Esercizi di IGS2

May 18, 2018

1. Si dimostri che $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{\text{punto}\}$ e $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{\text{punto}\}$ non sono isomorfi a una varierà proiettiva.

2. Si dimostri che $X = \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \setminus \{(0,0)\}$ non è isomorfa a una varietà affine. Suggerimento: si determini $\mathcal{O}_X(X)$ e si usi la forma debole del NSS.

3. Si consideri la mappa razionale
$$f : \mathbb{P}^2 - - \to \mathbb{P}^2, \quad f(y_0 : y_1 : y_2) = (y_0y_1 : y_0y_2 : y_1y_2).$$
   - Si dimostri che il dominio di f è $\mathbb{P}^2 \setminus \{(0:0:1), (0:1:0), (1:0:0)\}$;
   - si dimostri che f è birazionale e che f stessa è la sua inversa.

   Tale mappa si chiama trasformazione di Cremona.

4. Sia $S \subset \mathbb{P}^3$ una superficie cubica irriducibile e $L, M \subset S$ due rette sghembe. Si dimostri che S è razionale.

5. Sia X una varietà proiettiva e sia $U \subset X$ un aperto non vuoto. Si dimostri che $\dim U = \dim X$.

   Suggerimento: la diseguaglianza $\dim U \leq \dim X$. Per dimostrare che $\dim U \geq \dim X$:

   - sia $\emptyset \subset Z_0 \subset \cdots \subset Z_k \subset X$ una catena stretta di chiusi irriducibili in X, con Z_0 un punto di X. Supponiamo che $Z_0 \in U_0$. Si dimostri che la catena
$$\emptyset \subset Z_{00} \subset \cdots \subset Z_{k0} \subset X \cap U_0,$$
     dove
$$Z_{i0} = Z_i \cap U_0,$$
     è una catena stretta in $X \cap U_0$, che è isomorfa ad una varietà affine, e che quindi $\dim X \leq \dim X \cap U_0$. Basta quindi dimostrare l'asserto per una varietà affine.
   - Si dimostri l'asserto per $X = \mathbb{A}^n$.
   - Si dimostri l'asserto per $X \subset \mathbb{A}^n$ usando il Lemma di Normalizzazione di Noether.

   Basta quindi dimostrare l'asserto per una varietà affine. Si dimostri la tesi per $X = \mathbb{A}^n$, nel caso generale si applichi la proiezione normalizzata $\pi : X \to \mathbb{A}^k$.