16.5.2018

CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE PROIETTIVE

$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2_K$ è il luogo degli zeri di $F(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} x_i x_j$ omogeneo di grado 2:

$$(*) \quad \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} x_i x_j = 0 \qquad a_{ij} = a_{ji} \quad \forall\, i,j$$

A $\mathcal{C}$ possiamo associare una matrice simmetrica:

$$A_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

se indichiamo con $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $(*)$ si scrive ${}^tX A_{\mathcal{C}} X = 0 \quad (**)$

Esempio: $x_0^2 - x_1^2 + 3x_1x_2 - 4x_0x_2 = 0$, la matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3/2 \\ -2 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pb.: Come cambia la matrice di una conica se applichiamo una proiettività di $\mathbb{P}^2_K$?

Sia $H : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ proiettività; allora $\exists\, G \in GL(3, K)$ t.c. se $P = [v_P] \in \mathbb{P}^2$, $v_P \in K^3 \setminus \{0\}$, si ha

$$H(P) = [G v_P] \quad ; \quad \text{poniamo } Q = [G v_P] \text{ e } G v_P = w$$

quindi $H(P) = \left[\sum_{i=0}^{2} g_{0i} p_i, \sum_{i=0}^{2} g_{1i} p_i, \sum_{i=0}^{2} g_{2i} p_i\right]$

dove

$$G = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad e \quad v_P = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

(quindi $P = [p_0, p_1, p_2]$)

Come osservato in (**), $F(P) = 0$ equivale a

$$^t v_P \, A_e \, v_P = 0 \qquad (***)$$

Ora: $Q \in H(\mathcal{C}) \iff P \in \mathcal{C}$

$Q = H(P)$

$Q = [w]$, $w = G v_P \Rightarrow v_P = G^{-1} w$

$$P \in \mathcal{C} \iff {}^t(G^{-1} w) \, A_e \, (G^{-1} w) = 0$$

(***)

$$\iff ({}^t w \, {}^t G^{-1}) \, A_e \, (G^{-1} w) = 0$$

il prodotto tra matrici è associativo

$$\iff {}^t w \, ({}^t G^{-1} A_e G^{-1}) \, w = 0$$

OSS: La matrice ${}^t G^{-1} A_e G^{-1}$ è simmetrica:

$$^t({}^t G^{-1} A_e G^{-1}) = {}^t G^{-1} \underbrace{{}^t A_e}_{= A_e} G^{-1}$$

perché A_e è simmetrica

$\Rightarrow \#(\mathcal{C})$ è una conica $\mathcal{C}'$ con matrice associata

$$A_{\mathcal{C}'} = {}^tG^{-1} A_{\mathcal{C}} G^{-1}$$

Ricordiamo:

<u>Def</u>: $A, B \in M(3\times 3, K)$ si dicono CONGRUENTI

se $\exists\ M \in GL(3,K)$ t.c.

$$B = {}^tM A M$$

Quindi: La matrice $A_{\mathcal{C}'}$ è congruente a $A_{\mathcal{C}}$.

Viceversa: è facile verificare che se due coniche $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ in $\mathbb{P}^2_K$ hanno matrici $A_{\mathcal{C}}$ e $A_{\mathcal{C}'}$ congruenti, allora $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ sono proiettivamente equivalenti.

Da tutto ciò segue:

<u>PROP.</u>: $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}' \subseteq \mathbb{P}^2$ coniche sono proiettivamente equivalenti $\Longleftrightarrow \exists\ M \in GL(3,K)$ t.c.

$$A_{\mathcal{C}'} = {}^tM A_{\mathcal{C}} M.$$

<u>OSS.</u> Matrici congruenti hanno lo stesso rango.

COR: Il problema della class. proiettiva delle coniche è tradotto nel problema della class. delle classi di congruenza di matrici simmetriche

COROLLARIO: Il rango di $A_{\mathcal{C}}$ è un INVARIANTE PROIETTIVO.

<u>Def.</u> $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2_K$ conica, definiamo rango di $\mathcal{C}$:

$$rg\, \mathcal{C} := rg\, A_{\mathcal{C}}$$

<u>Def:</u> $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ conica si dice:

NON DEGENERE se $\det A_{\mathcal{C}} \neq 0$

DEGENERE se $\det A_{\mathcal{C}} = 0$

SEMPLICEMENTE DEGENERE se $rg\, \mathcal{C} = 2$

DOPPIAMENTE DEGENERE se $rg\, \mathcal{C} = 1$

RICORDIAMO IL:

TEOREMA (Trasformazione ad assi principali): $K = \mathbb{C}$

$b: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^1$ forma bilineare simmetrica

Sia $A = M_{\mathcal{S}}(b)$ con $\mathcal{S}$ base canonica

Allora $\exists$ una base ORTOGONALE $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^n$ di autovettori di A t.c.

$$M_{\mathcal{B}}(b) = {}^tMAM = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

dove $M = M_{\mathcal{S}}^{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{C}^n})$

Dimostrazione:

Per il Teorema Spettrale, $\exists$ una base ortonormale $B' = \{v_1, \dots, v_n\}$ di autovettori di A t.c. se

$$S = M_{\mathcal{C}}^{B'}(Id_{\mathbb{C}^n})$$

si ha che $M_{B'}(b) = {}^tSAS = D$ è diagonale:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Oppure: per il Teorema di diagonalizzazione di forme bilineari simmetriche, $\exists$ base B' diagonalizzante

Permutando eventualmente i vettori di B possiamo supporre

$$\lambda_1 \neq 0, \dots, \lambda_r \neq 0, \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$$

$\forall\ i = 1, \dots, r$, sia $\alpha_i \in \mathbb{C}$ tale che

$$\alpha_i^2 = \lambda_i$$

Osserviamo che α_i esiste per il Teorema Fondamentale dell'algebra; infatti il polinomio

$$x^2 - \lambda_i$$

ha coefficienti in $\mathbb{C}$ ed ammette almeno una radice.

Consideriamo i vettori

$$w_1 = \frac{1}{\alpha_1} v_1$$

$$w_2 = \frac{1}{\alpha_2} v_2$$

$$\vdots$$

$$w_r = \frac{1}{\alpha_r} v_r$$

$$w_{r+1} = v_r$$

$$\vdots$$

$$w_n = v_n$$

La base $B = \{w_1, .., w_n\}$ è ortogonale e

$$b(w_i, w_j) = 0 \quad \text{se } i \neq j$$

$$b(w_i, w_i) = \frac{1}{\alpha_i^2} b(v_i, v_i) = 1 \quad \text{se } 1 \leq i \leq r$$

$$b(w_j, w_j) = b(v_j, v_j) = 0 \quad \text{se } r+1 \leq j \leq n$$

Quindi la matrice di b ha la forma richiesta.

Teorema (Trasformazione ad assi principali) $K = \mathbb{R}$

Sia
$$b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$ una forma bilineare simmetrica.

Allora $\exists$ una base ortogonale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ di autovettori di $A = M_{\underset{\sim}{e}}(b)$ tale che

$$M_{\mathcal{B}}(b) = {}^tTAT = \begin{array}{c} \\ p\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \\ q\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

con $T = M_{\underset{\sim}{e}}^{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^n})$ e $p + q = r = rg(A)$.

Infine, il numero p non dipende dalla base, ma solo da A.

Def.: (p, q) si dice SEGNATURA DI A.

Dim. Per il Teorema Spettrale $\exists$ una base $\mathcal{B}'$ ortonormale di autovettori di A t.c.

$$M_{\mathcal{B}'}(b) = {}^tSAS = D \text{ diagonale}$$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & d_p & & & & \\ & & & d_{p+1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & d_r & \\ 0 & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & d_n \end{pmatrix}$$

Oppure: per il Teorema di diagonalizzazione di forme bilineari simmetriche, $\exists$ una base $\mathcal{B}'$ diagonalizzante

Permutando eventualmente i vettori di $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\}$

possiamo supporre $d_1 > 0, \dots, d_p > 0$

$d_{p+1} < 0, \dots, d_r < 0$

$d_{r+1} = \dots = d_n = 0$

Siano $\alpha_i \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\alpha_i^2 = \lambda_i \quad \text{per} \quad 1 \leq i \leq p$$

$$\alpha_j^2 = -\lambda_j \quad \text{per} \quad p+1 \leq j \leq r$$

Allora poniamo
$$w_1 = \frac{1}{\alpha_1} v_1$$
$$\vdots$$
$$w_p = \frac{1}{\alpha_p} v_p$$
$$w_{p+1} = \frac{1}{\alpha_{p+1}} v_{p+1}$$
$$\vdots$$
$$w_r = \frac{1}{\alpha_r} v_r$$
$$w_{r+1} = v_{r+1}$$
$$\vdots$$
$$w_n = v_n$$

Si ha: $b(w_i, w_j) = 0$ se $i \neq j$

$$b(w_i, w_i) = b\left(\frac{1}{\alpha_i} v_i, \frac{1}{\alpha_i} v_i\right) = \frac{1}{\alpha_i^2} b(v_i, v_i)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq i \leq p \\ -1 & \text{se } p+1 \leq i \leq r \end{cases}$$

$$b(w_i, w_i) = 0 \quad \text{se} \quad r+1 \leq i \leq n$$

DIAGONALIZZAZIONE DI FORME BILINEARI SIMMETRICHE

TEOREMA: Sia V un K-spazio vettoriale, $\dim V = n \geq 1$.

Sia b una forma bilineare simmetrica su V:

$$b: V \times V \to K$$

Allora esiste una base diagonalizzante per b.

Equivalentemente, ogni matrice simmetrica $A \in M(n \times n, K)$ è congruente a una matrice diagonale.

<u>Dim</u>. Per induzione su $n = \dim V$

Se $n = 1$, non c'è niente da dimostrare

Supp. $n \geq 2$ e che ogni forma bilineare simmetrica su uno spazio di dimensione $< n$ ammette una base diagonalizzante.

Se b è la forma bilin. simmetrica nulla, in ogni base la matrice di b è nulla, quindi diagonale.

Supp. quindi b non nulla.

$$\Rightarrow \exists\ v, w \in V : \quad b(v, w) \neq 0$$

$\Rightarrow$ almeno uno dei 3 vettori: v, w o $v+w$ è

nonisotropo, cioè t.c. $b(z,z) \neq 0$

Infatti: se $b(v,v) = 0 = b(w,w)$

si ha $b(v+w, v+w) = \underbrace{b(v,v)}_{=0} + \underbrace{b(w,w)}_{=0} + \underbrace{2b(v,w)}_{\neq 0}$

$\neq 0$.

Chiamiamo e_1 il vettore non isotropo.

Si ha $e_1^{\perp} = \{ v \in V \mid b(e_1, v) = 0 \}$

$$V = \langle e_1 \rangle \oplus e_1^{\perp}, \quad \dim e_1^{\perp} = n-1$$

Per ipotesi induttiva poniamo $e_1^{\perp} =: W$

$$b' := b\Big|_{W \times W}$$

ammette una base diagonalizzante: $\{e_2, \dots, e_n\}$

Allora $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ è una base di V;

si ha: $b(e_1, e_j) = 0$ per $j \neq 1$

$b(e_i, e_j) = b'(e_i, e_j) = 0$ per $i \neq j$, $i \geq 2$, $j \geq 2$

perchè $\{e_2, \dots, e_n\}$ base diagonalizzante