ESERCIZI DI GEOMETRIA 2 - FOGLIO 7

Trieste, 16 maggio 2018

1. Nel piano proiettivo reale sono date le rette

$$r : x_0 + 2x_1 - x_2 = 0, \quad r' : x_1 - x_2 = 0, \quad a = a' : x_0 - x_1 = 0.$$

Verificare che esistono infinite proiettività p tali che $p(r) = r'$ e $p(a) = a'$, e determinare equazioni di una di esse.

2. Dimostrare che esiste una e una sola proiettività F della retta proiettiva in sé tale che $A[2, 3]$ viene mandato in E_0, $B[1, 2]$ in E_1 e $C[1, 1]$ in sé. Scrivere equazioni di F e della sua inversa F^{-1}. Determinare il corrispondente in F del punto $D[1, 3]$.

3. Siano dati in $\mathbb{P}^4$, lo spazio proiettivo di dimensione 4, un piano p e una retta r sghembi. Dimostrare che, fissato comunque un punto P non appartenente né a p né a r, esiste un'unica retta passante per P incidente p e r. Scrivere equazioni di tale retta nel caso in cui p è il piano generato da $A[1, 0, 0, 0, 0]$, $B[1, 1, 0, 0, 0]$, $C[1, 1, 1, 0, 0]$, r è la retta generata da $D[0, 0, 0, 1, 0]$ e $E[0, 0, 0, 1, 1]$, e P è il punto $[1, 1, 1, 1, 1]$.

4. In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, con sistema di riferimento canonico, sono assegnati i punti $P_0[1, 0, 0]$, $P_1[-1, 1, 0]$, $P_2[2, -1, 1]$, $P_3[0, 0, 1]$.

(i) Verificare che tali punti sono in posizione generale.
(ii) Scrivere equazioni dell'unica proiettività f che trasforma ordinatamente P_0, P_1, P_2, P_3 nei punti fondamentali e punto unità.
(iii) Calcolare i punti fissi di f.

5. In $\mathbb{P}(V)$, spazio proiettivo di dimensione 3, sono date due rette L, L' e un punto P non appartenente a L né a L'. Dimostrare che se L, L' sono sghembe esiste una e una sola retta passante per P incidente a L e L'. Che cosa si può dire se invece L e L' sono complanari?