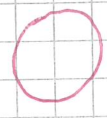
16.5.2018

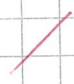
TEOREMA: Ogni conica $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ è proiettivamente equivalente a una delle seguenti:

- $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ CONICA GENERALE



- $x_0^2 + x_1^2 = 0$ CONICA SEMPLICEMENTE DEGENERE (COPPIA DI RETTE)

- $x_0^2 = 0$ CONICA DOPPIAMENTE DEGENERE (RETTA DOPPIA)



e queste tre coniche sono a due a due non proiettivamente equivalenti.

<u>Dim</u> Per il Teorema di riduzione ad assi principali su $\mathbb{C}$, la matrice simmetrica $A_{\mathcal{C}}$ è congruente a una delle seguenti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I 3 casi corrispondono a $rg(\mathcal{C}) = 3, 2, 1$ e sono le tre coniche dell'enunciato. Quindi $\mathcal{C}$ è proiett. equiv. a una delle tre.

Poiché le tre matrici hanno ranghi diversi le coniche associate sono a due a due non proiettivamente equivalenti.

TEOREMA: Ogni conica $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è proiettivamente equivalente ad una delle seguenti:

- $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ $\quad \mathcal{C}_1$ CONICA GENERALE

- $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ $\quad \mathcal{C}_2$ CONICA GENERALE A PUNTI NON REALI

- $x_0^2 + x_1^2 = 0$ $\quad \mathcal{C}_3$ CONICA SEMPLICEMENTE DEGENERE IRRIDUCIBILE

- $x_0^2 - x_1^2 = 0$ $\quad \mathcal{C}_4$ CONICA SEMPLICEMENTE DEGENERE RIDUCIBILE

- $x_0^2 = 0$ $\quad \mathcal{C}_5$ CONICA DOPPIAMENTE DEGENERE

Dim. Per il Teorema di riduzione agli assi principali su $\mathbb{R}$,

$A_{\mathcal{C}}$ è congruente a una delle nove matrici:

$$D^{3,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D^{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D^{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D^{0,3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D^{2,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D^{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{0,2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D^{1,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D^{0,1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che

$$D^{3,0} = -D^{0,3}, \qquad D^{2,0} = -D^{0,2}$$

$$D^{1,0} = -D^{0,1} \qquad -D^{1,2} = {}^tM\, D^{2,1} M$$

dove $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Quindi: $D^{3,0}$ e $D^{0,3}$ definiscono la stessa conica

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \qquad -x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$$

così come $D^{2,0}$ e $D^{0,2}$, e $D^{1,0}$ e $D^{0,1}$.

$D^{2,1}$ e $D^{1,2}$ determinano coniche proiettivamente equivalenti.

Per concludere dobbiamo mostrare che le 5 coniche dell'enunciato sono a due a due NON proiettivamente equivalenti.

Abbiamo: $rg(\mathcal{C}_1) = rg(\mathcal{C}_2) = 3$, $rg(\mathcal{C}_3) = rg(\mathcal{C}_4) = 2$, $rg(\mathcal{C}_5) = 1$

- $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ non sono proiettivamente equivalenti:

$$\mathcal{C}_1 \neq \emptyset \quad \text{mentre} \quad \mathcal{C}_2 = \emptyset$$

- $\mathcal{C}_3$ e $\mathcal{C}_4$ non sono proiettivamente equivalenti:

$\mathcal{C}_3 = \{[0,0,1]\}$, $\mathcal{C}_4$ = unione delle due rette

$$x_0 - x_1 = 0$$

$$x_0 + x_1 = 0$$