

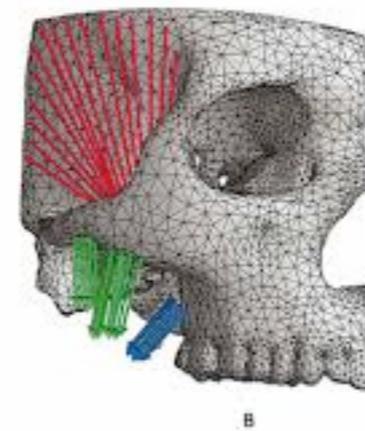
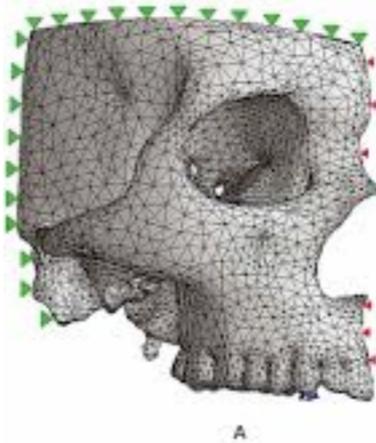
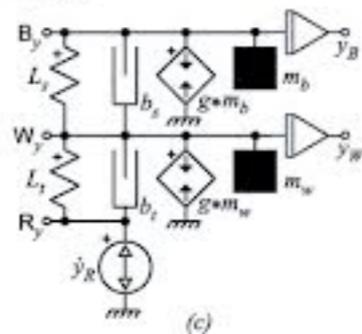
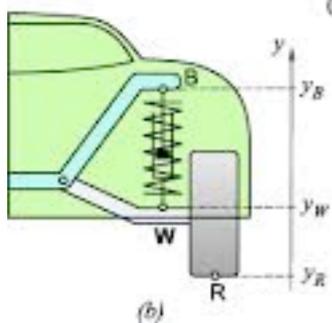
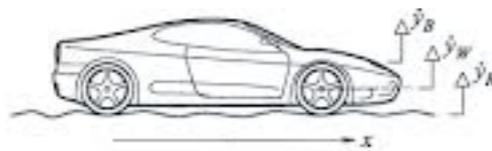
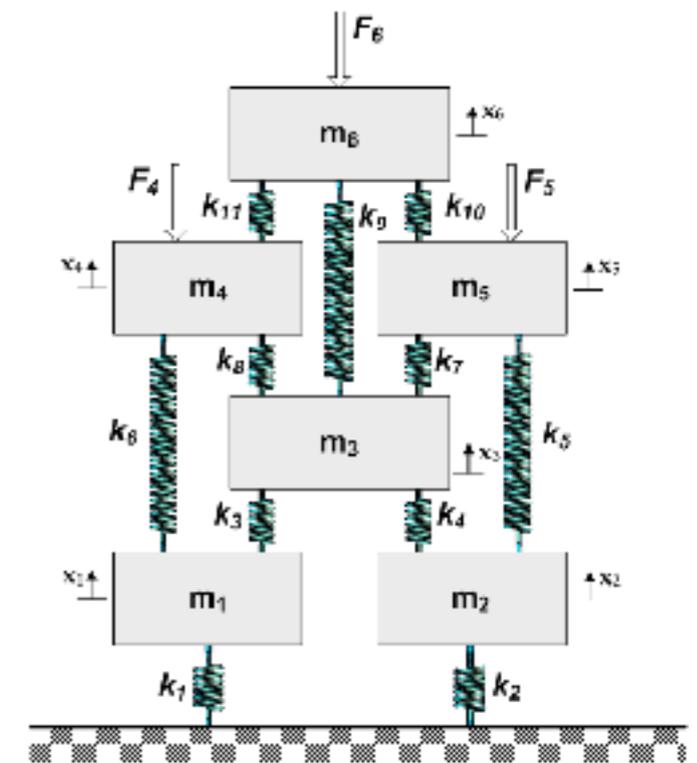
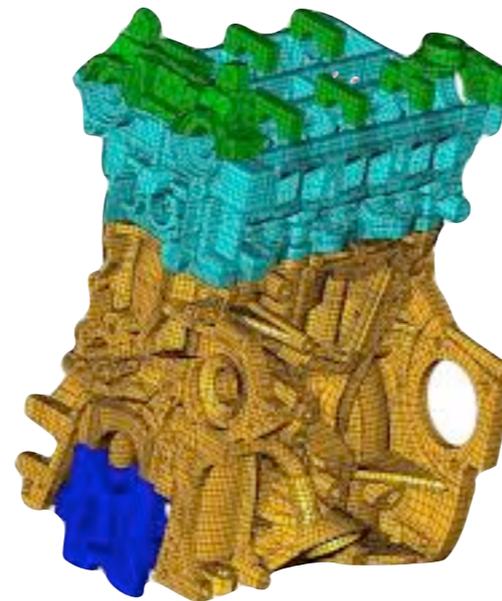
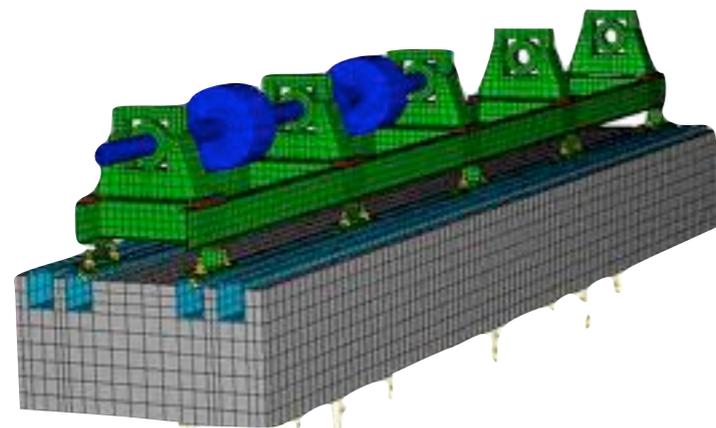
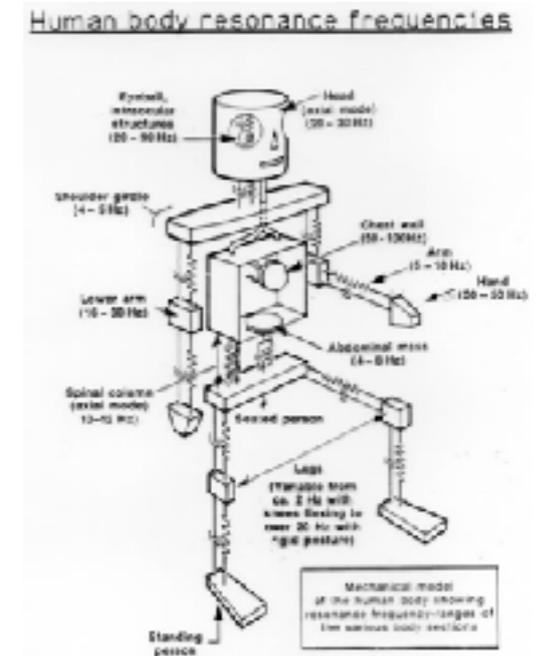
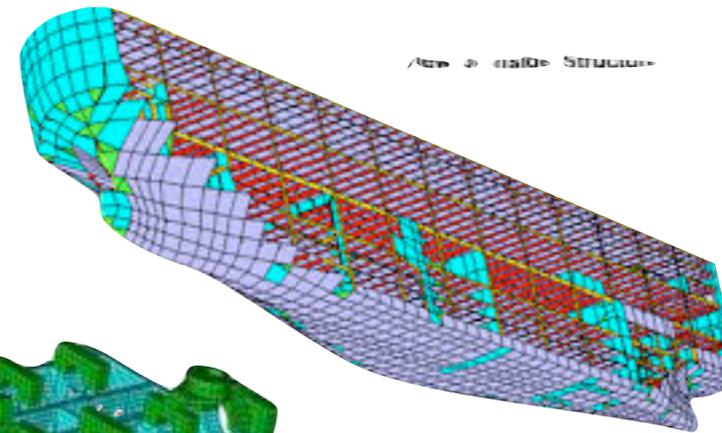
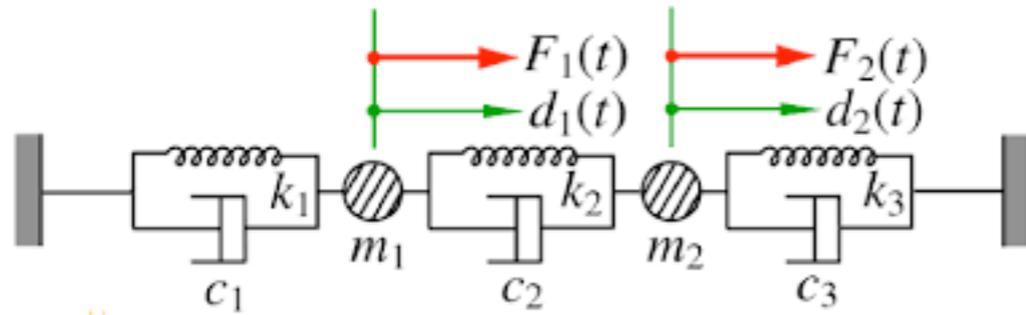
meccanica delle vibrazioni

laurea magistrale  
ingegneria meccanica

parte 4  
modelli matematici per sistemi MDOF

# Sistemi a Molti Gradi Di Libertà - Multiple Degrees of Freedom

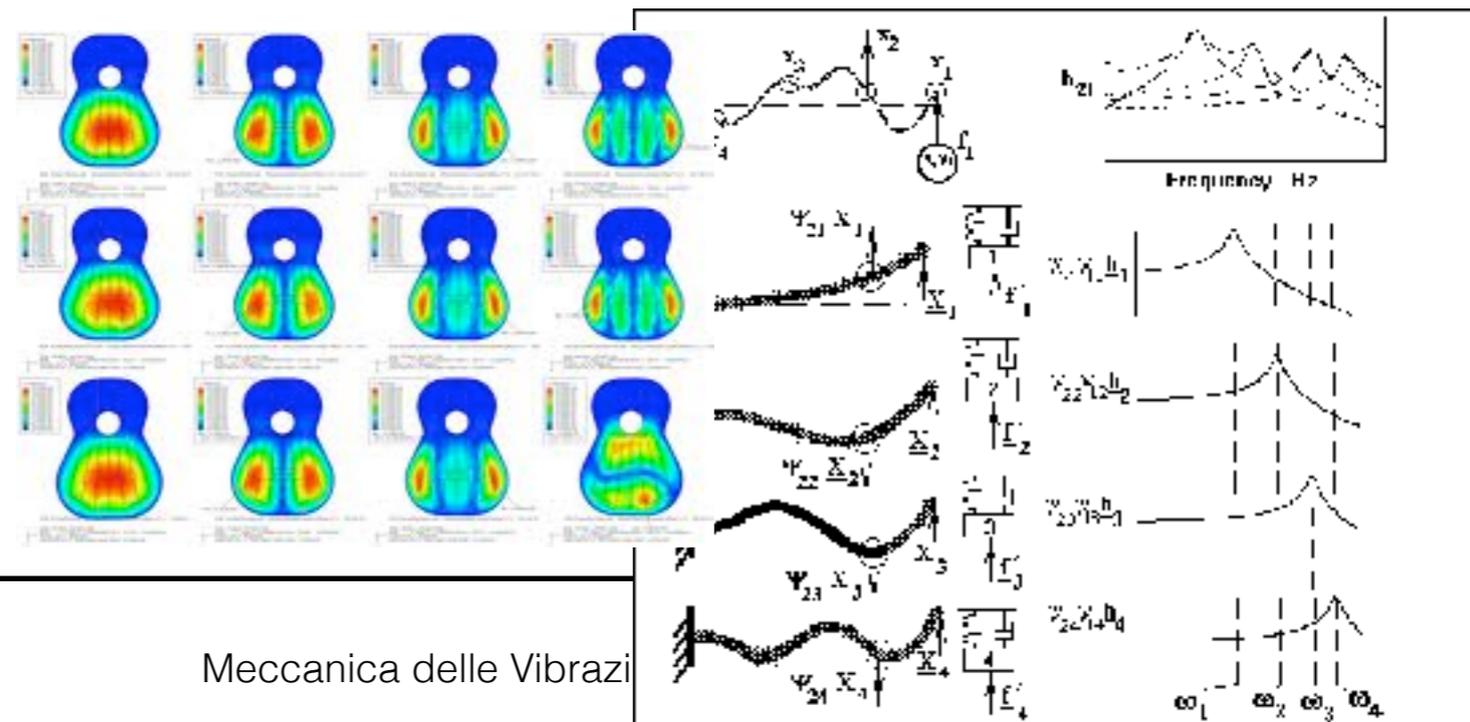
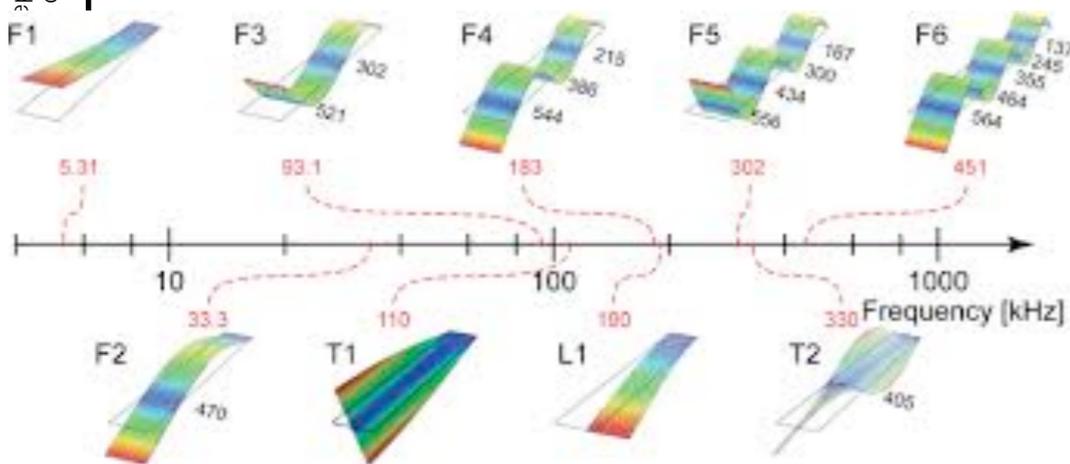
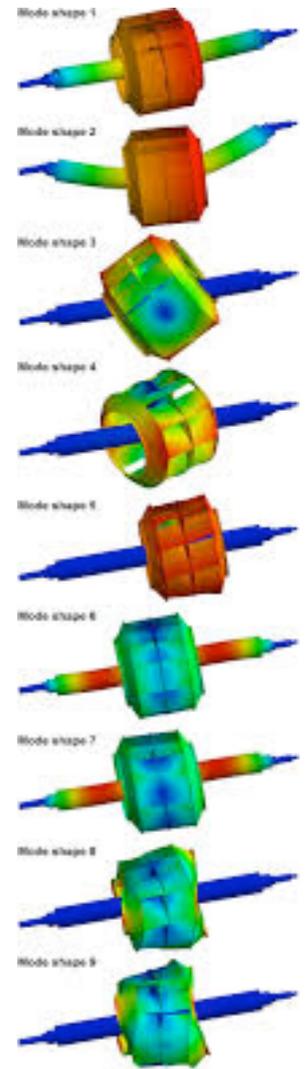
E' vietato ogni utilizzo diverso da quello inerente la preparazione dell'esame del corso di Meccanica  
E' espressamente vietato l'utilizzo per qualsiasi scopo commerciale e/o di lucro



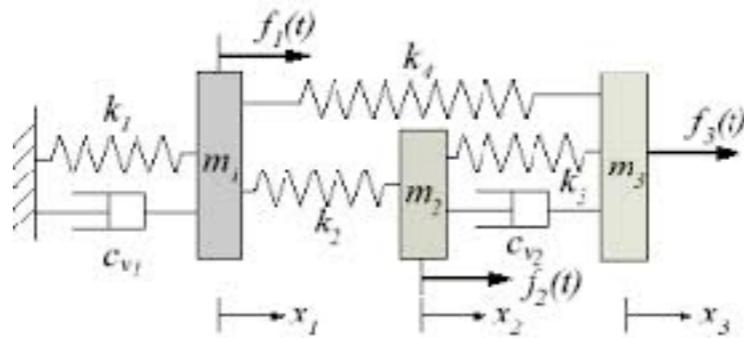
# Sistemi MDOF

..scrivere le equazioni del moto..  
..risolverle.. >

- trovare l'andamento delle coordinate libere
- in funzione, dei parametri del modello,
- delle condizioni iniziali,
- delle forzanti applicate,
- in forma chiusa / risoluzione numerica



# Sistemi MDOF - approccio newtoniano



..valgono le stesse regole che per i sistemi SDOF...

..diagramma di corpo libero..

..equilibrio delle forze..

.. sistema di equazioni!

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) + k_4 (x_1 - x_3) = f_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_2 (x_2 - x_1) + k_3 (x_2 - x_3) = f_2 \\ m_3 \ddot{x}_3 + c_2 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_4 (x_3 - x_1) + k_3 (x_3 - x_2) = f_3 \end{cases}$$

..matrici SIMMETRICHE  
(principio reciprocità)

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_4 & -k_2 & -k_4 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ -k_4 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

in forma compatta:  $[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f\}$

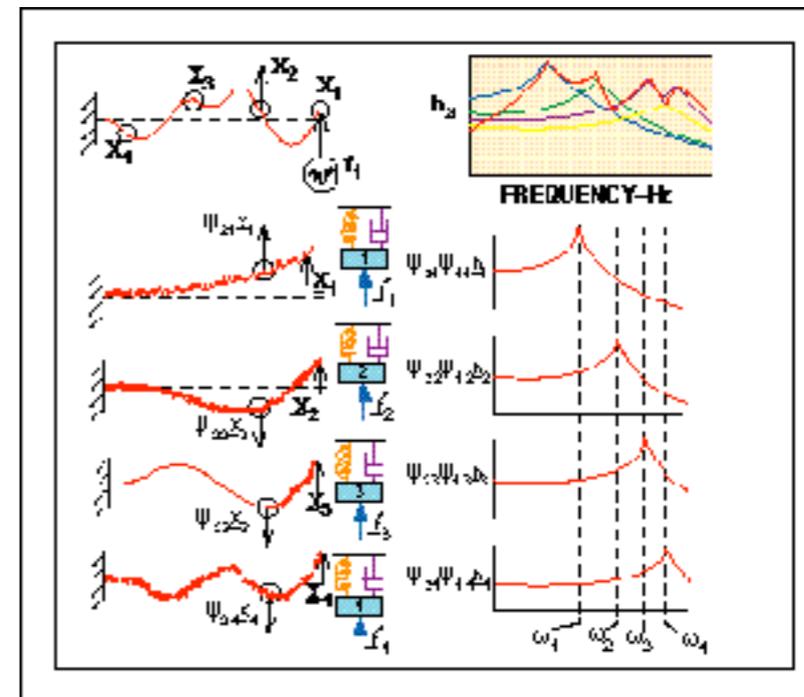
# Sistemi MDOF - approccio newtoniano

..sistemi solitamente accoppiati (termini fuori diagonale diversi da 0)  
..risolvere tutte le equazioni contemporaneamente...

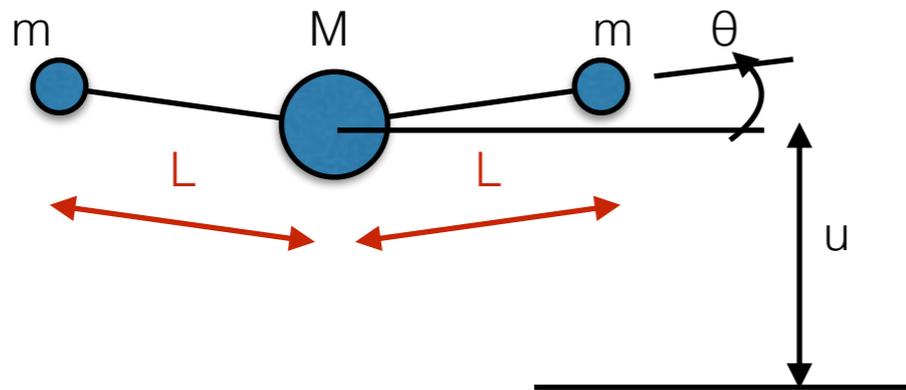
..disaccoppiare il sistema (termini fuori diagonale uguali a 0)  
(trasformazione di coordinate: da coordinate fisiche a coordinate modali)  
..risolvere equazioni indipendentemente..

...> ANALISI MODALE!

Se il sistema è composto da diversi pezzi,  
l'approccio newtoniano non è favorevole...  
meglio approccio Lagrangiano  
(o energetico)



# Sistemi MDOF - approccio lagrangiano



..coordinate lagrangiane..

$$\begin{cases} q_1 = u \\ q_2 = \theta \end{cases}$$

..energia cinetica del sistema..

$$T = \frac{1}{2} M \dot{u}^2 + 2 \left[ \frac{1}{2} m \dot{y}_m^2 \right]$$

$$y_m = u + L \sin \theta \approx u + L \theta \quad \text{..piccoli spostamenti}$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{u}^2 + m (\dot{u} + L \dot{\theta})^2$$

..energia potenziale elastica..

$$V = 2 \frac{1}{2} k \theta^2$$

Eq. Lagrange..

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_{knc}$$

# Sistemi MDOF - approccio lagrangiano

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = M\dot{u} + 2m(\dot{u} + L\dot{\theta})$$

$$M\ddot{u} + 2m(\ddot{u} + L\ddot{\theta}) = 0 \quad \text{rispetto } q_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = 2mL(\dot{u} + L\dot{\theta})$$

$$2mL(\ddot{u} + L\ddot{\theta}) + 2k\theta = 0 \quad \text{rispetto } q_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = 0$$

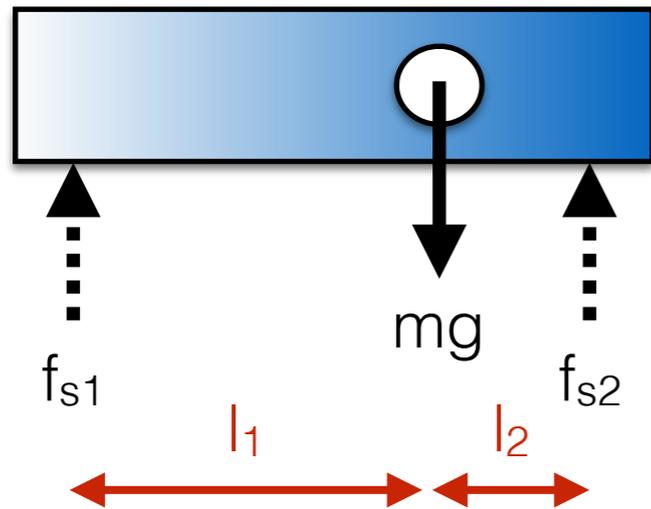
$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 2k\theta$$



$$\begin{bmatrix} M + 2m & 2mL \\ 2mL & 2mL^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

..matrice di rigidezza singolare!  
 (ordine diverso da rango)  
 ...moto di corpo rigido!

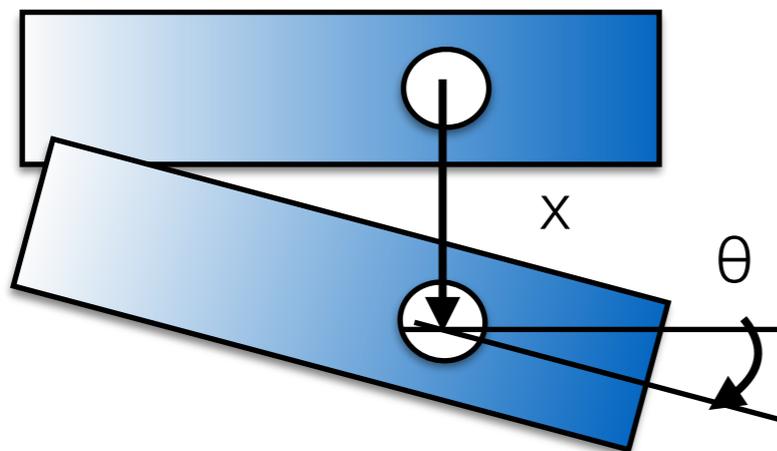
# Sistemi MDOF - accoppiamento coordinante



In funzione della scelta delle coordinate cambiano le equazioni del moto, e le matrici del sistema!

$x$  abbassamento baricentro

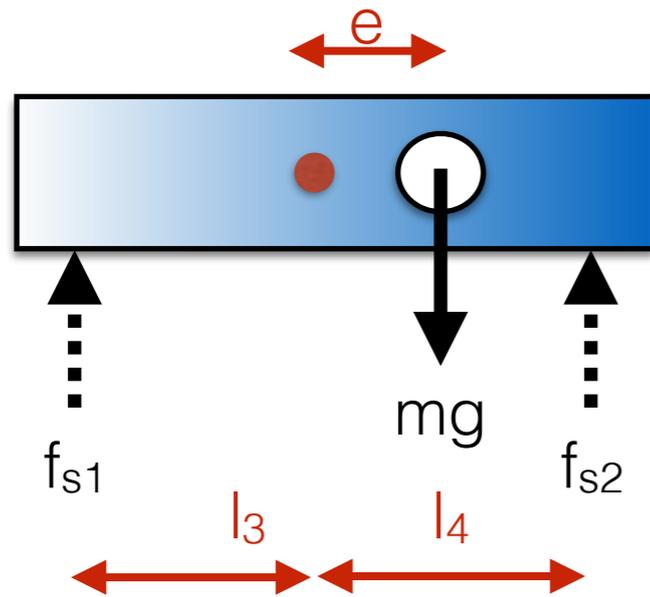
$\theta$  rotazione attorno al baricentro



$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2 - k_1 l_1 \\ k_2 l_2 - k_1 l_1 & k_1 l_1^2 - k_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

matrice di massa diagonale  
matrice di rigidezza non diagonale  
> accoppiamento STATICO

# Sistemi MDOF - accoppiamento coordinante

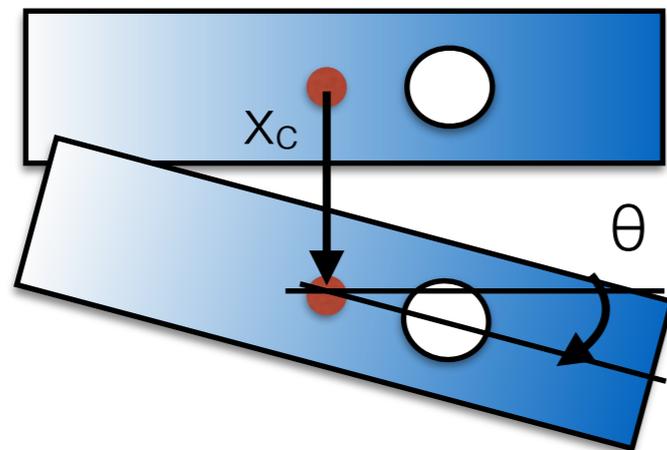


centro elastico: punto di equilibrio dei momenti delle forze applicate

$$l_3 k_1 = l_4 k_2$$

$x_c$  abbassamento centro elastico

$\theta$  rotazione attorno al centro elastico



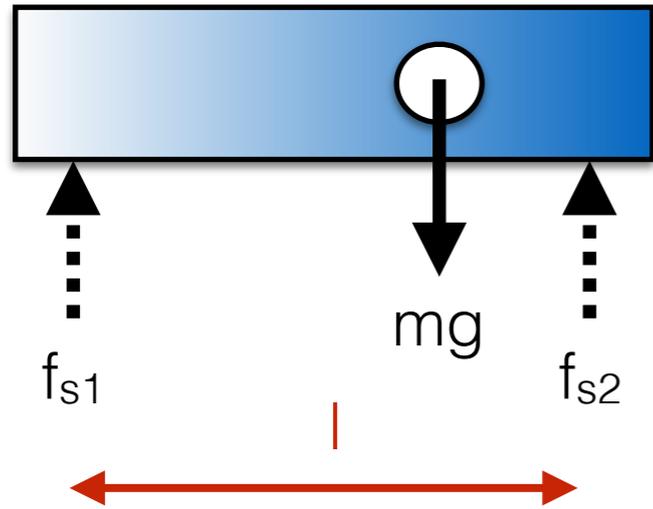
$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & J_{ce} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & k_1 l_3^2 - k_2 l_4^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

matrice di massa non diagonale

matrice di rigidezza diagonale

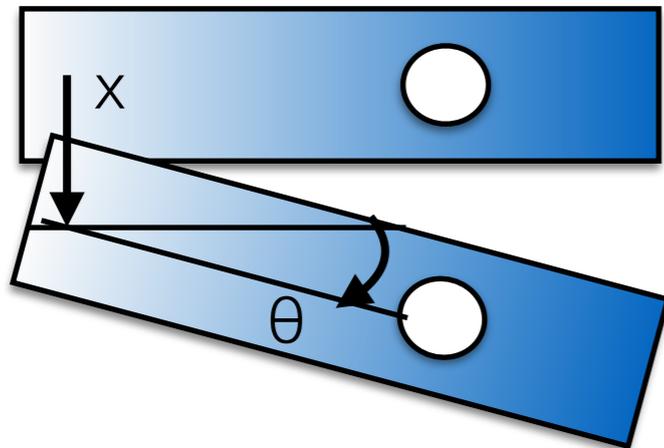
> accoppiamento DINAMICO

# Sistemi MDOF - accoppiamento coordinante



$x$  abbassamento estremo 1  
 $\theta$  rotazione attorno estremo 1

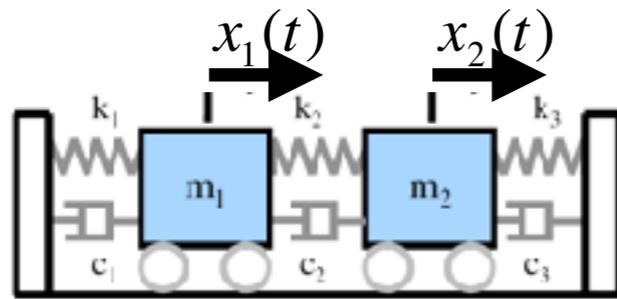
$$\begin{bmatrix} m & ml \\ ml & J_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l \\ k_2 l & k_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



matrice di massa non diagonale  
 matrice di rigidezza non diagonale  
 > accoppiamento STATICO e DINAMICO

la matrice di massa e la matrice di rigidezza  
 sono comunque SIMMETRICHE !

# Sistemi MDOF - non smorzati - vibrazioni libere



..per generalità di espressione...

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

1..vibrazioni libere, senza forzante...

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2..soluzione di tentativo...con le sue derivate...

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos(\omega t - \alpha) \\ x_2 = X_2 \cos(\omega t - \alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -\omega X_1 \sin(\omega t - \alpha) \\ \dot{x}_2 = -\omega X_2 \sin(\omega t - \alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega^2 X_1 \cos(\omega t - \alpha) \\ \ddot{x}_2 = -\omega^2 X_2 \cos(\omega t - \alpha) \end{cases}$$

3..sostituendo e semplificando..

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

# Sistemi MDOF - non smorzati

$$[k]\{x\} = \omega^2 [m]\{x\}$$

$$\frac{1}{\omega^2}[k]\{x\} = [m]\{x\}$$

..problema agli autovalori..  $[[k] - \omega^2 [m]]\{x\} = \{0\}$

..NB se il vettore  $\{x\}$  è nullo non si “muove” nulla,

4..si cercano i valori di  $\omega^2$  che annullano il determinante della matrice di rigidezza dinamica..

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{..equazione caratteristica in } \omega^2..$$

5..tali valori di  $\omega_i^2$  (con  $\omega_1^2$  minore o uguale a  $\omega_2^2$ ) sono le FREQUENZE NATURALI o AUTOVALORI del sistema

6..sostituendo gli  $\omega_i^2$  nel sistema 3 (I o II), ed ottengo i rapporti  $\beta_i = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \end{pmatrix}_{\omega_i^2}$  che sono le DEFORMATE MODALI o AUTOVETTORI del sistema

# Sistemi MDOF - non smorzati

7..il sistema non è forzato, quindi può vibrare solo con una CL di modi a  $\omega_1$  e  $\omega_2$

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha) + A_2 \cos(\omega_2 t - \alpha) \\ x_2 = \beta_1 A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha) + \beta_2 A_2 \cos(\omega_2 t - \alpha) \end{cases} \quad \text{..o in forma alterna..}$$

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t) \\ x_2 = \beta_1 A_1 \cos(\omega_1 t) + \beta_1 B_1 \sin(\omega_1 t) + \beta_2 A_2 \cos(\omega_2 t) + \beta_2 B_2 \sin(\omega_2 t) \end{cases}$$

.. $A_i$  e  $B_i$  dipendono dalle C.I.

# Sistemi MDOF - non smorzati

## Esempio 1

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + kx_2 = 0 \end{cases} \quad \text{eq. moto}$$

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos(\omega t - \alpha) \\ x_2 = X_2 \cos(\omega t - \alpha) \end{cases} \quad \text{soluzione di tentativo}$$

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega_i^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega_i^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega_i^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega_i^2 m \end{bmatrix} = 0$$

determinate matrice rigidezza dinamica

$$(2k - \omega_i^2 m)(2k - \omega_i^2 m) - k^2 = 0$$

$$\omega_i^4 m^2 - 4km\omega_i^2 + 3k^2 = 0 \quad \text{equazione caratteristica}$$

$$\omega_i^2 = \begin{cases} \frac{k}{m} & \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \frac{3k}{m} & \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \end{cases}$$

AUTOVALORI

$$(2k - \omega_i^2 m)X_1 - kX_2 = 0$$

$$\beta_i = \frac{X_2}{X_1} = \frac{2k - \omega_i^2 m}{k} = 2 - \frac{\omega_i^2 m}{k}$$

AUTOVETTORI

# Sistemi MDOF - non smorzati

## Esempio 1

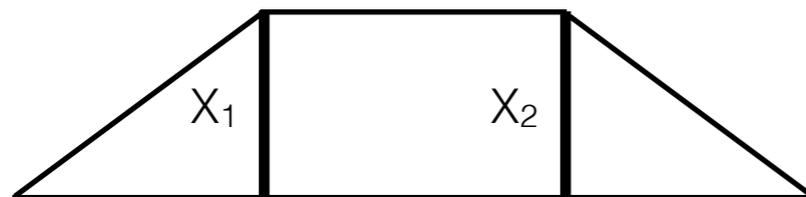
$$\beta_i = \frac{X_2}{X_1} = \frac{2k - \omega_i^2 m}{k} = 2 - \frac{\omega_i^2 m}{k}$$

sostituisco l'autovalore corrispondente...

Autovettore per  
Autovalore 1

$$\beta_1 = \frac{X_2}{X_1} = 2 - \frac{\frac{k}{m} m}{k} = 2 - 1 = 1$$

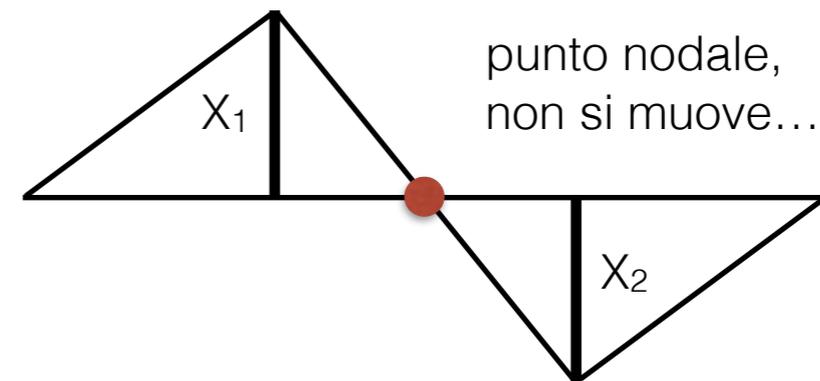
$$X_1 = 1 \rightarrow X_2 = \beta_1 X_1 = 1 * 1 = 1$$



Autovettore per  
Autovalore 2

$$\beta_2 = \frac{X_2}{X_1} = 2 - \frac{\frac{3k}{m} m}{k} = 2 - 3 = -1$$

$$X_1 = 1 \rightarrow X_2 = \beta_2 X_1 = -1 * 1 = -1$$



punto nodale,  
non si muove...

# Sistemi MDOF - non smorzati

## Esempio 1

Imponendo le condizioni iniziali...

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \\ x_2(0) = X_0 \end{array} \right. \quad \text{ricordando che...} \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = -1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t) \\ x_2 = \beta_1 A_1 \cos(\omega_1 t) + \beta_1 B_1 \sin(\omega_1 t) + \beta_2 A_2 \cos(\omega_2 t) + \beta_2 B_2 \sin(\omega_2 t) \end{array} \right. \quad \text{derivando e sostituendo}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(0) = A_1 + A_2 = 0 \\ x_2(0) = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 = X_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(0) = B_1 \omega_1 + B_2 \omega_2 = 0 \\ \dot{x}_2(0) = \beta_1 B_1 \omega_1 + \beta_2 B_2 \omega_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$A_1 = \frac{X_0}{2} \quad A_2 = -\frac{X_0}{2} \quad B_1 = 0 \quad B_2 = 0$$

..si determinano i coefficienti e la soluzione...

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{X_0}{2} (\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)) \\ x_2 = \frac{X_0}{2} (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) \end{array} \right.$$

# Sistemi MDOF - non smorzati

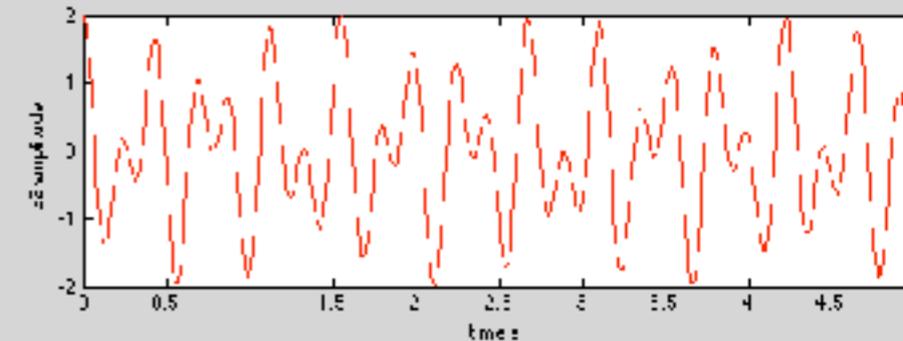
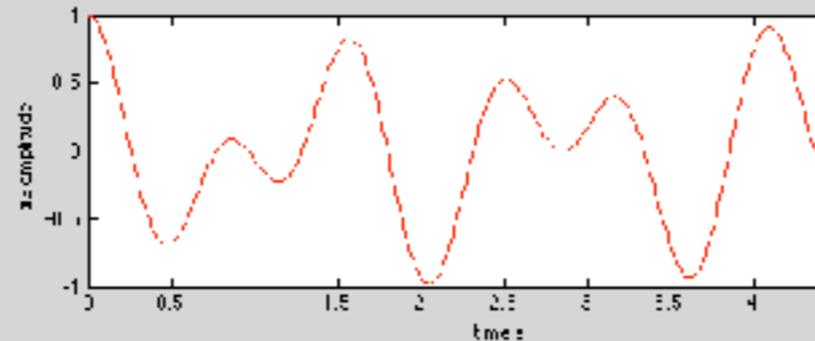
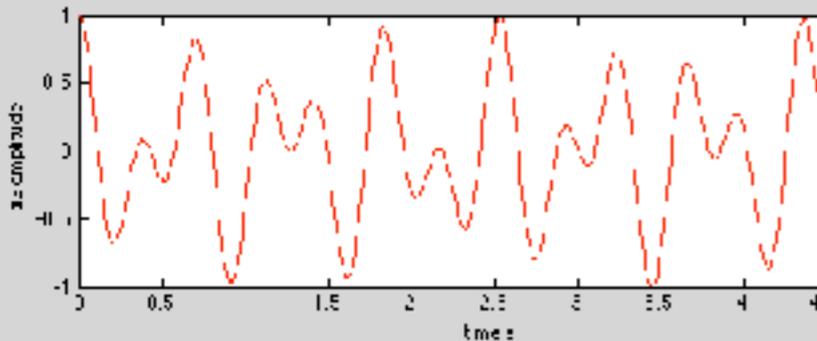
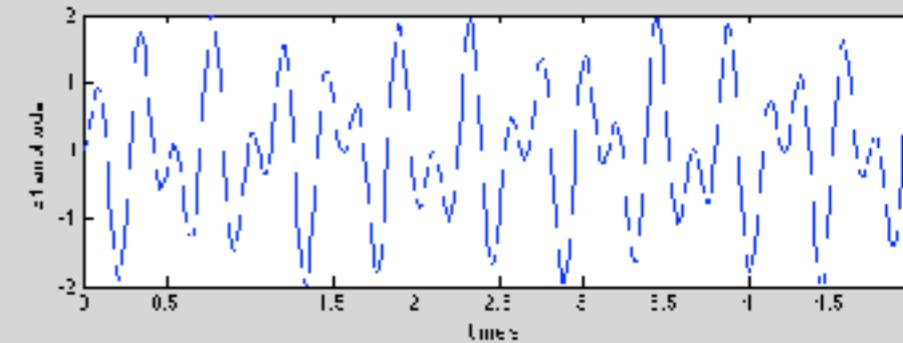
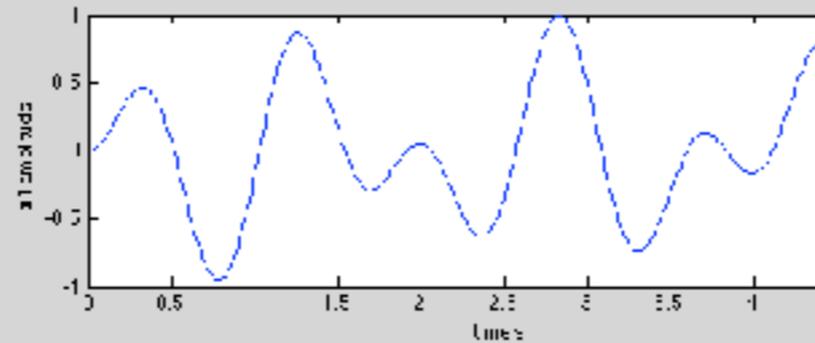
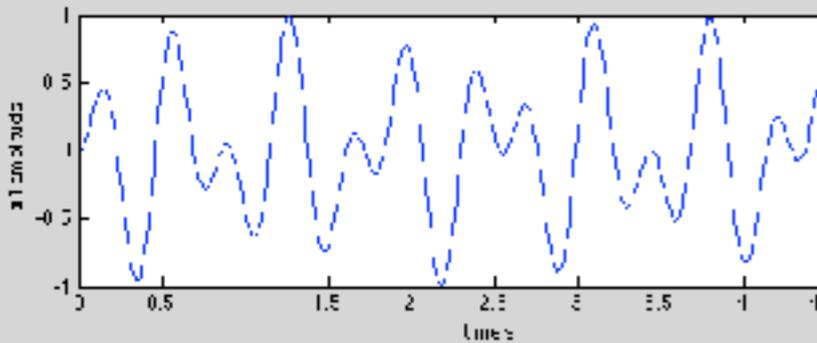
## Esempio 1

$$\begin{cases} x_1 = \frac{X_0}{2}(\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)) \\ x_2 = \frac{X_0}{2}(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) \end{cases}$$

$m=1; k=100;$   
 $\omega_1 = \sqrt{k/m};$   
 $\omega_2 = \sqrt{3*k/m};$   
 $x_0=1;$

$m=5; k=100;$   
 $\omega_1 = \sqrt{k/m};$   
 $\omega_2 = \sqrt{3*k/m};$   
 $x_0=1;$

$m=3; k=800;$   
 $\omega_1 = \sqrt{k/m};$   
 $\omega_2 = \sqrt{3*k/m};$   
 $x_0=2;$



# Sistemi MDOF - non smorzati

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - 2kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - 2kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{cases} \quad \dots\text{ sistema svincolato..}$$

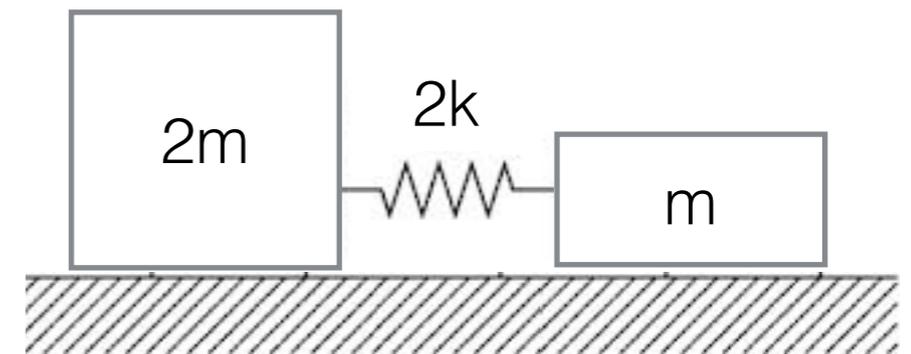
$$\begin{bmatrix} 2k - \omega_i^2 2m & -2k \\ -2k & 2k - \omega_i^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_i^2 m (2m\omega_i^2 - 6k) = 0 \quad \omega_i^2 = \begin{cases} 0 \\ \frac{3k}{m} \end{cases}$$

$$(2k - \omega_i^2 2m)X_1 - 2kX_2 = 0$$

$$\beta_i = \frac{X_2}{X_1} = \frac{2k - 2\omega_i^2 m}{2k} = 1 - \frac{\omega_i^2 m}{k} \quad \beta_i = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

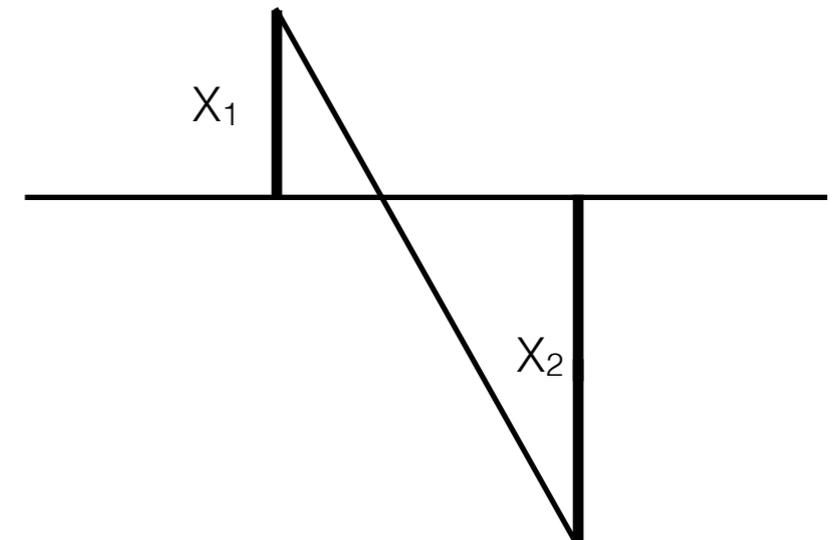
## Esempio 2



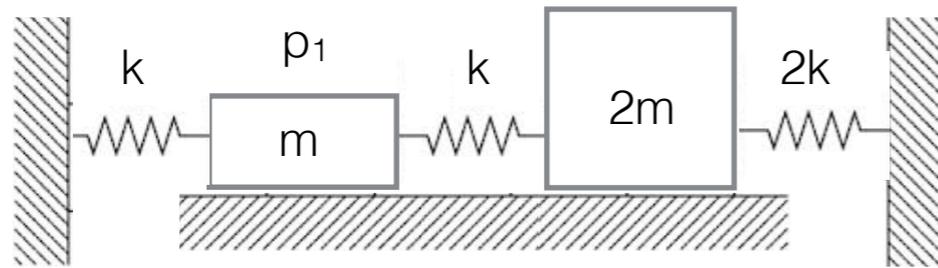
modo 1 ..  
non c'è richiamo elastico!



modo 2



# Sistemi MDOF - non smorzati - forzati



$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

$$p_1 = p_o \cos \Omega t$$

$$m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_o \\ 0 \end{Bmatrix} \cos \Omega t$$

..con l'usuale soluzione di tentativo..

$$\left[ k \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \Omega^2 m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_o \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{..oppure..} \quad [A]\{X\} = \{P\}$$

..la soluzione..  $\{X\} = [A]^{-1} \{P\}$

$$\begin{bmatrix} 2k - \Omega^2 m & -k \\ -k & 3k - \Omega^2 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_o \\ 0 \end{Bmatrix}$$

# Sistemi MDOF - non smorzati

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k - \Omega^2 m & -k \\ -k & 3k - \Omega^2 2m \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 3k - \Omega^2 2m & k \\ k & 2k - \Omega^2 m \end{bmatrix}}{\Delta} \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\Delta$  determinante matrice  
rigidezza dinamica

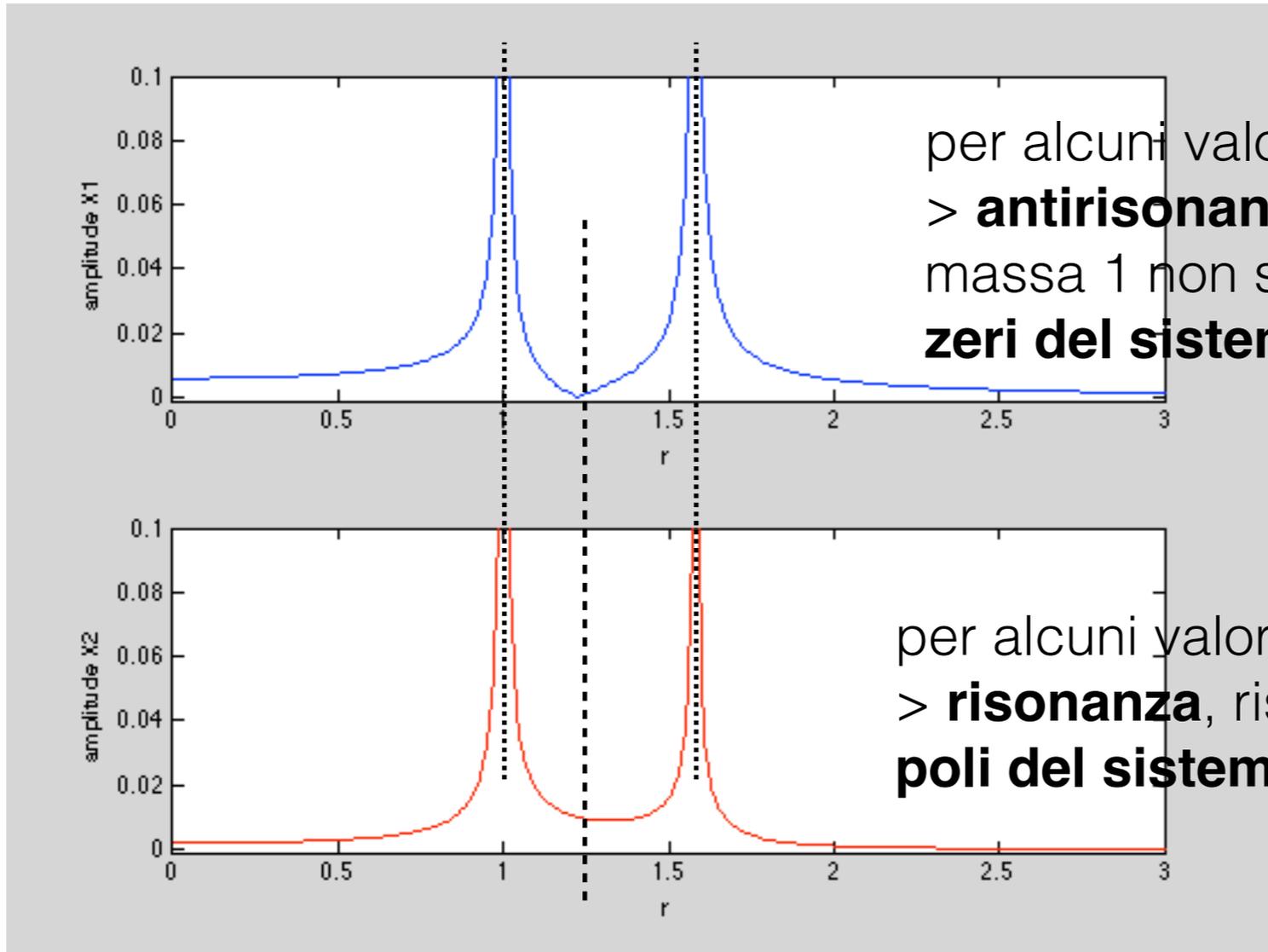
$$\begin{aligned} \Delta &= (2k - \Omega^2 m)(3k - \Omega^2 2m) + k^2 \\ &= 2m^2 \Omega^4 - 7mk \Omega^2 + 5k^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X_1 = \frac{(3k - \Omega^2 2m) p_0}{\Delta} \\ X_2 = \frac{k p_0}{\Delta} \end{cases}$$

per specifici valori di  $\Omega$ , il numeratore va a zero  
> antirisonanza

per specifici valori di  $\Omega$ , il denominatore va a zero  
> risonanza

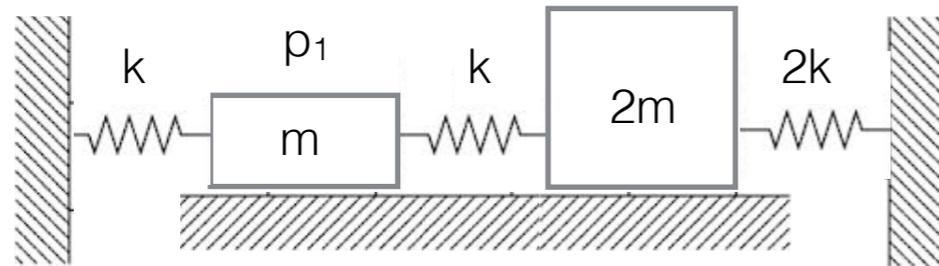
# Sistemi MDOF - non smorzati



per alcuni valori di  $\Omega$ , il numeratore va a zero  
> **antirisonanza**, risposta va a zero,  
massa 1 non si muove!! anche se c'è  $p_1$   
**zeri del sistema**

per alcuni valori di  $\Omega$ , il denominatore va a zero  
> **risonanza**, risposta va all'infinito ( $c=0$ )  
**poli del sistema**

# Sistemi MDOF - non smorzati - approccio modale



Stesso sistema di prima...

$$m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos \Omega t$$

trovo gli autovalori (soluzioni equazione caratteristica)...  $\omega_i^2 = \begin{cases} \frac{k}{m} \\ \frac{5k}{2m} \end{cases}$

..trovo gli autovettori associati a questi...

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{Bmatrix} \quad \text{..li assemblo nella matrice modale..} \quad [\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

# Sistemi MDOF - non smorzati

Definisco la seguente trasformazione di coordinate..  $\{x\} = [\phi]\{q\}$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 + q_2 \\ q_1 - \frac{1}{2}q_2 \end{Bmatrix}$$

derivo la trasformazione di coordinate e sostituisco nelle eq del moto..  $\{\ddot{x}\} = [\phi]\{\ddot{q}\}$

$$[m][\phi]\{\ddot{q}\} + [k][\phi]\{q\} = \{p\}$$

..premultiplico tutto per la trasposta della matrice modale..  $[\phi]^T$

$$[\phi]^T [m][\phi]\{\ddot{q}\} + [\phi]^T [k][\phi]\{q\} = [\phi]^T \{p\}$$

..definisco matrice..  $[M] = [\phi]^T [m][\phi]$        $[K] = [\phi]^T [k][\phi]$        $\{P\} = [\phi]^T \{p\}$   
 Massa modale                      Rigidezza modale                      Forzante modale

# Sistemi MDOF - non smorzati

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{P\}$$

..con il vantaggio che le matrici "modali" sono diagonali!!

$$m \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$k \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 15/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ p_0 \end{Bmatrix}$$

..le equazioni modali sono disaccoppiate!!  
 come fossero sistemi SDOF!!

$$m \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 15/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ p_0 \end{Bmatrix} \cos \Omega t$$

# Sistemi MDOF - non smorzati

$$\begin{cases} 3m\ddot{q}_1 + 3kq_1 = p_0 \cos \Omega t \\ \frac{3}{2}m\ddot{q}_2 + \frac{15}{4}kq_2 = p_0 \cos \Omega t \end{cases}$$

..le soluzioni per sistemi SDOF sono note!!  
...usuale soluzione armonica..

$$q_i = Y_i \cos \Omega t$$

$$\begin{cases} (3k - 3m\Omega^2)Y_1 = p_0 \\ (\frac{15}{4}k - \frac{3}{2}m\Omega^2)Y_2 = p_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{p_0}{(3k - 3m\Omega^2)} = \frac{\frac{1}{3}kp_0}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} \\ Y_2 = \frac{p_0}{\left(\frac{15}{4}k - \frac{3}{2}m\Omega^2\right)} = \frac{\frac{4}{15}kp_0}{1 - \left(\frac{2}{5}\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2} \end{cases}$$

NB ci sono 2 frequenze naturali, per il modo 1 e per il modo 2

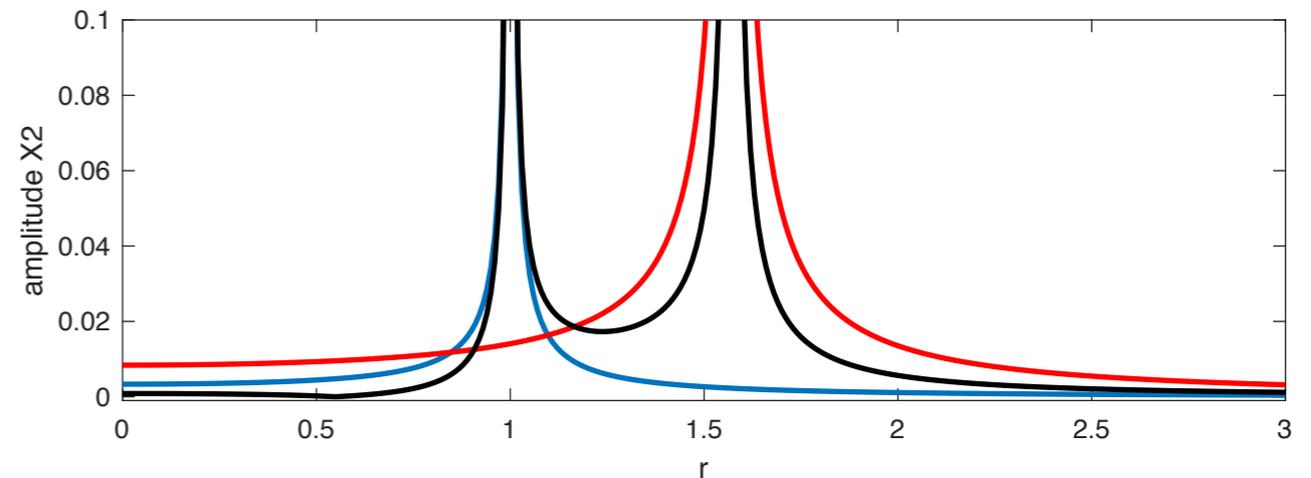
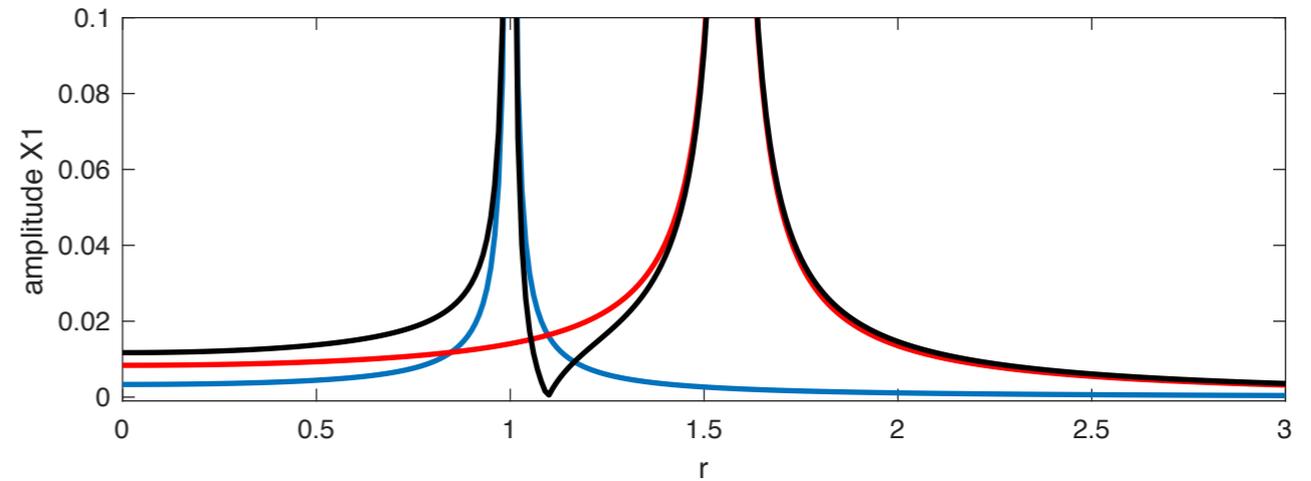
..ricordando la trasformazione modale

$$\begin{cases} \{x\} = [\phi]\{q\} \\ \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 + q_2 \\ q_1 - \frac{1}{2}q_2 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

# Sistemi MDOF - non smorzati

$$X_1 = \frac{1/3 kp_0}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} + \frac{4/15 kp_0}{1 - \left(\frac{2\Omega}{5\omega_2}\right)^2}$$

$$X_2 = \frac{1/3 kp_0}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} - \frac{1}{2} \frac{4/15 kp_0}{1 - \left(\frac{2\Omega}{5\omega_2}\right)^2}$$



..la risposta del sistema è data dalla somma di due contributi  
(**due** DOF, **due** frequenze naturali, **due** forme modali...)

# Sistemi MDOF - smorzati

..aggiungiamo un termine generico per tener conto dello smorzamento viscoso..

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

..con l'usuale soluzione armonica..

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos(\Omega t - \alpha) \\ x_2 = X_2 \cos(\Omega t - \alpha) \end{cases}$$

$$[m]\{\ddot{x}\}\Omega^2 \cos \Omega t - [c]\{\dot{x}\}\Omega \sin \Omega t + [k]\{x\}\Omega \cos \Omega t = \{p\} \cos \Omega t$$

..con il termine  $\cos \Omega t$  non si può più semplificare.., utilizziamo un'altra soluzione di tentativo... (derivo e sostituisco al solito)

$$\begin{cases} x_1 = X_1 e^{j\omega t} \\ x_2 = X_2 e^{j\omega t} \end{cases} \quad \text{NB si può anche esprimere la forzante con } p = p_0 e^{j\omega t}$$

# Sistemi MDOF - smorzati

$$\left[ -\omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

..analogamente al caso non smorzato si costruisce la matrice di rigidezza dinamica e si trova la soluzione invertendo quest'ultima

$$\begin{bmatrix} k_{11} + j\omega c_{11} - \omega^2 m_{11} & k_{12} + j\omega c_{12} - \omega^2 m_{12} \\ k_{21} + j\omega c_{21} - \omega^2 m_{21} & k_{22} + j\omega c_{22} - \omega^2 m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \quad \{X\} = [A]^{-1} \{P\}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} + j\omega c_{11} - \omega^2 m_{11} & k_{12} + j\omega c_{12} - \omega^2 m_{12} \\ k_{21} + j\omega c_{21} - \omega^2 m_{21} & k_{22} + j\omega c_{22} - \omega^2 m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{21} \\ -Z_{12} & Z_{11} \end{bmatrix}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \quad X_1 = \frac{Z_{22}p_1 - Z_{12}p_2}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \quad X_2 = \frac{-Z_{21}p_1 + Z_{11}p_2}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$$

# Sistemi MDOF - smorzati

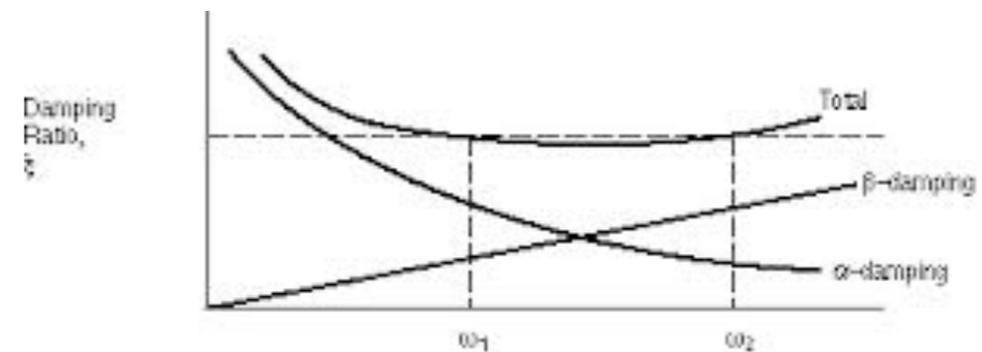
..l'equazione caratteristica del sistema (determinante della matrice di rigidità dinamica) è complessa... quindi le radici saranno complesse!  
(riguardare posizione delle radici nel piano di Laplace !)

..se la matrice di smorzamento è proporzionale alle matrici di massa e rigidità la trasformazione modale diagonalizza anche la matrice di smorzamento

$$[c] = \alpha[m] + \beta[k]$$

.. $\alpha$  e  $\beta$  sono normalmente i parametri richiesti dai codici FEM

$$[C] = [\phi]^T [c][\phi]$$



..in senso esteso, la proporzionalità è tale se per ogni r e s vale la relazione:

$$[[m]^{-1}[c]]^s [[m]^{-1}[k]]^r = [[m]^{-1}[k]]^r [[m]^{-1}[c]]^s$$

# Sistemi MDOF - smorzati

..se lo smorzamento non è proporzionale (es concentrato in pochi DOF) si opera l'espansione di Duncan-Collar (procedura simile alla rappresentazione Stato Spazio)

..alle eq del sistema, (trasformata di Laplace) aggiungiamo un'identità..

$$[[m]p^2 + [c]p + [k]]\{X(p)\} = \{P(p)\} \quad \text{..equazione di ordine N in } p^2$$

$$[[m]p - [m]p]\{X(p)\} = 0$$



$$[p[A] - [B]]\{Y(p)\} = \{F\}$$



..equazione di ordine 2N in p

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & [m] \\ [m] & [c] \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} -[m] & 0 \\ 0 & [k] \end{bmatrix} \quad \{Y\} = \begin{Bmatrix} p\{X\} \\ X \end{Bmatrix} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{P\} \end{Bmatrix}$$

# Sistemi MDOF - smorzati

$$[p[A] - [B]]\{Y(p)\} = \{F\}$$

..per avere la soluzione non banale ( $\{Y\} \neq 0$ ) si cercano gli autovalori del sistema..

$$[[p[A] - [B]]] = 0 \quad \text{..essendo di ordine } 2N \text{ ci saranno } 2N \text{ soluzioni complesse}$$

..quindi  $2N$  autovalori e  $2N$  autovettori, raccolti in due matrici..

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \lambda_1^* & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_2^* & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad [\Phi] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \{\phi_1\} & \lambda_2 \{\phi_2\} & \dots & \lambda_1^* \{\phi_1^*\} & \lambda_2^* \{\phi_2^*\} & \dots \\ \{\phi_1\} & \{\phi_2\} & \dots & \{\phi_1^*\} & \{\phi_2^*\} & \dots \end{bmatrix}$$

# Sistemi MDOF - smorzati

$$[p[A] - [B]]\{Y(p)\} = \{F\} \quad \text{..si può fare una trasformazione di coordinate..}$$

$$\{Y\} = [\Phi]\{Q\}$$

$$[p[A][\Phi] - [B][\Phi]]\{Q\} = \{F\} \quad \text{..premultiplicando tutto per } [\Phi]^T$$

$$[p[\Phi]^T [A][\Phi] - [\Phi]^T [B][\Phi]]\{Q\} = [\Phi]^T \{F\}$$

$$[a] = [\Phi]^T [A][\Phi] \quad \text{..modal a..matrice diagonale}$$

$$[b] = [\Phi]^T [B][\Phi] \quad \text{..modal b..matrice diagonale}$$

..la trasformata disaccoppia il sistema... 2N equazioni..2N sistemi di ordine 1..  
soluzione di sistemi a smorzamento non proporzionale..



