

NOTE DI ISTITUZIONI DI GEOMETRIA
SUPERIORE 3

17 maggio 2018

Indice

1	Dimensione	2
1.1	Dimensione combinatoria di uno spazio topologico	2
1.2	Morfismi finiti	4
1.3	Lemma di normalizzazione di Noether e sue conseguenze	11

Capitolo 1

Dimensione

1.1 Dimensione combinatoria di uno spazio topologico

Definizione 1.1 (Dimensione combinatoria di uno spazio topologico). Sia X spazio topologico. La dimensione combinatoria di X è definita

$$\dim(X) = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \emptyset \subset Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_n \text{ con } Z_i \text{ chiusi e irriducibili}\}$$

Osservazione 1.2. Se X è uno spazio topologico di Hausdorff, la dimensione combinatoria risulta banalmente $\dim(X) = 0$, infatti abbiamo già osservato che gli unici chiusi irriducibili sono i punti.

Osservazione 1.3. La definizione di dimensione combinatoria di uno spazio topologico nel caso delle varietà affini munite della topologia di Zariski corrisponde alla nozione algebrica di dimensione di Krull di un anello. Infatti, ricordiamo che su un campo algebricamente chiuso abbiamo la corrispondenza biunivoca:

$$\{\text{ideali primi}\} \xleftrightarrow{V} I \xleftrightarrow{I} \{\text{chiusi irriducibili}\}$$

e quindi, in particolare, si ha:

$$\{\text{chiusi irriducibili} \subseteq X\} \leftrightarrow \{\text{ideali primi} \supseteq I(X)\} \leftrightarrow \{\text{ideali primi di } A(X)\}$$

Ma allora possiamo riformulare la definizione di dimensione combinatoria nel caso delle varietà affini in termini degli ideali primi dell'anello delle coordinate:

$$\begin{aligned} \dim(X) &= \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \emptyset \subset Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_n \text{ con } Z_i \text{ chiusi e irriducibili}\} = \\ &= \sup\{n \in \mathbb{N} \mid A(X) \supset I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_n\} = \\ &= \dim_{\text{Krull}} A(X) \end{aligned}$$

Esempio 1.4. Dalla definizione possiamo già determinare la dimensione di alcuni spazi molto semplici.

1. **Dimensione di un punto** $\{P\}$: se la topologia è T1, i punti sono chiusi; essendo irriducibili, l'unica catena possibile è data da:

$$\emptyset \subset \{P\}$$

che ha lunghezza 0, allora $\dim(\{P\}) = 0$.

2. **Dimensione di \mathbb{A}^1 :** se \mathbb{K} è infinito, abbiamo visto che gli unici chiusi irriducibili di \mathbb{A}^1 sono i singoletti e \mathbb{A}^1 stesso. Quindi le catene massimali sono della forma:

$$\emptyset \subset \{P\} \subset \mathbb{A}^1.$$

Segue che $\dim(\mathbb{A}^1) = 1$

3. **Dimensione di \mathbb{A}^n :** se \mathbb{K} è infinito, una catena di chiusi irriducibili è data da:

$$\emptyset \subset V(x_1, \dots, x_n) \subset V(x_2, \dots, x_n) \subset \dots \subset V(x_n) \subset \mathbb{A}^n$$

I chiusi $V(x_i, \dots, x_n)$ sono irriducibili in quanto $V(x_i, \dots, x_n) \cong \mathbb{A}^{n-i}$. Perciò abbiamo trovato una catena di lunghezza n , e per definizione di dimensione segue che $\dim(\mathbb{A}^n) \geq n$. Vedremo che tale dimensione è proprio $n = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Lemma 1.5. *Sia X spazio topologico e sia $Y \subseteq X$ un sottospazio, allora $\dim(Y) \leq \dim(X)$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che ogni catena stretta di chiusi irriducibili in Y dà luogo ad una catena stretta di chiusi irriducibili in X . Sia perciò

$$\emptyset \subset Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_k \tag{1.1}$$

una catena di chiusi irriducibili di Y . Consideriamo $\overline{Z_i} \subseteq X$, chiusura di Z_i in X . Si ottiene quindi a partire da (1.1), la seguente catena di chiusi in X :

$$\emptyset \subseteq \overline{Z_0} \subseteq \overline{Z_1} \subseteq \dots \subseteq \overline{Z_k} \tag{1.2}$$

Dalla Proposizione (??) $\overline{Z_i}$ sono irriducibili. Poiché le inclusioni in (1.2) sono strette, abbiamo ottenuto una catena di lunghezza k di X e quindi la tesi è provata. \square

Proposizione 1. *Sia X spazio topologico irriducibile e sia $Y \subset X$ un chiuso proprio. Se $\dim(X) < \infty$, allora $\dim(Y) < \dim(X)$*

Osservazione 1.6. Osserviamo esplicitamente che la richiesta che X abbia dimensione finita è necessaria perché se avesse dimensione infinita, potrebbe accadere che Y , pur essendo un sottospazio proprio, abbia dimensione ancora infinita.

Dimostrazione. Dal Lemma precedente $\dim(Y) \leq \dim(X)$, dobbiamo mostrare che vale la disuguaglianza stretta. Osserviamo che ad ogni catena di chiusi irriducibili di Y possiamo aggiungere X stesso; se

$$\emptyset \subset Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_k$$

è un catena in Y , poiché Y è chiuso, gli Z_i sono chiusi e irriducibili anche in X , ma allora la seguente

$$\emptyset \subset Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_k \subset X$$

è una catena di chiusi irriducibili di X . Allora da ogni catena di lunghezza n di Y se ne ricava una di X di lunghezza $n + 1$. Siccome la dimensione di X è finita, questo conclude la dimostrazione. \square

Proposizione 2. Siano X, Y spazi topologici Noetheriani e sia $\pi: X \rightarrow Y$ continua, suriettiva e chiusa. Allora $\dim(Y) \leq \dim(X)$.

Dimostrazione. Sia $\emptyset \subset Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_k$ una catena di chiusi irriducibili in Y . Vogliamo ottenere da questa una catena di chiusi irriducibili di X

$$\emptyset \subset H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_k \text{ tale che } \pi(H_i) = Z_i$$

Partiamo da Z_k : π è continua, quindi $\pi^{-1}(Z_k)$ è un chiuso in X ; essendo uno spazio noetheriano, il chiuso $\pi^{-1}(Z_k)$ ammette una decomposizione finita in chiusi irriducibili massimali

$$\pi^{-1}(Z_k) = W_1 \cup \dots \cup W_r \text{ con } W_i \text{ componenti irriducibili.}$$

Per ipotesi π è anche chiusa, quindi $\pi(W_i)$ sono chiusi in Y e $Z_k = \pi(W_1) \cup \dots \cup \pi(W_r)$. Essendo Z_k irriducibile, esiste un indice $j(k)$ tale che

$$Z_k = \pi(W_{j(k)}).$$

Poniamo quindi $H_k := W_{j(k)}$. Restringendo π ad H_k e restringendo il codominio a Z_k , si ottiene ancora una funzione continua, suriettiva su Z_k e chiusa:

$$\pi|_{H_k}: H_k \longrightarrow Z_k.$$

Inoltre $H_k \subseteq X$ è ancora noetheriano, essendo un sottospazio topologico di uno spazio noetheriano. Applicando il procedimento di cui sopra possiamo scegliere $H_{k-1} \subseteq X$ chiuso irriducibile e tale che $\pi(H_{k-1}) = Z_{k-1}$. Risulta che $H_{k-1} \subset H_k$ in quanto π è suriettiva dunque se, per assurdo, fosse

$$H_{k-1} = H_k \Rightarrow \pi(H_k) = Z_k = \pi(H_{k-1}),$$

ma questa è una contraddizione. Reiterando il procedimento si conclude. □

Osservazione 1.7. Nella dimostrazione di questa Proposizione non viene utilizzato il fatto che Y è uno spazio topologico noetheriano e quindi tale ipotesi sembra ridondante. In realtà Y è necessariamente uno spazio topologico noetheriano in quanto immagine mediante π , che è continua e suriettiva, di uno spazio noetheriano (si ricordi la Proposizione (??)).

1.2 Morfismi finiti

Un importante strumento per la determinazione della dimensione delle varietà (affini e proiettive) è dato dalla teoria dei morfismi finiti. Un risultato centrale della teoria è il Lemma di Normalizzazione di Emmy Noether.

Definizione 1.8 (Algebra finitamente generata). Siano $A \subseteq B$ due anelli. Diremo che B è un'algebra finitamente generata su A se esistono $b_1, \dots, b_n \in B$ tali che ogni elemento di B si scriva come polinomio nelle b_i a coefficienti in A , sinteticamente:

$$B = A[b_1, \dots, b_n].$$

Equivalentemente, esiste un omomorfismo suriettivo di A -algebre

$$A[x_1, \dots, x_n] \rightarrow B.$$

Definizione 1.9 (Algebra finita). Siano $A \subseteq B$ due anelli. Diremo che B è un'algebra finita su A se B è finitamente generato come A -modulo, cioè esistono $b_1, \dots, b_n \in B$ tali che

$$\forall b \in B, b = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \text{ con } a_i \in A$$

Definizione 1.10 (Elemento intero). Siano $A \subseteq B$ due anelli e sia $b \in B$. Diciamo che b è intero su A se soddisfa un'equazione polinomiale monica a coefficienti in A , cioè esistono $a_0, \dots, a_n \in A$ tali che

$$b^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i b^i = 0 \in B.$$

Diremo che B è un'algebra intera su A se ogni elemento di B è intero su A .

Definizione 1.11 (Morfismo finito). Siano $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ due varietà affini e sia $f: X \rightarrow Y$ un morfismo. Il morfismo f si dice finito se che $A(X)$ è un'algebra $f^*A(Y)$ -finita, dove $f^*: A(Y) \rightarrow A(X)$ è l'omomorfismo di \mathbb{K} -algebre dato dal pull-back.

Proposizione 3. Siano $A \subseteq B \subseteq C$ anelli. Se C è finita su B e B è finita su A , allora C è finita su A .

Dimostrazione. Si tratta di esprimere gli elementi di un sistema di generatori di C su B in termini del sistema di generatori di B su A . □

Corollario 1. Siano X, Y, Z varietà affini e siano $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ due morfismi finiti, allora $g \circ f: X \rightarrow Z$ è morfismo finito.

Proposizione 4. Siano $A \subseteq B \subseteq C$ anelli. Se C è finita su A allora C è finita su B

Dimostrazione. Sia $\{c_1, \dots, c_n\}$ un sistema di generatori per C su A , allora preso $c \in C$ si ha:

$$c = \sum a_i c_i \text{ con } a_i \in A$$

Ma $A \subseteq B$, quindi $a_i \in B$ e dunque C è finita su B . □

Corollario 2. Siano X, Y, Z varietà affini e siano $f: X \rightarrow Y$ un morfismo, $g: Y \rightarrow Z$ un morfismo finito. Se $g \circ f: X \rightarrow Z$ è morfismo finito, allora anche f è morfismo finito.

Proposizione 5. Siano $A \subseteq B$ anelli e sia B una A -algebra finita. Supponiamo inoltre che B sia dominio d'integrità. Allora B è intera su A .

Dimostrazione. Per definizione di algebra finita, B come A -modulo è finitamente generato. Sia quindi $\{b_1, \dots, b_r\}$ un sistema di generatori di B su A e, preso $b \in B$, consideriamo gli elementi

$$b b_i = a_{i1} b_1 + \dots + a_{ir} b_r, \forall i \in \{1, \dots, r\}.$$

Otteniamo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} (b - a_{11})b_1 - a_{12}b_2 - \dots - a_{1r}b_r = 0 \\ \vdots \\ -a_{r1}b_1 - \dots - a_{r,r-1}b_{r-1} + (b - a_{rr})b_r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} = 0 \quad (1.3)$$

dove la matrice dei coefficienti è

$$M = \begin{pmatrix} b - a_{11} & -a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_{r1} & -a_{r2} & \dots & b - a_{rr} \end{pmatrix}$$

Afferimamo ora che $\det(M) = 0$, dato che M è matrice dei coefficienti di un sistema omogeneo che ammette una soluzione non nulla. Infatti, supponiamo per assurdo che $\det(M) \neq 0$. Allora $\det(M)$ è invertibile in $Q(B)$, pertanto definendo

$$\text{adj}(M) = \text{cof}(M)^T, \text{ dove } \text{cof}(M)_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$$

si ha che

$$\text{adj}(M) M = \det(M) Id \Leftrightarrow \frac{\text{adj}(M) M}{\det(M)} = Id$$

Ciò implica, dal sistema (1.3), che

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} = \frac{\text{adj}(M) M}{\det(M)} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} = 0$$

che è assurdo in quanto b_1, \dots, b_r non possono essere tutti nulli. Dunque $\det(M) = 0$ e, scrivendo la matrice M come:

$$M = b \cdot Id - \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_{r1} & -a_{r2} & \dots & -a_{rr} \end{pmatrix}$$

si vede che $0 = \det(M) = b^n - \sum c_i b^i$, con $c_i \in A$ e quindi b è intero su A . □

Proposizione 6. *Siano $A \subseteq B$ anelli e sia $b \in B$ un elemento intero su A , allora $A[b] \subseteq B$ è una sottoalgebra di B finita su A .*

Dimostrazione. b è intero su A , perciò esistono degli elementi $a_i \in A$ t.c.

$$b^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i b^i = 0 \Leftrightarrow b^n = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i b^i.$$

Allora si ha:

$$b^{n+1} = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i b^{i+1} = -a_{n-1} b^n - \sum_{i=0}^{n-2} a_i b^{i+1} = a_{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} a_i b^{i+1} - \sum_{i=0}^{n-2} a_i b^{i+1}.$$

Dunque abbiamo espresso la potenza $(n+1)$ -esima di b come combinazione lineare a coefficienti in A di potenze di b di ordine minore. Reiterando questo ragionamento si vede che ogni potenza di b , si può scrivere come combinazione lineare di $\{1, b, \dots, b^{n-1}\}$ a coefficienti in A e quindi quello è un sistema di generatori per $A[b]$ come modulo su A . □

Corollario 3. Siano $A \subseteq B$ anelli e sia $b \in B$ un elemento intero su A , allora $A[b] \subseteq B$ è una sottoalgebra di B intera su A .

Dimostrazione. Per la Proposizione 6 si ha che $A[b]$ è una A -algebra finita, e per la Proposizione 5 ogni elemento di $A[b]$ è intero su A . \square

Osservazione 1.12. Per induzione abbiamo che se $b_1, \dots, b_k \in B$ sono interi su A , $A[b_1, \dots, b_k]$ è un'algebra finita su A .

Corollario 4. Siano $A \subseteq B$ anelli e siano $b_1, \dots, b_r \in B$ elementi interi su A . Allora $A[b_1, \dots, b_r] \subseteq B$ è una sottoalgebra di B intera su A .

Corollario 5. Siano $A \subseteq B$ anelli. Sia B un'algebra finitamente generata su A e dominio d'integrità. Allora B è una A -algebra finita se e solo se B è intera su A .

Dimostrazione. L'implicazione (\Rightarrow) è esattamente la Proposizione (5). Viceversa, se B è intera su A e B è finitamente generata su A , allora $B = A[b_1, \dots, b_k]$ con b_1, \dots, b_k interi. Perciò dalla Proposizione (6) segue che B è finita su A . \square

Esempio 1.13. Vediamo alcuni esempi di morfismi finiti e non finiti:

1. Sia $X = V(xy - 1) \subseteq \mathbb{A}^2$ e su X consideriamo la proiezione sul primo fattore $p_1: X \rightarrow \mathbb{A}^1$. Osserviamo che p_1 non è un morfismo finito, infatti:

$$\begin{aligned} p_1^*: A(\mathbb{A}^1) &\longrightarrow A(X) \\ \mathbb{K}[t] &\longrightarrow \frac{\mathbb{K}[x, y]}{(xy - 1)} \\ g(t) &\longmapsto (g \circ p_1)(x, y) \end{aligned}$$

In particolare, per $g(t) = t$ si ha $p_1^*(t) = \bar{x}$, dunque:

$$\begin{aligned} p_1^*: \mathbb{K}[t] &\longrightarrow \frac{\mathbb{K}[x, y]}{(xy - 1)} \\ t &\longmapsto \bar{x} = [x]_{(xy-1)} \end{aligned}$$

Ma allora $p_1^*(\mathbb{K}[t]) = \mathbb{K}[\bar{x}]$, quindi per vedere se p_1 è finito, dobbiamo valutare se $A(X)$ sia un'algebra $\mathbb{K}[\bar{x}]$ -finita. Ora poiché $A(X)$ è una $\mathbb{K}[\bar{x}]$ -algebra finitamente generata e ed è dominio d'integrità, $A(X)$ è un'algebra $\mathbb{K}[\bar{x}]$ -finita se e solo se è intera su $\mathbb{K}[\bar{x}]$. Se verifichiamo che \bar{y} non è un elemento intero su $\mathbb{K}[\bar{x}]$ concludiamo che p_1 non è finito.

Supponiamo per assurdo che \bar{y} sia intero, che verifica

$$\bar{y}^n + \sum g_i(\bar{x})\bar{y}^i = 0 \quad \text{con } g_i \in \mathbb{K}[\bar{x}]$$

Poiché $A(X) = \mathbb{K}[x, y]/(xy - 1)$, l'uguaglianza sopra equivale a:

$$y^n + \sum g_i(x)y^i \in (xy - 1).$$

Si verifica facilmente che ciò non si può mai verificare. Quindi p_1 non è finito.

2. Sia $X = V(y^2 - x^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2$ e consideriamo nuovamente la proiezione sul

primo fattore $p_1: X \rightarrow \mathbb{A}^1 | (x, y) \mapsto x$. In questo caso p_1 è finito. Con un conto analogo al precedente si vede che

$$p_1^*: \mathbb{K}[t] \longrightarrow \frac{\mathbb{K}[x, y]}{(y^2 - x^2 - 1)}$$

$$t \longmapsto \bar{x}$$

e quindi $p_1^*(\mathbb{K}[t]) = \mathbb{K}[\bar{x}]$. Dobbiamo verificare che $A(X) = \frac{\mathbb{K}[x, y]}{(y^2 - x^2 - 1)}$ sia una $\mathbb{K}[\bar{x}]$ -algebra finita o, equivalentemente intera. Abbiamo che \bar{x} è intero su $\mathbb{K}[\bar{x}]$, d'altra parte in $A(X)$ vale:

$$\bar{y}^2 - \underbrace{(\bar{x}^2 + 1)}_{\in \mathbb{K}[\bar{x}]} = 0$$

quindi anche \bar{y} annulla un polinomio monico a coefficienti in $\mathbb{K}[\bar{x}]$. Allora $A(X)$ è intera su $\mathbb{K}[\bar{x}]$ per i risultati algebrici seguenti e quindi p_1 è un morfismo finito.

Osservazione 1.14. Le inclusioni di varietà affini sono morfismi finiti infatti, presa X varietà affine e $Z \subseteq X$, il pull-back di $i: Z \hookrightarrow X$, dato da

$$i^*: A(X) \longrightarrow A(Z)$$

ed è suriettivo. Allora $i^*A(X) = A(Z)$, quindi i è finito.

Possiamo dare la nozione di morfismo finito anche tra varietà quasi-proiettive a partire dal caso affine:

Definizione 1.15. Siano X, Y varietà **qp** e sia $f: X \rightarrow Y$ un morfismo. Diremo che f è un morfismo finito se esiste un ricoprimento affine di Y , cioè

$$Y = U_1 \cup \dots \cup U_k$$

tale che $W_i := f^{-1}(U_i)$ è un aperto affine in X e

$$f|_{W_i}: W_i \longrightarrow U_i$$

è un morfismo finito tra varietà affini.

Studiamo adesso le proprietà fondamentali dei morfismi finiti: vedremo che questi sono chiusi e preservano le inclusioni strette di chiusi irriducibili. Come Corollario seguirà che i morfismi finiti suriettivi preservano la dimensione.

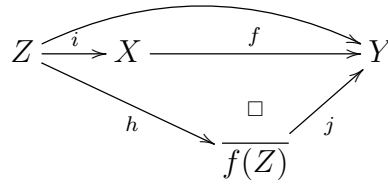
Teorema 1.16. Siano X, Y varietà affini su un campo algebricamente chiuso e sia $f: X \rightarrow Y$ un morfismo finito. Allora f è una mappa chiusa.

Dimostrazione. Sia $Z \subseteq X$ chiuso, possiamo supporre che Z sia anche irriducibile altrimenti è sufficiente ragionare sulle componenti irriducibili di Z . Definiamo il seguente morfismo:

$$h: Z \longrightarrow \overline{f(Z)}$$

$$z \longmapsto f(z)$$

Osserviamo che h è ancora un morfismo finito; infatti, abbiamo il seguente diagramma



dove i, j sono inclusioni e quindi morfismi finiti da (1.14). Inoltre, anche $g := f \circ i$ è morfismo finito in quanto composizione di morfismi finiti. Poiché $g = j \circ h$, come si vede dal diagramma, applicando il Corollario (2) si conclude che h è finito.

Dunque $h: Z \rightarrow \overline{f(Z)}$ è finito e dominante in quanto $h(Z) = f(Z)$. Se h è anche suriettivo allora

$$f(Z) = \overline{f(Z)}$$

e quindi f è chiusa. Un morfismo finito e dominante è suriettivo è oggetto del Lemma (1.17) seguente. □

Lemma 1.17. *Siano X, Y varietà affini su un campo algebricamente chiuso e sia $f: X \rightarrow Y$ un morfismo finito e dominante. Allora f è suriettivo.*

Abbiamo bisogno di un ulteriore Lemma algebrico.

Lemma 1.18. ¹ *Siano $A \subseteq B$ anelli tali che B sia una A -algebra finita. Supponiamo B dominio d'integrità. Allora se $I \subset A$ è ideale proprio, $IB \subset B$ è un ideale proprio.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $IB = B$, allora, poiché per ipotesi B è finita su A , possiamo scrivere:

$$B = Ab_1 + \dots + Ab_r.$$

Segue che si ha

$$IB = Ib_1 + \dots + Ib_r = B$$

Ma allora per ogni $i \in \{1, \dots, r\}$

$$b_i = \sum a_{ij}b_j \quad \text{con } a_{ij} \in I \tag{1.4}$$

e quindi ponendo $N := Id - (a_{ij})_{ij}$, da (1.4), segue che

$$N \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} = 0$$

Come nella dimostrazione di (5), ciò implica che $0 = \det(N) = 1 + \beta$, con $\beta \in I$. Allora $1 \in I$ e perciò $I = A$, assurdo. □

¹Il Lemma 1.18 è conseguenza del Lemma di Nakayama. Si veda, ad esempio, Shafarevich, Igor R., Basic Algebraic Geometry 1, Varieties in Projective Space, Proposition A.11 e Corollary A.1.

Dimostrazione. (del Lemma 1.17) Per ipotesi $\overline{f(X)} = Y$. Da ciò segue che $f^*: A(Y) \rightarrow A(X)$ è iniettiva; infatti:

$$\text{Ker}(f^*) = \{a \in A(Y) \mid f^*(a) = 0 \text{ in } A(X)\}$$

perciò se $f^*(a) = 0$ in $A(X)$, si ha $f^*(a) = a \circ f = 0 \Rightarrow a|_{f(X)} = 0$ e quindi $a|_{\overline{f(X)}} = 0$, cioè $a = 0$ in $A(Y)$. Possiamo dunque identificare $A(Y)$ con la sua immagine $f^*A(Y) \subseteq A(X)$.

Ora sia $P = (p_1, \dots, p_m) \in Y$; si ha:

$$\begin{aligned} f^{-1}(P) &= \{Q \in X \mid f(Q) = P\} = \\ &= \{Q \in X \mid ((\bar{y}_i - p_i) \circ f)(Q) = f^*(\bar{y}_i - p_i)(Q) = 0, \forall i\}. \end{aligned}$$

Consideriamo quindi l'ideale

$$\mathfrak{M} := (\bar{y}_1 - p_1, \dots, \bar{y}_m - p_m) \subseteq A(Y)$$

dunque $f^*\mathfrak{M} = \mathfrak{M}A(X) \subseteq A(X)$ e vale

$$f^{-1}(P) = \{Q \in X \mid Q \in V(\mathfrak{M}A(X))\}$$

Perciò $f^{-1}(P) \neq \emptyset$ se e solo se $V(\mathfrak{M}A(X)) \neq \emptyset$ in $A(X)$. Ma poiché $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$

$$V(\mathfrak{M}A(X)) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathfrak{M}A(X) \text{ è ideale proprio}$$

dalla forma debole di NSS. Essendo $\mathfrak{M} \subset A(Y)$ un ideale proprio (è massimale), $\mathfrak{M}A(X)$ è un ideale proprio per il Lemma (1.18). Questo conclude la dimostrazione. \square

Teorema 1.19. *Siano X, Y varietà affini su un campo algebricamente chiuso e sia $f: X \rightarrow Y$ un morfismo finito. Allora, se $Z \subset X$ è un chiuso irriducibile proprio di X , si ha $f(Z) \subset Y$.*

Dimostrazione. Sia $Z \subset X$ un chiuso irriducibile proprio e sia $g \in A(X)$ tale che $g|_Z = 0$, cioè $g \in I(Z) \subseteq A(X)$. Ora poiché f è finito e X è varietà affine quindi in particolare irriducibile, $A(X)$ è una $f^*A(Y)$ -algebra finita e dominio di integrità, quindi per la Proposizione (5), $A(X)$ è intera su $f^*A(Y)$. Dunque g è intero su $f^*A(Y)$, perciò annulla un'equazione monica del tipo

$$g^n + \sum_{i=0}^{n-1} f^*(a_i)g^i = 0 \quad \text{con } f^*(a_i) \in f^*A(Y). \quad (1.5)$$

Possiamo supporre, senza perdita di generalità, che il grado n sia minimo. Allora il 'termine noto' $f^*(a_0) \in A(X)$ non è l'elemento nullo; se lo fosse, l'elemento non nullo g soddisferebbe anche la relazione

$$g^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} f^*(a_i)g^{i-1} = 0$$

contraddicendo la minimalità del grado n . Da (1.5) otteniamo

$$f^*(a_0) = -g^n - \sum_{i=1}^{n-1} f^*(a_i)g^i \in (g) \subseteq I(Z).$$

Ciò significa che $f^*(a_0)|_Z = (a_0)|_{f(Z)} = 0$, ma a_0 non si annulla su tutto $f(X)$ poiché altrimenti $f^*(a_0) = 0$ in $A(X)$, perciò concludiamo che $f(Z) \subset Y$. \square

Corollario 6. *Siano X, Y varietà affini e sia $f: X \rightarrow Y$ un morfismo finito. Se f è suriettivo, allora $\dim(X) = \dim(Y)$.*

Corollario 7. *Siano X, Y varietà affini e sia $f: X \rightarrow Y$ un morfismo finito. Allora $\forall P \in Y$, $f^{-1}(P)$ è vuoto oppure è un insieme finito di punti.*

Dimostrazione. Supponiamo $P \in Y \mid f^{-1}(P) \neq \emptyset$. Osserviamo innanzitutto che $f^{-1}(P) \subseteq X$ è un chiuso in quanto f è continua. Sia Z componente irriducibile di $f^{-1}(P)$ e sia $z \in Z$. Essendo il singoletto $\{z\} \subseteq Z$ un chiuso irriducibile, allora $f(\{z\}) = P = f(Z)$ è chiuso e irriducibile, dato che f è morfismo finito e quindi continuo e chiuso. Inoltre f preserva le inclusioni strette tra chiusi irriducibili e quindi si deve avere

$$\{z\} = Z$$

Questo conclude la dimostrazione. □

1.3 Lemma di normalizzazione di Noether e sue conseguenze

Teorema 1.20 (Lemma di normalizzazione di Noether). *Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso e siano $V(F) \subseteq \mathbb{A}^n$ un'ipersuperficie e $X \subset \mathbb{A}^n$ una varietà affine. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. *esiste un morfismo finito e suriettivo*

$$\pi: V(F) \longrightarrow \mathbb{A}^{n-1}$$

e in particolare $\dim(V(F)) = \dim(\mathbb{A}^{n-1})$. Inoltre, π è la composizione di un'affinità e della proiezione sulle prime $n - 1$ coordinate;

2. *esiste un morfismo finito suriettivo*

$$\pi: X \longrightarrow \mathbb{A}^k$$

per un opportuno $k \leq n - 1$.

Dimostrazione. 1. Sia $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ di grado d e, come primo passo, cerchiamo un'affinità che trasformi il polinomio F in un polinomio che contenga il termine x_n^d .

Sia $F_d(x_0, \dots, x_{n-1}, 1)$ il termine omogeneo di grado massimo del polinomio F valutato in $x_n = 1$: affermiamo che tale polinomio non è il polinomio nullo.

Infatti, l'omomorfismo di deomogeneizzazione:

$$\begin{aligned} a: \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_d &\longrightarrow \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{n-1}]_{\leq d} \\ x_i &\longmapsto x_i \quad \forall i \neq n \\ x_n &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

risulta un isomorfismo di spazi vettoriali; l'omomorfismo inverso si costruisce omogeneizzando $h \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{n-1}]_{\leq d}$ rispetto a x_n e moltiplicandolo

per $x_n^{d-\deg(h)}$. Quindi l'unico polinomio di grado d che valutato in $x_n = 1$ risulti nullo è il polinomio nullo.

Essendo $F_d(x_0, \dots, x_{n-1}, 1) \neq 0$, esiste $Q = (q_1, \dots, q_{n-1}) \in \mathbb{A}^{n-1}$ t.c. $F_d(Q, 1) = C \neq 0$. Consideriamo quindi una qualunque affinità di \mathbb{A}^n tale che:

$$\begin{aligned} g: \mathbb{A}^n &\longrightarrow \mathbb{A}^n \\ (q_1, \dots, q_{n-1}, 1) &\longmapsto (0, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

Si ha $g(V(F)) \cong V(F)$ e adesso l'equazione di $g(V(F))$ è un polinomio \tilde{F} della forma $Cx_n^d + \dots$. A questo punto, poiché $\tilde{F}_d(0, \dots, 0, 1) = C$, consideriamo il polinomio

$$\frac{1}{C}\tilde{F}(x_1, \dots, x_n) = x_n^d + \dots$$

Otteniamo così un polinomio della forma desiderata. Chiamiamo ancora F l'equazione riscalata di $g(V(F))$.

Sia ora $\pi: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^{n-1}$ la proiezione sulle prime $n-1$ componenti. Vogliamo dimostrare che la restrizione $\pi|_{V(F)}$ di tale proiezione all'ipersuperficie $V(F)$ è un morfismo finito e suriettivo; denotiamo tale restrizione ancora con π : Osserviamo che

$$\begin{aligned} \pi^*: A(\mathbb{A}^{n-1}) &\longrightarrow A(V(F)) \\ \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{n-1}] &\longrightarrow \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{(F)} \\ H &\longmapsto H \circ \pi: V(F) \rightarrow \mathbb{K} \end{aligned}$$

Ora $\pi^*\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{K}[\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{n-1}]$ e quindi per mostrare che π è finita, bisogna mostrare che $A(V(F))$ è finita su $\mathbb{K}[\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{n-1}]$. È sufficiente mostrare che \bar{x}_n è intero su $\mathbb{K}[\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{n-1}]$. Ora si ha:

$$F = x_n^d + \sum_{i=0}^{d-1} \beta_i(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^i$$

per costruzione, quindi passando alle classi in modulo (F) :

$$0 = \bar{x}_n^d + \sum_{i=0}^{d-1} \beta_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})\bar{x}_n^i = \bar{x}_n^d + \sum_{i=0}^{d-1} \overline{\beta_i(x_1, \dots, x_{n-1})}\bar{x}_n^i$$

Quindi π è morfismo finito.

Verifichiamo ora che π sia suriettiva: sia $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{A}^{n-1}$, allora

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) &= \{(a_1, \dots, a_{n-1}, a) \mid F(a_1, \dots, a_{n-1}, a) = 0\} = \\ &= V(F(a_1, \dots, a_{n-1}, x)). \end{aligned}$$

Ma $F(a_1, \dots, a_{n-1}, x) = x^d + \sum \beta_i(a_1, \dots, a_{n-1})x^i$ non è mai un polinomio costante, ed essendo $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, vale NSS:

$$\pi^{-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) = V(F(a_1, \dots, a_{n-1}, x)) \neq \emptyset$$

e quindi π è suriettiva. Questo conclude la dimostrazione.

2. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una varietà affine. Se $X = \emptyset$, non c'è nulla da provare. Supponiamo dunque $X \neq \emptyset$ e proviamo l'asserto per induzione su n :

Supponiamo $n = 1$: in questo caso ogni sottovarietà affine è un punto e quindi il risultato è provato.

Passo d'induzione $n > 1$: sia $F \in I(X)$ un polinomio irriducibile, allora $X \subseteq V(F) \subseteq \mathbb{A}^n$. Per il primo punto del Teorema esiste un morfismo finito e suriettivo:

$$\pi: V(F) \longrightarrow \mathbb{A}^{n-1}$$

Poiché π è morfismo finito e suriettivo, è chiuso e quindi $\pi(X) \subseteq \mathbb{A}^{n-1}$ è chiuso e irriducibile in quanto X lo è. Allora $\pi(X)$ è varietà affine in \mathbb{A}^{n-1} , quindi per l'ipotesi induttiva esiste un morfismo finito

$$p: \pi(X) \longrightarrow \mathbb{A}^k$$

con $k \leq n - 1$. Componendo dunque $p \circ \pi|_X$ si ottiene il risultato voluto. □

Corollario 8. *Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso. Valgono le seguenti:*

1. $\dim(\mathbb{A}^n) = n$;
2. per ogni ipersuperficie $V(F)$ affine si ha $\dim(V(F)) = n - 1$;
3. se $X \subseteq \mathbb{A}^n$ è una varietà affine di dimensione $n - 1$, allora $X = V(F)$, cioè X è un'ipersuperficie.

Dimostrazione. 1. Proviamo l'asserto per induzione su n :

Supponiamo $n = 0, 1$: abbiamo già calcolato la dimensione di \mathbb{A}^0 e \mathbb{A}^1 esplicitamente.

Passo d'induzione $n > 1$: supponiamo di sapere che $\dim(\mathbb{A}^k) = k$, $\forall k \leq n - 1$. Dal Lemma di normalizzazione di Noether segue che se $X \subset \mathbb{A}^n$ è sottovarietà affine propria allora $\dim(X) \leq n - 1$. Pertanto, data una catena di chiusi irriducibili in \mathbb{A}^n ,

$$\emptyset \subset Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_{k-1} \subset Z_k = \mathbb{A}^n,$$

si ha che Z_{k-1} è una varietà affine propria, quindi

$$k - 1 \leq \sup\{\text{lunghezze catene in } Z_{k-1}\} = \dim(Z_{k-1}) \leq n - 1.$$

Ciò significa che ogni catena di \mathbb{A}^n ha lunghezza $k \leq n$. Ma, per quanto visto nell'esempio (1.4), $\dim(\mathbb{A}^n) \geq n$. Questo conclude la dimostrazione.

2. Dal Lemma di normalizzazione esiste $\pi: V(F) \rightarrow \mathbb{A}^{n-1}$ finita e suriettiva, perciò $\dim(V(F)) = \dim(\mathbb{A}^{n-1}) = n - 1$ per il primo punto.

3. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ è una varietà affine di dimensione $n - 1$, quindi X è una varietà affine propria, e sia $F \in I(X)$ un polinomio irriducibile. Allora, dal Lemma di normalizzazione, si ha:

$$\begin{array}{ccc} X & \subseteq & V(F) \\ \pi|_X \downarrow & & \downarrow \pi \\ \pi(X) & \subseteq & \mathbb{A}^{n-1} \end{array}$$

dove $\pi: V(F) \rightarrow \mathbb{A}^{n-1}$ è morfismo finito e suriettivo. Dunque π è chiuso e preserva le inclusioni strette quindi $\dim(\pi(X)) = \dim(X)$. Se, per assurdo, $X \neq V(F)$, $\pi(X) \subset \mathbb{A}^{n-1}$ e quindi $\dim(\pi(X)) < \dim(\mathbb{A}^{n-1}) = n - 1$. Ma $\dim(X) = n - 1$ e quindi abbiamo una contraddizione. □

Teorema 1.21. *Sia X varietà affine o proiettiva e sia $U \subset X$ un aperto non vuoto, allora $\dim(U) = \dim(X)$.*

Corollario 9. *Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso, allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. $\dim(\mathbb{P}^n) = n$;
2. $\dim(V_{\mathbb{P}}(F)) = n - 1$, per ogni ipersuperficie proiettiva $V_{\mathbb{P}}(F)$;
3. Se $X \subseteq \mathbb{P}^n$ è una varietà proiettiva di dimensione $n - 1$, allora $X = V_{\mathbb{P}}(F)$, cioè X è un'ipersuperficie.

Dimostrazione. 1. Sia $U_i \subseteq \mathbb{P}^n$ l'aperto affine $\mathbb{P}^n \setminus V_P(x_i)$; si ha $U_i \cong \mathbb{A}^n$, quindi $\dim(U_i) = \dim(\mathbb{A}^n) = n$. Inoltre U_i è aperto in \mathbb{P}^n , perciò, dal Teorema precedente,

$$\dim(\mathbb{P}^n) = \dim(U_i) = n.$$

2. Poiché la famiglia $\{U_j\}$ costituisce un ricoprimento aperto di \mathbb{P}^n , esiste un aperto U_i tale che $V_{\mathbb{P}}(F) \cap U_i \neq \emptyset$. Perciò si ha che

$$U := V_{\mathbb{P}}(F) \cap U_i \cong V(aF)$$

dove aF è il deomogeneizzato di F rispetto a x_i . Ma $V(aF)$ è un'ipersuperficie e quindi ha dimensione $n - 1$, e U è un aperto in $V_{\mathbb{P}}(F)$ perciò ha la stessa dimensione. Questo conclude la dimostrazione.

3. Analogamente al punto precedente esiste i t.c. $X' := U_i \cap X \neq \emptyset$. X' è isomorfa ad una varietà affine U e

$$\dim(X') = \dim(U) = \dim(X \cap U_i) = \dim(X) = n - 1$$

per ipotesi e dal Teorema precedente. Ma allora, per l'analogo risultato nel caso affine,

$$U = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n \Rightarrow X = j_i(U) = V_{\mathbb{P}}(F)$$

dove $F = hf$ è l'omogeneizzato di f . □