è chiusa $\longleftrightarrow$ $F(x_1, x_2, x_3) = (a_1(x), a_2(x), a_3(x))$ è un campo irrotazionale cioè $\mathrm{rot}\, F = 0$ in Ω.

Proposizione: (Condizione necessaria per l'esattezza di una forma diff. lineare)
Sia $\omega: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$ di classe C^1 è esatta allora è chiusa in Ω.

dim: Poiché ω è esatta ammette un potenziale f ($a_i(x) = \partial x_i f(x)$)
Da cui trovo

$$\partial x_k a_i(x) = \partial x_k \partial x_i f(x) \underset{\uparrow}{=} \partial x_i \partial x_k f(x) = \partial x_i a_k(x) \qquad \blacksquare$$

teorema di Schwartz invert. ordine deriv.

Quindi per $n = 3$

ω è esatta in Ω $\longleftrightarrow$ $F(x) = (a_1(x), a_2(x), a_3(x))$ F è un campo conservativo in Ω

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Downarrow$

ω è chiusa in Ω $\qquad$ F è un campo irrotazionale in Ω

Ci chiediamo: vale anche il viceversa?
Cioè chiusa $\overset{?}{\Rightarrow}$ esatta $\to$ In generale no.

Esempio:
Sia $\omega: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ $\quad (\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.

$x \longmapsto \omega(x,y) = a_1(x,y)\, dx + a_2(x,y)\, dy$

con $a_1(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $\quad a_2(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

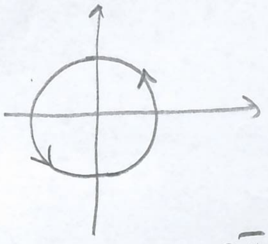
Controlliamo se è chiusa

$$\partial y\, a_1(x,y) = \partial y\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\partial x\, a_2(x,y) = \partial x\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\Rightarrow$ è chiusa.

Controlliamo se è esatta. In virtù del teorema di caratterizz. dimostrato in precedenza facciamo vedere che non è esatta.



Curva:

$\gamma(\vartheta) = (\cos(\vartheta), \sin(\vartheta)) = \partial B_1 \rightarrow$ è una curva chiusa

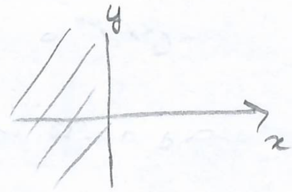
$0 \leq \vartheta \leq 2\pi$

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin\vartheta)}{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)} \cdot (-\sin\vartheta) + \frac{(\cos\vartheta)(\cos\vartheta)}{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta} \, d\vartheta = \int_0^{2\pi} 1 \, d\vartheta = 2\pi \neq 0$$

$\Rightarrow$ non è esatta (se lo fosse avrei dovuto avere $\int_\gamma \omega = 0$).

Oss: Se cambio la geometria del problema, ovvero se cambio l'insieme di definizione Ω di ω allora cambiano anche le proprietà di ω, infatti

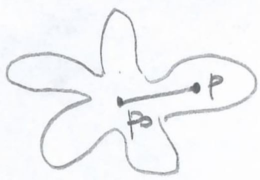
$\omega: \underbrace{\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}}_{\text{semipiano}} \longrightarrow (\mathbb{R}^2)^*$



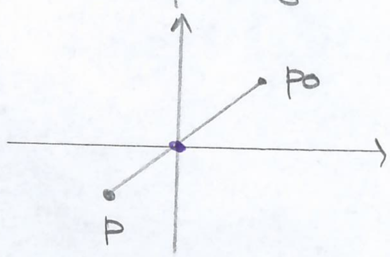
$U(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ risulta essere una primitiva.

Oss: Affinchè chiusa $\Rightarrow$ esatta devo aggiungere opportune ipotesi topologiche su Ω.

Def: Si dice che $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è stellato se esiste un punto $p_0 \in \Omega$ tale che per ogni punto $p \in \Omega$, il segmento $\sigma(t) = p_0 + t(p - p_0)$ (che congiunge p_0 a p) è tutto contenuto in Ω.

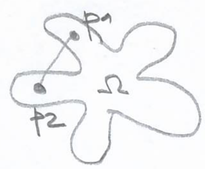


Oss: • $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$ non è un insieme stellato, infatti comunque fisso $p_0 \in \Omega$ tutti i punti "di tipo p" sono tali che il segmento $\overline{p_0 p}$ non è interam. contenuto in Ω, perchè $(0,0) \notin \Omega$.

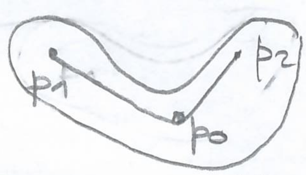


• Se Ω è un insieme convesso (cioè ogni coppia di punti $p_1, p_2 \in \Omega$ è tale che $\overline{p_1 p_2} \subset \Omega$) è un insieme stellato (in particolare è stellato rispetto ogni suo punto).

Il viceversa non è vero ovviamente, cioè un insieme stellato non è necessariam. convesso



- Se Ω è un insieme stellato allora è anche connesso. In particolare Ω è anche connesso per archi, perché presi $p_1, p_2 \in \Omega$ posso costruire un cammino $[p_1, p_0] \cup [p_0, p_2]$ interam. contenuto in Ω.



Il viceversa non è vero, un insieme connesso non è detto che sia stellato. Si pensi ad una corona circolare o al piano bucato.

Torniamo al nostro problema ovvero stabilire delle proprietà topologiche su Ω affinché (esatta $\Leftrightarrow$ chiusa).

Teorema (Lemma di Poincaré per insiemi stellati).

Sia Ω un insieme aperto e stellato e sia $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx_i$ una forma differenziale lineare di classe C^1 in Ω.
Allora ω è esatta se e solo se è chiusa.

dim: • ω esatta $\Rightarrow$ ω chiusa (già dimostrato)

• Facciamo vedere il viceversa, ovvero costruiamo un potenziale: $U : \Omega \to \mathbb{R}$ t.c. $dU = \omega$.
A meno di traslazioni possiamo supporre che Ω sia stellato rispetto l'origine ($p_0 = (0, \dots, 0)$).
Dato un punto $p = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, indico con Γ il segmento $[0, p]$ che per ipotesi essere interam. contenuto in Ω. Γ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1(t) = t x_1 \\ \vdots \\ x_n(t) = t x_n \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1 \qquad \begin{matrix} x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \\ \dot{x}(t) = (x_1, \dots, x_n) \end{matrix}$$

Definiamo il candidato potenziale

$$U(x_1, \dots, x_n) = \int_\Gamma \omega = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} a_i(x(t)) \cdot \dot{x}_i(t)\, dt$$

Dimostriamo ora che $\partial_{x_i} U(x) = a_i(x) \quad x \in \Omega$

Vediamo per $i=1$.

$$\partial_{x_1} U(x) = \partial_{x_1} \int_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \cdot x_i'(t)\, dt =$$

$$= \partial_{x_1} \int_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot x_i \, dt =$$

$$= \partial_{x_1} \int_0^1 a_1(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot x_1 + \ldots + a_n(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot x_n \, dt =$$

Poiché ω è di classe C^1 per ipotesi, posso derivare sotto segno di integrale

$$= \int_0^1 \partial_{x_1} \left[a_1(tx_1, \ldots, tx_n)\, x_1 + \ldots + a_n(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot x_n \right] dt =$$

$$= \int_0^1 \partial_{x_1} a_1(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot t \cdot x_1 + a_1(tx_1, \ldots, tx_n) +$$

$$+ \partial_{x_1} a_n(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot tx_n \Big] dt =$$

Uso il fatto che ω è chiusa quindi $\partial_{x_1} a_j = \partial_{x_j} a_1 \quad j = 2, \ldots, n$

$$= \int_0^1 a_1(tx_1, \ldots, tx_n) + \partial_{x_1} a_1(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot tx_1 + \ldots + \partial_{x_n} a_1(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot tx_n \Big] dt$$

$$= \int_0^1 a_1(tx_1, \ldots, tx_n) + \frac{d}{dt}\left(a_1(tx_1, \ldots, tx_n) \right) \cdot t \quad dt \overset{\text{integr. per parti}}{=}$$

$$= \int_0^1 \cancel{a_1(tx_1, \ldots, tx_n)} - \cancel{a_1(tx_1, \ldots, tx_n)} \cdot 1 \, dt + a_1(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot t \Big|_0^1$$

$$= a_1(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow U \text{ è di classe } C^1 \text{ (anche } C^2) \Rightarrow dU = \omega$$

Teorema di deriv. sotto segno di integr.

Cons $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continua con $\partial_y f$ continua. Allora (x, y)

$g(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ è di classe $C^1[a,b]$ e vale

$$g'(y) = \int_a^b \partial_y f(x,y)\,dx. \quad \text{Quindi}$$

$$\partial_y \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \partial_y f(x,y)\,dx$$

Consideriamo una forma differenziale esatta in $\mathbb{R}^2$
$$\omega(x,y) = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$$
Per determinare una sua primitiva possiamo:

(1) Cerco $U(x,y)$ t.c.

$$\begin{cases} \partial_x U(x,y) = a(x,y) & a) \\ \partial_y U(x,y) = b(x,y) & b) \end{cases}$$

Integrando a) rispetto a x

$$U(x,y) = \underbrace{\int^x a(x,y)\,dx}_{\text{una primitiva di } a(\cdot,y)} + \overbrace{g(y)}^{\text{incognita per il momento}}$$

y pensa fissa

Imponiamo (b)

$$\underbrace{\partial_y U(x,y)}_{= b(x,y)} = \partial_y \int a(x,y)\,dx + g'(y)$$

da cui trovo

$$g'(y) = \partial_y \left[\int a(x,y)\,dx\right] - b(x,y) = \text{dipende solo da } y$$

$\partial_y a(x,y) = \partial_x b(x,y)$

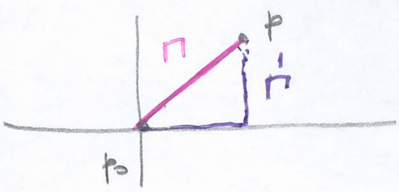
Integrando rispetto y trovo $g(y)$, e quindi $U(x,y)$

(2) Il Lemma di Poincaré mi dà anche dei suggerimenti su come "costruire il potenziale"

$$U(x,y) = \int_\Gamma \omega$$

dove Γ è il segmento che appare nella dimostrazione del Lemma

Poiché ω è esatta per il teorema di caratterizzazione posso sostituire Γ con un altro cammino Γ' avente stesso punto iniziale e stesso punto finale (ammesso che $\Gamma' \subset \Omega$) se è più comodo.



Quindi $U(x,y) = \int_{\Gamma'} \omega$

Es. $\omega(x,y) = (2e^y - ye^x)\,dx + (2xe^y - e^x)\,dy$.

Verificare che è esatta e determinare una primitiva.

$\Omega = \mathbb{R}^2$ stellato, $\omega \in C^1$ quindi basta verificare che è chiusa.

$$\left.\begin{aligned} \partial_y(2e^y - ye^x) &= 2e^y - e^x \\ \partial_x(2xe^y - e^x) &= 2e^y - e^x \end{aligned}\right\} = \checkmark$$

Lemma di Poincaré $\Rightarrow$ ω è esatta

Costruiamo una primitiva

Metodo 1

$$U(x,y) = \int \overbrace{(2e^y - ye^x)}^{a(x,y)}\,dx + g(y)$$

$$= 2e^y \cdot x - ye^x + g(y)$$

$$\partial_y U(x,y) = 2e^y \cdot x - e^x + g'(y) \overset{\text{lo impongo.}}{=} \overbrace{2xe^y - e^x}^{b(x,y)}$$

$$\Rightarrow g'(y) = \underbrace{(2xe^y - e^x)}_{b(x,y)} + \underbrace{e^x - 2e^y \cdot x}_{} = 0$$

derivata risp. a y di una primitiva di $a(\cdot,y)$

$\partial_y \int a(x,y)\,dy$

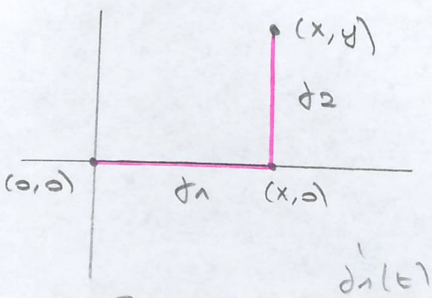
$\Rightarrow g(y) = \text{costante}$

Quindi una primitiva è $U(x,y) = 2e^y \cdot x - ye^x$
$(g(y) = 0)$.

Metodo 2

Considero

$U(x,y) = \int_\Gamma \omega(x,y)$ dove $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$



$$\int_\Gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

$\gamma_1'(t) = (1,0)$

$\gamma_1: \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases} \quad 0 \le t \le x$

$\gamma_2'(t) = (0,1)$

$\gamma_2: \begin{cases} x(t) = x \\ y(t) = t \end{cases} \quad 0 \le t \le y$

$$U(x,y) = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_0^x (2e^0 - 0e^t)\,dt + \int_0^y (2xe^t - e^x)\cdot 1\,dt =$$

$$= 2xe^y - e^x \cdot y.$$

Es. Consideriamo

$$\omega(x,y) = (3x^2+4y^3)\,dx + (12y^2x+2y)\,dy$$

$\Omega = \mathbb{R}^2$, $\omega \in C^1$, per vedere che è esatto basta verificare che sia chiusa

$$\left.\begin{array}{l}\partial_y(3x^2+4y^3) = 12y^2 \\ \partial_x(12y^2x+2y) = 12y^2\end{array}\right\} \checkmark \Rightarrow \text{è esatta.}$$

Cerchiamo una primitiva con il metodo 1

$$U(x,y) = \int a(x,y)\,dx + g(y) = \int (3x^2+4y^3)\,dx + g(y) = x^3 + 4y^3 \cdot x + g(y)$$

$$\underbrace{12y^2 \cdot x + 2y}_{b(x,y)} \underset{\text{impongo}}{=} \partial_y U(x,y) = 12y^2 \cdot x + g'(y)$$

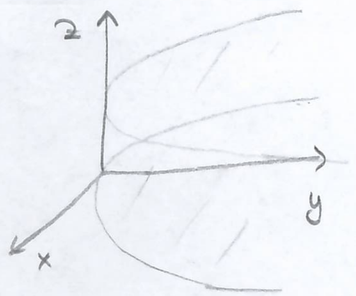
$$\Rightarrow g'(y) = +2y \qquad g(y) = y^2$$

$$\Rightarrow U(x,y) = x^3 + 4y^3 \cdot x + y^2$$

Oss: Se una forma differenziale lineare ω è chiusa in un aperto allora è localmente esatta, ovvero è esatta in un intorno sferico (quindi convesso) di ogni suo punto.

Es. Costruiamo un potenziale per un caso 3-dimens.

Cons. $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) : y = x^2\} = \underset{A_1}{\{y < x^2\}} \cup \underset{A_2}{\underbrace{\{y > x^2\}}}$



↳ questa componente A_2 è un insieme stellato.

$$\omega : \Omega \longrightarrow (\mathbb{R}^3)^*$$

$$(x,y,z) \longmapsto \underbrace{\left(-\frac{2x}{y-x^2}\right)}_{F_1} dx + \underbrace{\left(\frac{1}{y-x^2}\right)}_{F_2} dy + \underbrace{1}_{F_3}\, dz$$

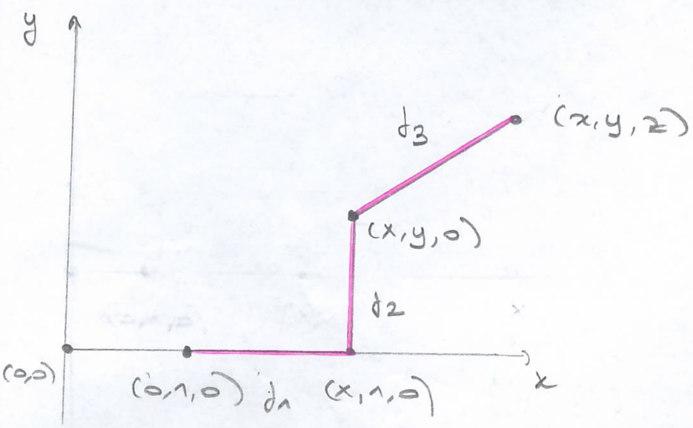
Vediamo che la forma è chiusa

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\partial_y F_3 - \partial_z F_2 ,\ \partial_z F_1 - \partial_x F_3 ,\ \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \right)$$

- $\partial_y F_3 - \partial_z F_2 = 0 - 0 = 0$ ✓
- $\partial_z F_1 - \partial_x F_3 = 0 - 0 = 0$ ✓
- $\partial_x F_2 - \partial_y F_1 = \dfrac{1}{(y-x^2)^2} \cdot 2x - \dfrac{+2x}{(y-x^2)^2} = 0$ ✓

$\mathrm{rot}\, \overline{F} = 0 \Rightarrow \omega$ è chiusa.

Costruiamo un potenziale in A_2 cioè la componente dellata, (su cui sappiamo quindi che ω è esatta), usando il metodo di integrazione lungo i cammini.



$\gamma_1(t) = (t, 1, 0) \qquad 0 \le t \le x$

$\gamma_2(t) = (x, t, 0) \qquad 1 \le t \le y$

$\gamma_3(t) = (x,y,0) + t\left[(x,y,z) - (x,y,0) \right] \qquad 0 \le t \le 1$

$= (x, y, tz)$

$\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \qquad \gamma_1' = (1,0,0) \qquad \gamma_2' = (0,1,0) \qquad \gamma_3' = (0,0,z)$

$$U(x,y,z) = \int_\Gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega =$$

$$= \int_0^x \frac{-2t}{1-t^2} \, dt + \int_1^y \frac{1}{t-x^2} \cdot 1 \, dt + \int_0^1 1 \cdot z \, dt =$$

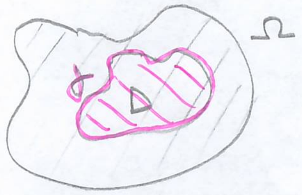
$$= \dots = \log\left(y - x^2\right) + z$$

$\hookrightarrow > 0$ sono in A_2

Oss: Vedremo in seguito che ω è esatta anche in A_1 essendo un insieme semplicemente connesso.

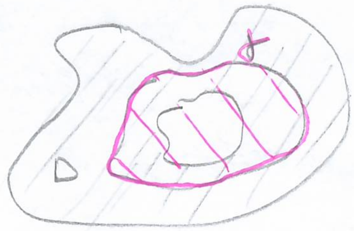
Una condizione più generale di natura topologica con cui si può riformulare il Lemma di Poincaré è la semplice connessione.

- In $\mathbb{R}^2$, dire che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso significa che
  - i) Ω è connesso
  - ii) ogni curva semplice e chiusa contenuta in Ω è la frontiera di un insieme limitato D interamente contenuto in Ω



$\gamma = \partial D$
$D \subset \Omega$

Ω semp connesso



Se Ω ha un "buco", D non è interam. contenuto in Ω

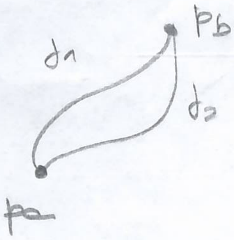
Ω ? non è sempl. connesso.

- In $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ la condizione si generalizza con il concetto di omotopia.

Cons un insieme connesso Ω di $\mathbb{R}^n$ e siano γ_1 e γ_2 due curve contenute in Ω di equazione

$\gamma_1 \to r_1(t) \qquad t \in [a,b]$

$\gamma_2 \to r_2(t)$



$r_1(a) = r_2(a) = p_a \qquad r_1(b) = r_2(b) = p_b$

Definizione

Le due curve γ_1 e γ_2 si dicono omotope in Ω se esiste una funzione continua

$$\varphi : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(t,\lambda) \longmapsto \varphi(t,\lambda) \qquad \text{tale che}$$

i) $\varphi(t,0) = r_1(t) \qquad \varphi(t,1) = r_2(t) \quad , \quad \forall t \in [a,b]$

ii) $\varphi(a,\lambda) = p_a \qquad \varphi(b,\lambda) = p_b \qquad \forall \lambda \in [0,1]$

iii) $\forall \lambda \in [0,1]$ la curva γ_λ di equazione $\varphi = \varphi(t,\lambda)$ sia tutta contenuta in Ω

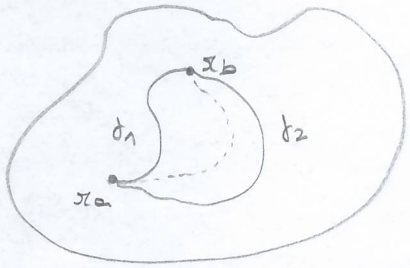
Inoltre

Se γ_1 e γ_2 sono due curve chiuse la ii) è sostituita dalla condizione ii bis) $\varphi(a,\lambda) = \varphi(b,\lambda) \qquad \forall \lambda \in [0,1]$

Def: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso. Allora Ω si dice semplicemente connesso se due curve qualsiasi contenute in Ω aventi gli stessi estremi sono omotope.

[Si può anche dare la definizione in termini di curve chiuse.

Ω connesso si dice semplicemente connesso se ogni curva chiusa contenuta in Ω è omotopa a una curva costante (cioè, che si riduce a un solo punto)].



Date γ_1 e γ_2 in Ω, prendo come omotopa
$\varphi(t,\lambda) = \underbrace{\lambda\gamma_1(t) + (1-\lambda)\gamma_2(t)}_{\in\Omega}$. comb. convessa

Oss:

- In $\mathbb{R}^n$ sono semp. conn.: gli insiemi convessi, gli insiemi stellati, ...
- In $\mathbb{R}^2$ sono semplicemente connessi: cerchi, ellissi, $\mathbb{R}^2$, il piano privato di una semiretta, ...
  Mentre non sono semplicemente connessi: la corona circolare, o comunque degli insiemi che presentano dei "buchi".
- In $\mathbb{R}^3$ sono semplicemente connessi: sfere, ellissoidi, poliedri convessi, una corona sferica (differenza di due sfere concentriche di diverso raggio), un semispazio, tutto lo spazio privato di un insieme finito di punti.
  Mentre non sono semplicemente connessi: il toro, la sfera privata di un diametro, lo spazio privato di una retta

Oss: Stellato $\Rightarrow$ semplicemente connesso

$\not\Leftarrow$ ↳ NO! $\underbrace{\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0)\}}$ $\to$ semp. connesso ma non stellato.

Teorema (Lemma di Poincaré per insiemi semplicemente connessi).

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme semplicemente connesso e sia
$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx_i$ una f. d. l. di classe $C^1(\Omega)$.

Allora ω è esatta se e solo se ω è chiusa.

dim: • ω esatta $\Rightarrow$ ω chiusa (già visto).

• ω chiusa $\Rightarrow$ ω esatta.
In base al teorema di caratt. di f. d. l. esatte basta far vedere che, date due curve γ_0 e γ_1 aventi estremi in comune e contenute in Ω si abbia $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$.

Poiché Ω è semplicemente connesso, le due curve γ_0 e γ_1 sono omotope. Inoltre assumiamo l'ipotesi aggiuntiva che la funzione φ della definizione di omotopia sia di classe $C^1([a,b] \times [0,1])$ e che abbia derivate miste continue.
(con un argomento di approssimazione si può rimuovere quest'ipotesi aggiuntiva).

Quindi ho $\varphi(t,0) = \gamma_0(t)$ e $\varphi(t,1) = \gamma_1(t)$
$\varphi(t,\lambda) = \gamma_\lambda(t)$

Definisco

$$I(\lambda) = \int_{\gamma_\lambda} \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} a_i(\varphi(t,\lambda))\, \partial_t \varphi_i(t,\lambda)\, dt.$$

$\varphi(\cdot,\lambda)$

Noi vogliamo far vedere che

$$I(0) = \int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega = I(1) \qquad (Th)$$

Quindi in particolare se facciamo vedere che $I(\lambda)$ è costante troviamo (Th).
Grazie alle ipotesi aggiuntive sappiamo che $I(\lambda)$ è differenziabile, quindi basta dimostrare che

$$\frac{dI}{d\lambda} = 0$$

Applichiamo il teorema di derivazione sotto segno di integrale (le ipotesi aggiuntive me lo consentono).

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int_a^b \frac{d}{d\lambda}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i(\varphi(t,\lambda))\, \partial_t \varphi_i(t,\lambda)\Big) dt =$$

$\varphi_1(t,\lambda), \dots, \varphi_n(t,\lambda)$

$$\frac{d}{d\lambda}\Big[a_1(\varphi(t,\lambda))\, \partial_t \varphi_1(t,\lambda)\Big] = \partial_{x_1} a_1 \cdot \partial_\lambda \varphi_1 \cdot \partial_t \varphi_1 + \dots + \partial_{x_n} a_1 \cdot \partial_\lambda \varphi_n \cdot \partial_t \varphi_1$$
$$+ a_1 \cdot \partial_{\lambda t} \varphi_1$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left[a_n(\varphi(t,\lambda))\cdot\partial_t\varphi_n(t,\lambda)\right] = \partial_{x_1}a_n\cdot\partial_\lambda\varphi_1\cdot\partial_t\varphi_n + \ldots + \partial_{x_n}a_n\cdot\partial_\lambda\varphi_n\cdot\partial_t\varphi_n$$
$$+ a_n\cdot\partial_{\lambda,t}\varphi_n$$

$$= \int_a^b \partial_{x_1}a_1\cdot\partial_\lambda\varphi_1\,\partial_t\varphi_1 + \ldots + \partial_{x_n}a_1\partial_\lambda\varphi_n\partial_t\varphi_1 +$$

$$+\partial_{x_1}a_n\cdot\partial_\lambda\varphi_1\cdot\partial_t\varphi_n + \ldots + \partial_{x_n}a_n\cdot\partial_\lambda\varphi_n\cdot\partial_t\varphi_n +$$

$$+ a_1\partial_{\lambda,t}\varphi_1 + \ldots + a_n\partial_{\lambda,t}\varphi_n =$$

Usando il fatto che ω è chiusa, cioè

$$\partial_{x_k}a_i = \partial_{x_i}a_k \qquad i,k = 1,\ldots,n$$

trovo che

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left\{a_1\partial_\lambda\varphi_1 + \ldots + a_n\partial_\lambda\varphi_n\right\}dt =$$

$\to$ Convinciamoci di questo fatto per $n=2$

$$\partial_{x_1}a_1\partial_\lambda\varphi_1\partial_t\varphi_1 + \boxed{\partial_{x_2}a_1}\cdot\partial_\lambda\varphi_2\partial_t\varphi_1 +$$

$$+\boxed{\partial_{x_1}a_2}\cdot\partial_\lambda\varphi_1\cdot\partial_t\varphi_2 + \partial_{x_2}a_2\partial_\lambda\varphi_2\cdot\partial_t\varphi_2 +$$

$$+ a_1\partial_{\lambda,t}\varphi_1 + a_2\partial_{\lambda,t}\varphi_2 \;\boxed{=}$$

Poiché ω è chiusa $\boxed{\partial_{x_2}a_1 = \partial_{x_1}a_2}$ allora ho che

$$\boxed{=}\;\partial_{x_1}a_1\cdot\partial_\lambda\varphi_1\partial_t\varphi_1 + \underline{\partial_{x_1}a_2\partial_\lambda\varphi_2\partial_t\varphi_1}$$

$$+\partial_{x_2}a_1\partial_\lambda\varphi_1\cdot\partial_t\varphi_2 + \underline{\partial_{x_2}a_2\partial_\lambda\varphi_2\partial_t\varphi_2} +$$

$$+ a_1\partial_{\lambda,t}\varphi_1 + \underline{a_2\partial_{\lambda,t}\varphi_2} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(a_1\partial_\lambda\varphi_1 + \underline{a_2\cdot\partial_\lambda\varphi_2}\right)$$

Ritorniamo al caso generale, n qualsiasi

$$= a_1 \partial_\lambda \varphi_1 + \dots + a_n \partial_\lambda \varphi_n \Big|_{t=a}^{t=b} =$$

$$= a_1(\varphi(b,\lambda))\partial_\lambda \varphi_1(b,\lambda) + \dots + a_n(\varphi(b,\lambda))\cdot \partial_\lambda \varphi_n(b,\lambda) -$$

$$- a_1(\varphi(a,\lambda))\partial_\lambda \varphi_1(a,\lambda) + \dots + a_n(\varphi(a,\lambda))\partial_\lambda \varphi_n(a,\lambda) =$$

Dalla condizione ii) di omotopia si ha che

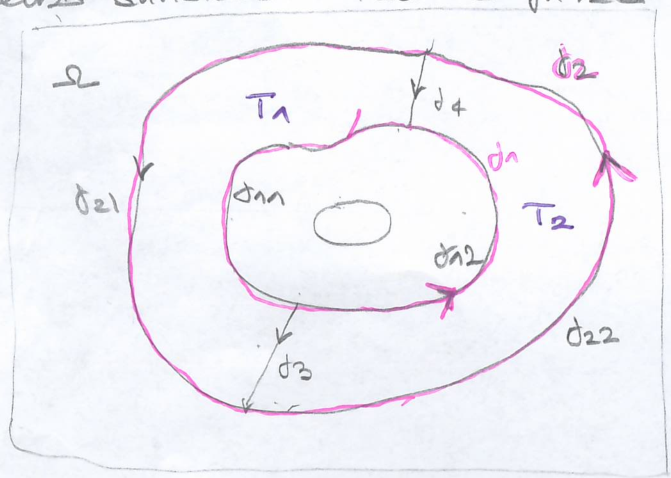
$$\varphi(b,\lambda) = b \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad \varphi(a,\lambda) = a \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

Quindi $\partial_\lambda \varphi_i(b,\lambda) = \partial_\lambda \varphi_i(a,\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in [0,1]$

$= 0 \Rightarrow I(\lambda) = \text{costante} \Rightarrow \int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$

$\square$

Ex. Siano γ_1, γ_2 due curve semplici, chiuse, regolari in $\mathbb{R}^2$ orientate in senso antiorario tali che γ_1 sia contenuta nella regione interna a γ_2.



Sia T la regione compresa tra γ_1 e γ_2 e sia

$$\omega(x,y) = a(x,y)dx + b(x,y)dy$$

una forma differenziale chiusa, definita in un aperto $\Omega \supset T$.

Facciamo vedere che $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.

dim Divido la regione T in due regioni T_1 e T_2 semplicem. connesse

$T = T_1 \cup T_2$

ω su T_1 è chiusa $\Rightarrow \omega$ è esatta in T_1

ω " T_2 " " $\Rightarrow$ " " " " T_2

$$\int_{\partial T_1} \omega = \int_{\gamma_{21}} \omega - \int_{\gamma_3} \omega - \int_{\gamma_{11}} \omega - \int_{\gamma_4} \omega = 0$$

$$\int_{\partial T_2} \omega = \int_{\gamma_3} \omega + \int_{\gamma_{22}} \omega + \int_{\gamma_4} \omega - \int_{\gamma_{12}} \omega = 0$$

Sommando membro a membro

$$0 = \underbrace{\int_{\gamma_{21}} \omega + \int_{\gamma_{22}} \omega}_{\gamma_2} - \underbrace{\int_{\gamma_{11}} \omega - \int_{\gamma_{12}} \omega}_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_1} \omega$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega .$$

Oss: È vero che una f.d.l. in un dominio non semplicemente connesso non può essere esatta?
No è falso! Si pensi ad esempio ad $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e

$$\omega(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{tale per cui}$$

$U(x,y) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2)$ è un potenziale.

Ex. Dato $r>0$ $r \neq 1$, consideriamo

$$\gamma_r(t) = (1 + r\cos t, r \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]. \text{ e}$$

$$\omega(x,y) = \frac{(x-y)\,dx}{x^2+y^2} + \frac{(x+y)\,dy}{x^2+y^2}$$

Dimostrare che ω è chiusa ma non esatta.
Determinare al variare di r il valore $\int_{\gamma_r} \omega$.

dim: Osservo che

$$\omega(x,y) = \omega_1(x,y) + \omega_2(x,y) \quad \text{con}$$

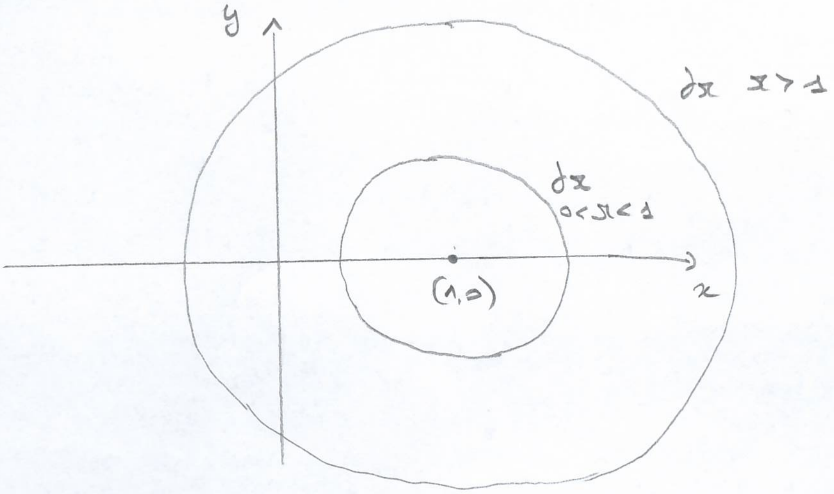
$$\omega_1(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy \quad \text{che è esatta quindi chiusa}$$

$$\omega_2(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy \quad \text{che è chiusa (già verificato)}$$

Di conseguenza per linearità ω è chiusa.
Se ω fosse esatta allora esisterebbe un potenziale U per ω e dunque

$$V(x,y) = U(x,y) - \ln(x^2+y^2)$$

sarebbe un potenziale per ω_2 $\Rightarrow$ assurdo $\Rightarrow$ ω_2 non è esatta!

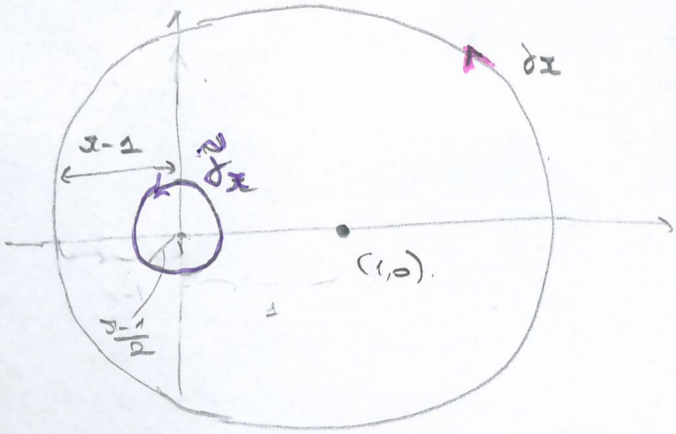


Distinguiamo due casi

- Se $0<x<1$ allora γ_x giace in una regione semplicemente connessa (il semipiano) dunque essendo ω chiusa è anche ivi esatta dunque

$$\int_{\gamma_x}\omega=0$$

- Se $x>1$ allora γ_x abbraccia anche la singolarità quindi sono in un insieme non semplicem. connesso.



Poiché ω è chiusa per semplificare i conti posso usare il risultato dell'esercizio precedente, ovvero integro su una curva chiusa del tipo $\tilde{\gamma}_x$

$$\tilde{\gamma}_x \begin{cases} x(t) = \left(\frac{x-1}{2}\right)\cdot\cos(t) \\ y(t) = \left(\frac{x-1}{2}\right)\sin(t) \end{cases} \qquad 0\le t\le 2\pi$$

$$\int_{\tilde{\gamma}_x}\omega = \underbrace{\int_{\tilde{\gamma}_x}\omega_1}_{=0\ \ \omega_1\ \text{è esatta}} + \int_{\tilde{\gamma}_x}\omega_2 = \int_{\tilde{\gamma}_x}\omega_2 = 2\pi$$

Oss: Se la forma differenziale lineare

$\omega(x,y) = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$ non è esatta si può pensare di

determinare una funzione $\mu = \mu(x,y)$ tale che

$\mu\omega = \mu a\, dx + \mu b\, dy$

sia esatta. Una funzione di tal tipo si chiama fattore integrante.