CLASSIFICAZIONE DI CONICHE PIANE

Lavoreremo sui campi $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Richiami su piano proiettivo: $\mathbb{P}^2_K = \dfrac{K^3 - \{0\}}{\sim}$

dove $v \sim w \iff \exists\, \lambda \in \underbrace{K^*}_{\text{scalari } \neq 0} : w = \lambda v$

Fissata una base di K^3, ad esempio la base canonica $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, se v ha coordinate $\begin{pmatrix}v_0\\v_1\\v_2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

e $P = [v] \in \mathbb{P}^2_K$, diciamo che $[v_0, v_1, v_2]$ sono le coordinate omogenee di P.

Sono determinate a meno di un fattore di proporzionalità:

$$[v_0, v_1, v_2] = [\lambda v_0, \lambda v_1, \lambda v_2], \quad \lambda \in K^*.$$

MODELLO TOPOLOGICO PER IL PIANO PROIETTIVO REALE

$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ si può identificare con $S^2 / \sim_0$

dove: $S^2 = \{(x,y,z) \mid \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{= d((x,y,z),(0,0,0))^2} = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ distanza euclidea

S^2 è la sfera unitaria, centrata nell'origine,

e $\sim_a$ è la relazione di equivalenza antipodale:

$$P \sim_a Q \iff P = Q \text{ opp. } -P = Q$$ (le coordinate di Q sono opposte di quelle di P)

Infatti: ogni retta di $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine interseca la sfera esattamente in 2 punti e sono antipodali:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ \begin{cases} x = t v_1 \\ y = t v_2 \\ z = t v_3 \end{cases} \end{cases} \iff \begin{cases} t^2(v_1^2+v_2^2+v_3^2)=1 \\ \begin{cases} x = t v_1 \\ y = t v_2 \\ z = t v_3 \end{cases} \end{cases}$$

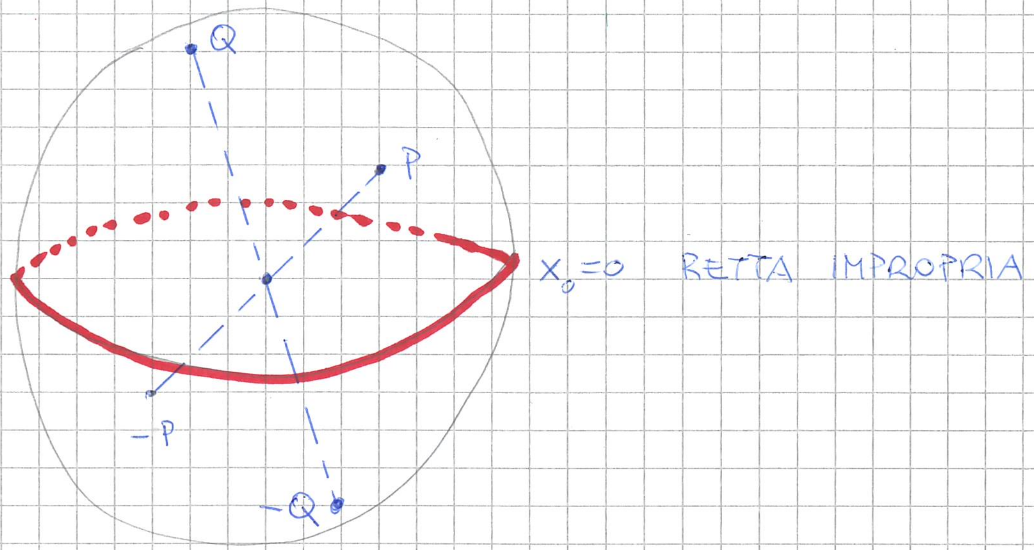
con $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

un vettore direzione, che genera la giacitura

$$\iff t = \pm \frac{1}{\|v\|}$$; le due intersezioni sono

quindi:

$$P_1: \begin{cases} x_1 = \frac{v_1}{\|v\|} \\ y_1 = \frac{v_2}{\|v\|} \\ z_1 = \frac{v_3}{\|v\|} \end{cases} \qquad P_2 \begin{cases} x_2 = -\frac{v_1}{\|v\|} \\ y_2 = -\frac{v_2}{\|v\|} \\ z_2 = -\frac{v_3}{\|v\|} \end{cases}$$



CONICHE PROIETTIVE

Def. Una CONICA PIANA PROIETTIVA $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2_K$ è il luogo degli zeri di un polinomio omogeneo di grado 2 in x_0, x_1, x_2;

Per comodità scriveremo tale polinomio nella forma:

$$(*) \quad a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

$$= F(x_0, x_1, x_2)$$

In forma compatta possiamo scrivere

$$(*) \iff \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j = 0 \qquad \text{dove} \quad a_{ij} = a_{ji}$$

Possiamo scrivere questa relazione anche in forma matriciale:

poniamo $$A_e := \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ vettore colonna delle indeterminate

Allora $(*) \iff {}^tX A_e X = 0.$

<u>oss.</u> Il luogo degli zeri di $F(x_0, x_1, x_2)$ è ben definito; infatti, siccome F è omogeneo di grado 2, $\forall$ terna (a_0, a_1, a_2), $\forall \lambda \in K$, si ha

$$F(\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2) = \lambda^2 F(a_0, a_1, a_2)$$

Quindi $F(a_0, a_1, a_2) = 0 \iff F(\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2) = 0 \quad \forall \lambda \in K^*.$

<u>oss.</u> Un polinomio omogeneo NON definisce una funzione su $\mathbb{P}^2_K$.

Il primo problema che ci poniamo è la classificazione proiettiva delle coniche proiettive.

<u>Def.</u> Due coniche $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \subseteq \mathbb{P}^2_K$ si dicono PROIETTIVAMENTE EQUIVALENTI se $\exists$ una proiettività $H: \mathbb{P}^2_K \longrightarrow \mathbb{P}^2_K$ t.c.

$$H(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'.$$

Esercizio: L'equivalenza proiettiva è una relazione di equivalenza. (ricordiamo che le proiettività formano un gruppo).

Def. Una CONICA PIANA AFFINE $C \subseteq \mathbb{A}^2_K$ è il luogo degli zeri di un polinomio di grado 2:

$$(**) \quad a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2 a_{12} xy + 2 a_{01} x + 2 a_{02} y + a_{00} = 0$$

Def. Due coniche affini $C, C' \subseteq \mathbb{A}^2_K$ sono affinemente equivalenti se $\exists$ un'affinità

$$h: \mathbb{A}^2_K \to \mathbb{A}^2_K \quad \text{t.c.} \quad h(C) = C'$$

Esercizio: L'equivalenza affine è una relazione di equivalenza. (ricordiamo che le affinità formano un gruppo).

Def. Una CONICA PIANA EUCLIDEA $C \subseteq \mathbb{E}^2_K$ è il luogo degli zeri di un polinomio del tipo $(**)$.

Def. Due coniche euclidee $C, C' \subseteq \mathbb{E}^2_K$ si dicono ISOMETRICAMENTE EQUIVALENTI o CONGRUENTI se $\exists$ un'isometria $g: \mathbb{E}^2_K \to \mathbb{E}^2_K$ t.c.

$$g(C) = C'$$

Esercizio: La congruenza è una relazione di eq.
(ricordiamo che le isometrie formano un

CLASSIFICAZIONE delle coniche PROIETTIVA $\Longleftrightarrow$ DETERMINAZIONE DI TUTTE LE C... DI EQUIV. PROI.

AFFINE $\Longleftrightarrow$ DETERMINAZIONE DI TUTTE LE CLASSI DI EQUIV. AFFINE

EUCLIDEA $\Longleftrightarrow$ DETERMINAZIONE DI TUTTE LE CLASSI DI CONGRUENZA

EQUAZIONI CANONICHE $\Longleftrightarrow$ SCELTA DI UN RAPPRESENTANTE SEMPLICE IN OGNI CLASSE