Esercizi di IGS3

March 26, 2018

1. Si consideri il morfismo $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$, $f(x, y) = (x, xy)$. Si determini l'immagine $f(\mathbb{A}^2)$ e si dica se è aperta, se è densa o se è chiusa.

2. Si consideri il morfismo $f : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$, $f(x, y, z) = (x, xy, xyz)$. Si determini l'immagine $f(\mathbb{A}^3)$ e si dica se è aperta, se è densa o se è chiusa.

3. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un chiuso con soli due punti. Si dimostri che $A(X) \cong K \oplus K$.

4. Sia $f : X \to Y$ un morfismo. Sia $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ il grafico di f. Si dimostri che:
   - $\Gamma_f \subseteq X \times Y \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$ è chiuso;
   - Γ_f è isomorfo a X.

5. Dati due chiusi di Zariski $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$, si denoti che p_Y la *seconda proiezione*:
   $$p_Y : X \times Y \to Y, \qquad p_Y(x, y) = y.$$
   Si dimostri che se $Z \subseteq X$ è un chiuso e $f : X \to Y$ è un morfismo, allora si ha
   $$f(Z) = p_Y((Z \times Y) \cap \Gamma_f.$$

6. Si dimostri che per ogni morfismo $f : X \to Y$, esiste un morfismo
   $$g : X \to X \times Y,$$
   che è un isomorfismo sull'immagine di X e tale che
   $$f = p_Y \circ g,$$
   quindi ogni morfismo è la composizione di un embedding e di una proiezione.

7. Sia $X = V(y^2 - x^2 - x^3)$ e si consideri la funzione razionale $h = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$. In quali punti di X h è regolare?

   Si dimostri che $h \notin A(X)$.