

Tutorato di Analisi 3B

A.A. 2017/2018

6° foglio di esercizi

Esercizio 1. Si calcolino le coordinate del baricentro e il momento di inerzia rispetto all'asse z dell'elica (supposta omogenea di densità 1) di equazione

$$\mathbf{r}(t) = h \cos(t)\mathbf{i} + h \sin(t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t \in [-2\pi, 2\pi], \quad h \in \mathbb{R}^+$$

Esercizio 2. Calcolare

$$\int_{\gamma} ((x^2 + y^2))^2 ds,$$

dove γ è la curva di equazione polare

$$\rho = e^{2\theta}, \quad \theta \in (-\infty, 0]$$

Esercizio 3. Dati il campo di forze

$$\mathbf{F} = (y - z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$$

e la curva

$$\gamma: \mathbf{r}(t) = 2 \cos(t)\mathbf{i} + \sqrt{2} \sin(t)\mathbf{j} + \sqrt{2} \sin(t)\mathbf{k}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

si calcoli il lavoro di \mathbf{F} lungo γ .

Esercizio 4. Si dica se le seguenti forme differenziali sono esatte nel dominio indicato, calcolandone quando possibile un potenziale:

(a) $\omega = xy dx + \frac{x^2}{2} dy, E = \mathbb{R}^2$

(b) $\omega = \left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}\right) dx - \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{y^2}\right) dy, E = \{x \neq 0, y \neq 0\}$

Esercizio 5. Si consideri la forma in \mathbb{R}^2

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

(a) Si dica se è chiusa nel dominio di definizione

(b) Si dica se è esatta nel dominio di definizione

(c) Si trovi un potenziale U per ω definito su un aperto massimale che contiene $(1, 0)$, tale che $U(1, 0) = 0$

- (d) Si calcoli l'integrale di ω su una curva regolare a tratti che percorre $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} = 1\}$ una volta in senso orario.

Esercizio 6. Si calcoli il lavoro del campo

$$\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + \frac{x^2}{2}\mathbf{j}$$

lungo la curva

$$\gamma: \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \arctan \frac{1 - \cos(3t)}{1 - \sin(t)^2} \mathbf{j}, \quad t \in [0, \pi].$$

Esercizio 7. (*Campo Coulombiano*)

Si consideri il campo di forze

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\alpha \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- (a) Si stabilisca se F è irrotazionale nel dominio di definizione
- (b) Si stabilisca se F è conservativo, ed eventualmente trovarne il potenziale che si annulli all'infinito.

Esercizio 8. Calcolare

$$\int_{\gamma} x \, dy$$

dove γ è la curva di equazione $\mathbf{r}(t) = \cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j}$