meccanica delle vibrazioni

laurea magistrale
ingegneria meccanica

parte 5
sistemi MDOF - particolari

Luigi BREGANT
bregant@units.it

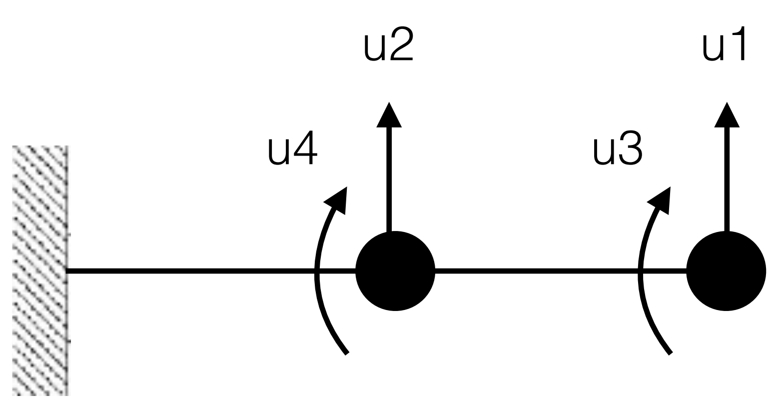
Sistemi MDOF - modale

le matrici di massa e rigidezza sono simmetriche (teorema reciprocità Maxwell)

sono definite positive, derivano da T e V, per ogni spostamento e distribuzione di velocità diversa da 0

la matrice di rigidezza può essere semidefinita positiva
se ci sono moti rigidi (V=0) e flessibili (V>0);
det[k]=0 o se il rango<ordine… modi rigidi

se ci sono gdl senza informazioni relative all'inerzia la matrice di massa può essere semidefinita positiva det[m]=0



$$[m]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistemi MDOF - modale

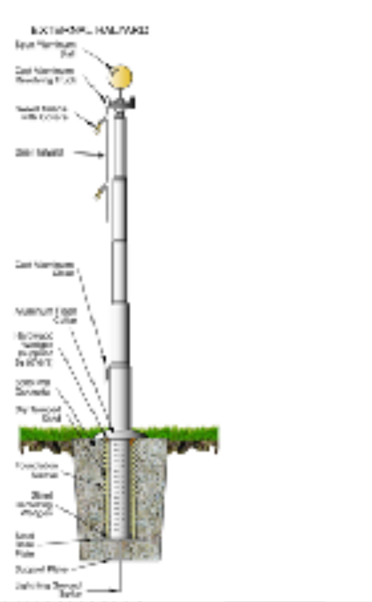
gli autovalori sono tra loro ortogonali e costituiscono una base per descrivere tutti gli spostamenti del sistema, se il sistema ha N DOF, avrà anche N autovalori

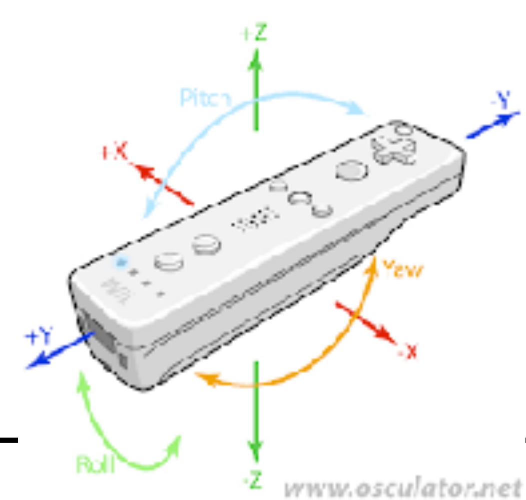
si ordinano in ordine crescente, posso essere nulli o ripetuti

$$0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \omega_3^2 \ldots \leq \omega_N^2$$

gli autovalori nulli corrispondono a moti di corpo rigido > solo a bassa frequenza max 6 moti rigidi, corpo libero nello spazio… es aereo

gli autovalori ripetuti appartengono a moti di corpo simmetrici





Luigi BREGANT
bregant@units.it

Sistemi MDOF - modale

gli autovalori sono tra loro ortogonali!

prendiamo due autovalori distinti ω_r, ω_s $\qquad \omega_r \neq \omega_s$
e i relativi autovettori

$$[k]\{\phi\}_r = \omega_r^2 [m]\{\phi\}_r$$

$$\{\phi\}_s^T [k]\{\phi\}_r = \omega_r^2 \{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r$$ *..moltiplico per trasposta autovetture s

$$\{\phi\}_r^T [k]\{\phi\}_s = \omega_r^2 \{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s$$ ..per la simmetria..

$$[k]\{\phi\}_s = \omega_s^2 [m]\{\phi\}_s$$

$$\{\phi\}_r^T [k]\{\phi\}_s = \omega_s^2 \{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s$$ **..moltiplico per trasposta autovetture r

$$0 = \left(\omega_s^2 - \omega_r^2\right)\{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s$$ ..sottraggo * a **

$$\{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s = 0 \qquad \{\phi\}_r^T [k]\{\phi\}_s = 0$$

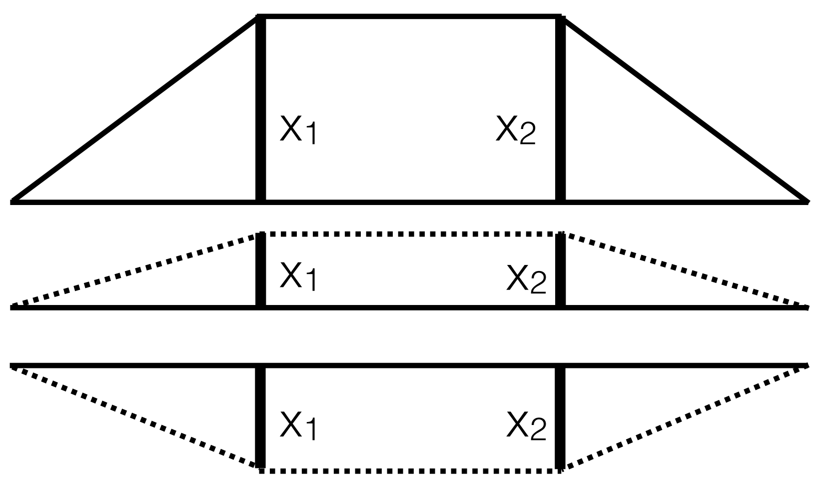
$$\{\phi_i\}_r^T [k]\{\phi_i\}_r = \omega_r^2 \{\phi_i\}_r^T [m]\{\phi_i\}_r$$

$$k_r = \omega_r^2 m_r$$

$$\omega_r^2 = \frac{k_r}{m_r}$$

Sistemi MDOF - modale

gli autovalori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa!
(derivano da valori di ω_i che annullano il det. matrice rigidezza dinamica!)



definito un elemento del vettore,
si derivano gli altri (N-1) elementi ..

esistono diverse maniere di scalare
le forme modali:

Scalo il modo r: $\{\phi_i\}_r = 1$ per una generica coordinata i

$\{\phi_i\}_r = 1$ per la coordinata con spostamento massimo i

$\{\phi_i\}_r^T [m]\{\phi_i\}_r = M_r = 1$ la massa modale abbia un valore definito

$\|\phi_i\|_r = 1$ la norma (euclidea, infinito,..) dell'autovettore sia unitaria

Sistemi MDOF - modale

se gli autovalori sono distinti.. si calcolano così:

$$\left([k]-\omega^2[m]\right)\{X\}=\{0\}$$

l'equazione del moto…

$$\left([k]-\omega_r^2[m]\right)\{\phi_r\}=\{0\}$$

in risonanza…

$$\begin{array}{cc} \color{red}{1\text{x}1} & \color{red}{1\text{xN-1}} \\ \end{array}\quad \color{red}{1\text{x}1}$$

$$\begin{bmatrix} D_{aa}(\omega_r) & D_{ab}(\omega_r) \\ D_{ba}(\omega_r) & D_{bb}(\omega_r) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_b \end{Bmatrix}_r=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \color{red}{\text{N-1x1}} & \color{red}{\text{N-1xN-1}} \\ \end{array}\quad \color{red}{\text{N-1x1}}$$

partizionando opportunamente…

in risonanza det[D(ω_r)]=0, matrice singolare, ma ω_r è un autovalore distinto il rango di [D(ω_r)] sarà N-1 quindi [D_{bb}(ω_r)] non è singolare ed è invertibile..

$$\underset{\color{red}{\text{N-1x1}}}{\{\phi_b\}}=-\underset{\color{red}{\text{N-1xN-1}}}{\left[D_{bb}(\omega_r)\right]^{-1}}\underset{\color{red}{\text{N-1x1}}}{\{D_{ba}(\omega_r)\}}$$

$$\{\phi_r\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -\left[D_{bb}(\omega_r)\right]^{-1}\{D_{ba}(\omega_r)\} \end{Bmatrix}$$

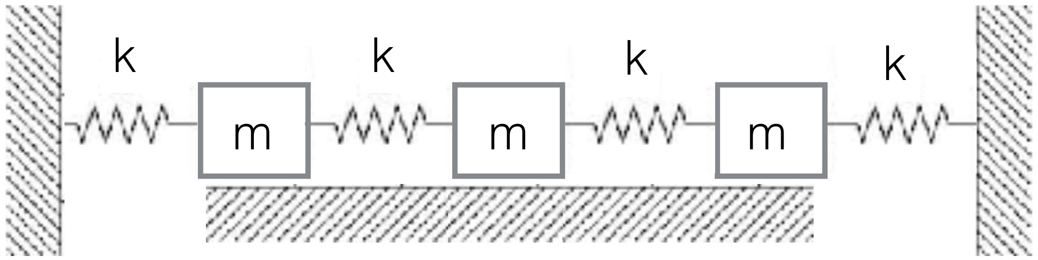
Sistemi MDOF - modale

esempio…

m=1
k=1

$$[m]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$[k]=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}$$

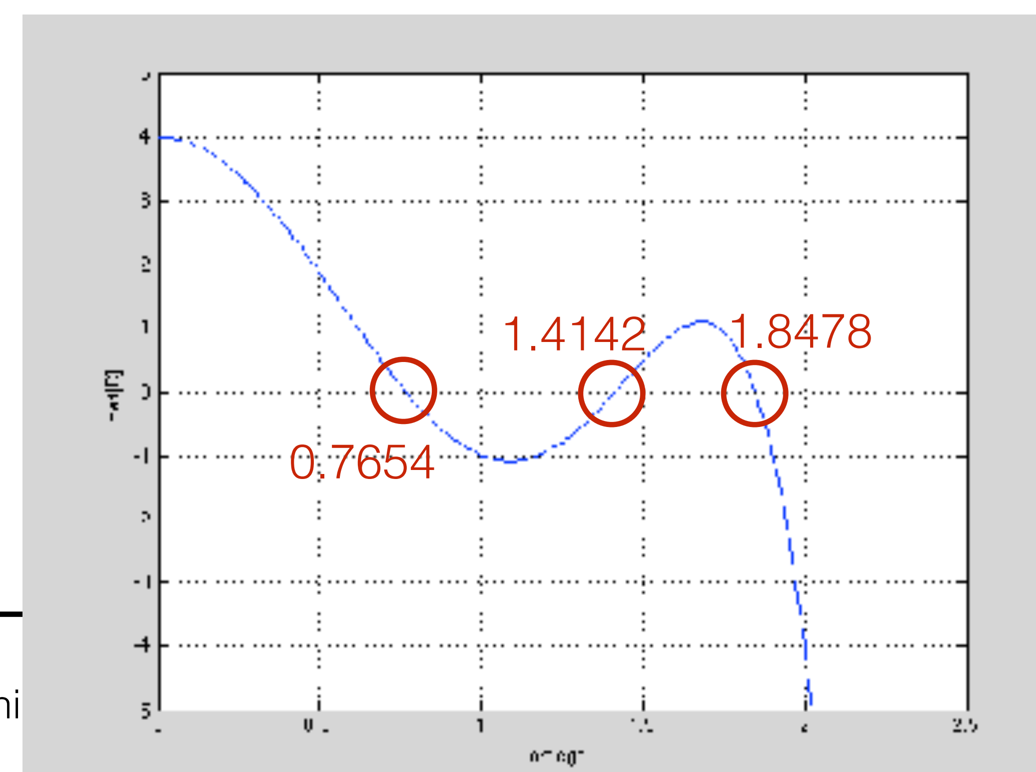


$$\left[D(\omega)\right]=\begin{bmatrix}2-\omega^2&-1&0\\-1&2-\omega^2&-1\\0&-1&2-\omega^2\end{bmatrix}$$

$$\det\left[D(\omega)\right]=\left(2-\omega^2\right)\begin{bmatrix}2-\omega^2&-1\\-1&2-\omega^2\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}-1&-1\\0&2-\omega^2\end{bmatrix}$$

$$\det\left[D(\omega)\right]=\left(2-\omega^2\right)\left(\omega^4-4\omega^2+2\right)$$

andamento di det[D(ω)]



Sistemi MDOF - modale

esempio…

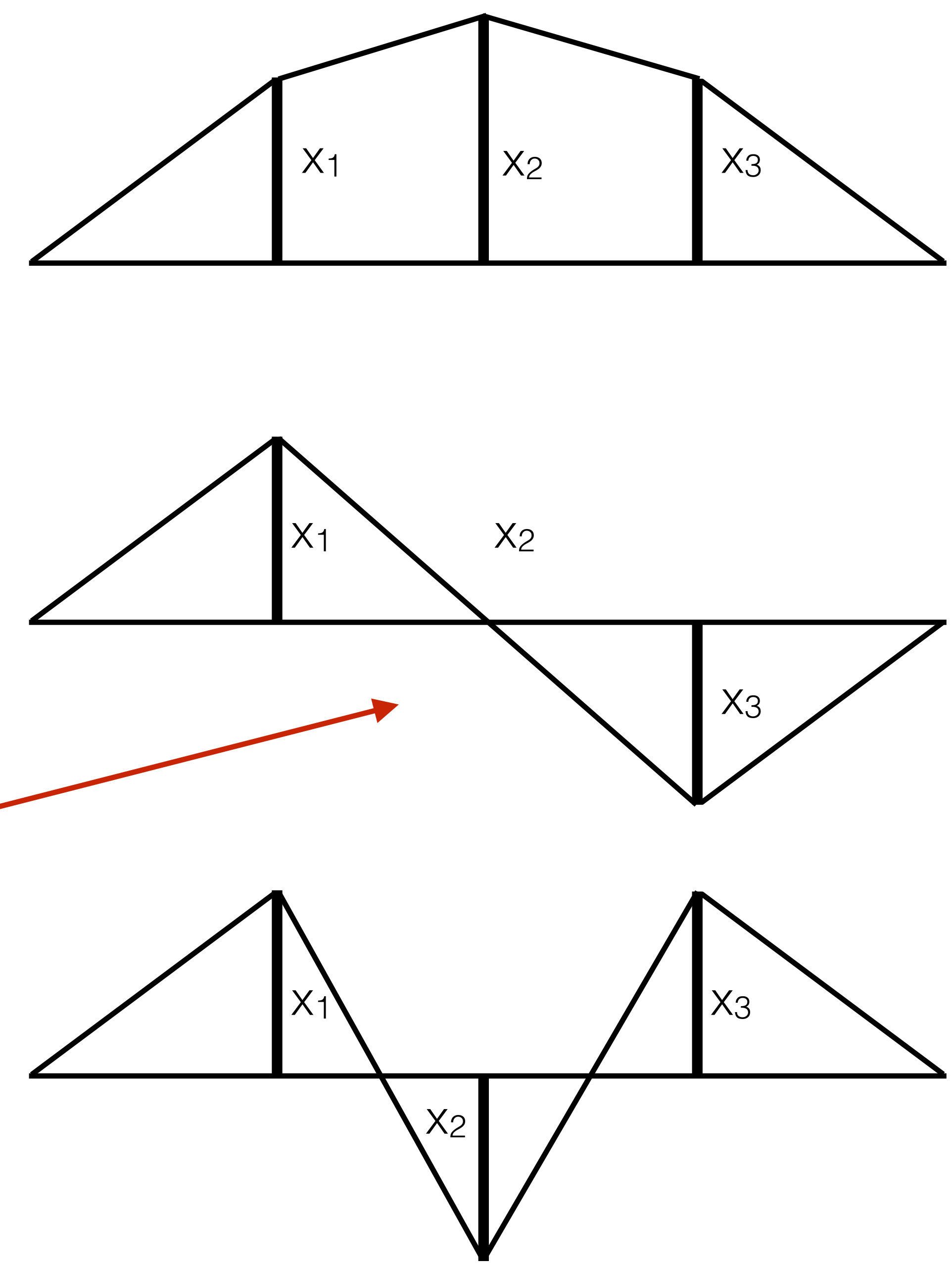
per ω_2 calcolo l'autovettore con le formule appena viste…

$$\left[D(\omega_2)\right]=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{\phi_b\}=-\left[D_{bb}(\omega_r)\right]^{-1}\{D_{ba}(\omega_r)\}$$

$$\{\phi_b\}=-\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi_2\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$




```
ave =
   1.0000    1.0000    1.0000
   1.4142   -0.0000   -1.4142
   1.0000   -1.0000    1.0000
```

Sistemi MDOF - modale

esempio…

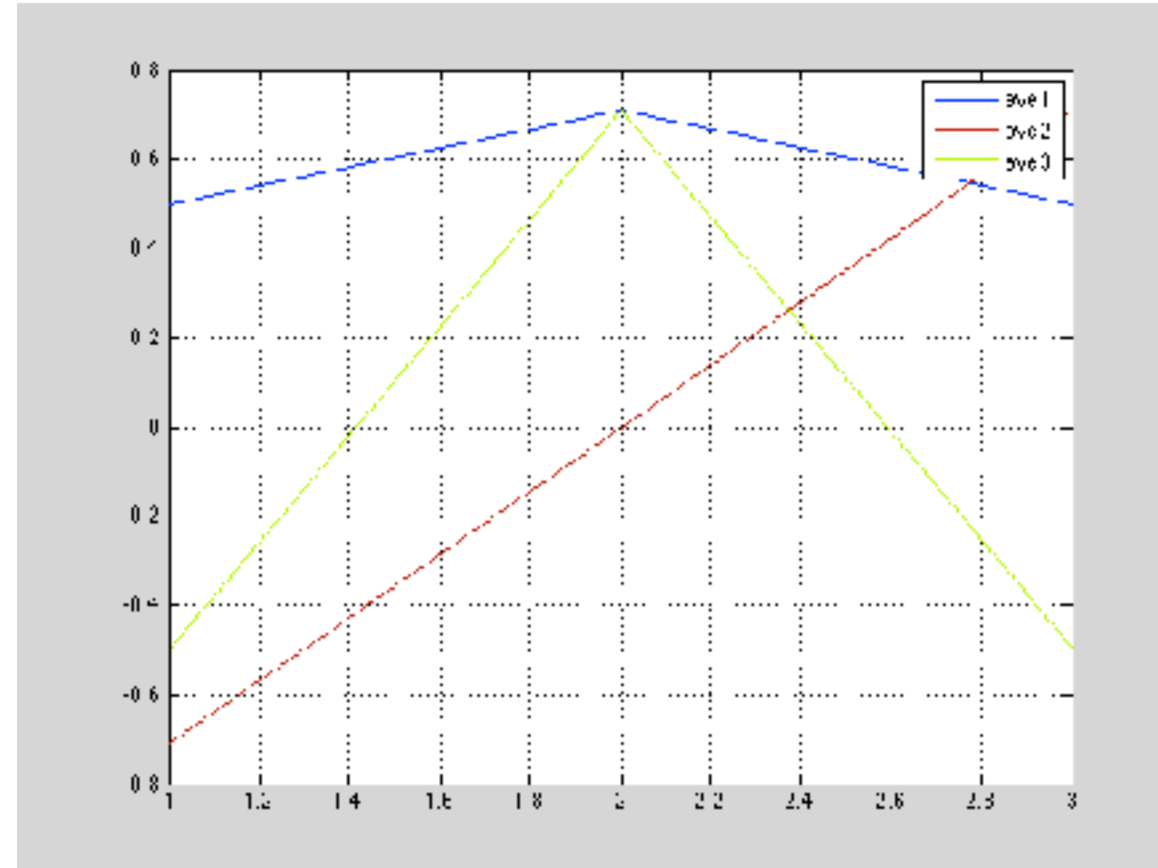
```
>> m=
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1

>> k=
     2    -1     0
    -1     2    -1
     0    -1     2

>> [ave,ava]=eig(k,m)

ave =
    0.5000   -0.7071   -0.5000
    0.7071    0.0000    0.7071
    0.5000    0.7071   -0.5000

ava =
    0.5858         0         0
         0    2.0000         0
         0         0    3.4142
```



Sistemi MDOF - modale

esempio…

se scalo la matrice in modo che il primo elemento del vettore sia unitario……

ave =

1.0000	1.0000	1.0000
1.4142	-0.0000	-1.4142
1.0000	-1.0000	1.0000

se scalo la matrice in modo che l'elemento massimo del vettore sia unitario……

ave =

0.7071	-1.0000	-0.7071
1.0000	0.0000	1.0000
0.7071	1.0000	-0.7071

ave'*m*ave=

2.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	2.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	2.0000

Sistemi MDOF - modale

se gli autovalori sono ripetuti (Δω<1%) .. si calcolano così:

immaginiamo l'ordine di ripetizione sia p, il rango di [D(ω)] sarà N-p, si potrà scrivere allora similmente a prima

$$\begin{array}{cc} \text{pxp} & \text{pxN-p} \\ \left[\begin{array}{cc} D_{aa}(\omega_r) & D_{ab}(\omega_r) \\ D_{ba}(\omega_r) & D_{bb}(\omega_r) \end{array}\right] \\ \text{N-pxp} & \text{N-pxN-p} \end{array} \begin{array}{c} \text{px1} \\ \left\{\begin{array}{c} \phi_a \\ \phi_b \end{array}\right\}_r \\ \text{N-px1} \end{array} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

$$\underbrace{\{\phi_b\}}_{\text{N-px1}} = -\underbrace{\left[D_{bb}(\omega_r)\right]^{-1}}_{\text{N-pxN-p}} \underbrace{\left[D_{ba}(\omega_r)\right]}_{\text{N-pxp}} \underbrace{\{\phi_a\}}_{\text{px1}}$$

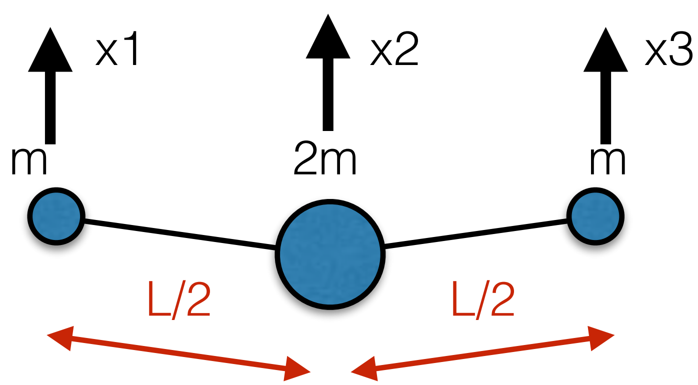
il termine ϕ_a deve essere definito con p vettori indipendenti!

$$\{\phi_a\}_r = \left\{\begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ .. \\ \phi_p \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{array}\right\} \quad \{\phi_a\}_{r+1} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ .. \\ 0 \end{array}\right\} \quad \dots \quad \{\phi_a\}_{r+p-1} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ .. \\ 1 \end{array}\right\}$$

Sistemi MDOF - modale

..se i modi rappresentano una base del sistema, ogni deformazione di questo si può esprimere come una CL di forme modali…

$$\{x\} = \sum_{r=1}^{N} c_r \{\phi\}_r \qquad \text{..con…} \qquad c_r = \frac{1}{M_r}\{\phi\}_r^T [m]\{x\}$$



$$[\phi] = \left[\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}_3 \right]$$

..se vogliamo rappresentare un modo simmetrico..
il termine c_1 della CL deve essere nullo…(il modo 1 è assimmetrico)

$$c_1 = \frac{\{\phi\}_1^T [m]\{x\}}{\{\phi\}_1^T [m]\{\phi\}_1} \qquad c_1 = \frac{\boxed{\begin{Bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ a \end{Bmatrix}}}{\{\phi\}_1^T [m]\{\phi\}_1}$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} ma \\ 2mb \\ ma \end{Bmatrix} = 0$$

Sistemi MDOF - modale

..condizioni iniziali

..partendo dalla soluzione di primo tentativo..

$$\{x\} = \{X\}\cos(\omega t - \alpha)$$

..considerando il modo r..

$$\{x\}_r = c_r \phi_r \cos(\omega_r t - \alpha_r)$$

..estendendo a tutti i modi..

$$\{x\} = \sum_{r=1}^{N} c_r \phi_r \cos(\omega_r t - \alpha_r) = \sum_{r=1}^{N} \phi_r \left[A_r \cos(\omega_r t) + B_r \sin(\omega_r t) \right]$$

..con i 2N coefficienti da determinare in base alle CI

$$\{x(0)\} = \sum_{r=1}^{N} \{\phi_r\} a_r$$

$$\{\dot{x}(0)\} = \sum_{r=1}^{N} \{\phi_r\} \omega_r b_r$$

..moltiplicando per

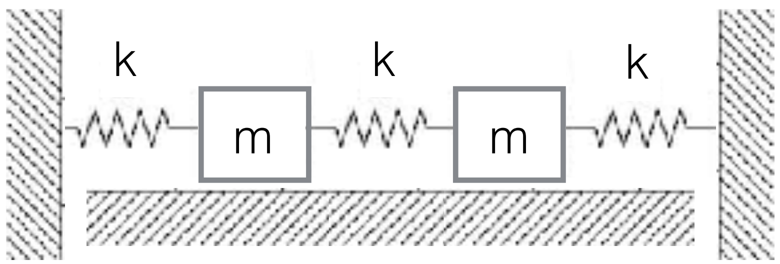
$$\{\phi\}_s^T [m]$$

$$a_r = \frac{\{\phi_r\}^T [m] \{x(0)\}}{M_r}$$

$$b_r = \frac{\{\phi_r\}^T [m] \{\dot{x}(0)\}}{\omega_r M_r}$$

Sistemi MDOF - modale

..esempio



$$[m]=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad [k]=\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \quad [\phi]=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

..con le seguenti CI $\{\dot{x}(0)\}=\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}$ $\{x(0)\}=\left\{\begin{matrix} 0 \\ X_0 \end{matrix}\right\}$

$$[M]=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}$$

..calcolo le masse modali

$$[m]\{x(0)\}=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\left\{\begin{matrix} 0 \\ X_0 \end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} 0 \\ mX_0 \end{matrix}\right\}$$

..calcolo l'influenza delle CI

$$[m]\{\dot{x}(0)\}=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}$$

Sistemi MDOF - modale

..esempio

$$a_r = \frac{\{\phi_r\}^T [m]\{x(0)\}}{M_r}$$

$$b_r = \frac{\{\phi_r\}^T [m]\{\dot{x}(0)\}}{\omega_r M_r}$$

..sostituendo quanto appena calcolato…

$$a_1 = \frac{\begin{Bmatrix} 1 & 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ mX_0 \end{Bmatrix}}{2m} = \frac{X_0}{2} \qquad b_1 = \frac{\begin{Bmatrix} 1 & 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}{2m} = 0$$

$$a_2 = \frac{\begin{Bmatrix} 1 & -1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ mX_0 \end{Bmatrix}}{2m} = -\frac{X_0}{2} \qquad b_2 = \frac{\begin{Bmatrix} 1 & -1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}{2m} = 0$$

..si ottiene la soluzione già vista..

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^{2} a_r \{\phi_r\}\cos(\omega_r t) \qquad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{X_0}{2}\begin{Bmatrix} \cos(\omega_1 t)-\cos(\omega_2 t) \\ \cos(\omega_1 t)+\cos(\omega_2 t) \end{Bmatrix}$$

Sistemi MDOF - modale

vediamo cosa succede alle funzioni di trasferimento nel caso MDOF

$$\left[Z(p)\right]=\left[p^2[m]+p[c]+[k]\right]$$

Partiamo dalla matrice di rigidezza dinamica è di dimensioni N*N, la sua inversa è la matrice delle funzioni di trasferimento

$$\left[H(p)\right]=\left[Z(p)\right]^{-1}$$

$$\left[H(\omega)\right]=\left[H(p)\right]\Big|_{j\omega}$$

Queste valutate per p=jω si chiamo Funzioni di Risposta in Frequenza (FRF) (sempre N*N)

$$H_{ij}(\omega)=\frac{X_i(\omega)}{F_j(\omega)}$$

Il generico termine $H_{ij}(\omega)$ è il rapporto tra la trasformata della risposta X_i, sulla trasformata dell'eccitazione F_j.

$$H_{ij}(\omega)=H_{ji}(\omega)$$

Per la simmetria delle matrici di partenza, la matrici [H] è simmetrica!

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Sistemi MDOF - modale

$$\left[H(\omega)\right]=\left[Z(\omega)\right]^{-1}=\frac{adj\left[Z(\omega)\right]}{\det\left[Z(\omega)\right]}$$

$$\left[H(\omega)\right]=\frac{P(\omega)}{Q(\omega)}=\sum_{r=1}^{N}\frac{A_i}{B_i}$$

Come nel caso SDOF anche nel caso MDOF ci sono diverse rappresentazioni

* come rapporto di polinomi
* come somma di residui (frazioni parziali)

(vedi parte 2)

$$H(j\omega)=\frac{(j\omega-z_1)(j\omega-z_2)\ldots(j\omega-z_p)}{(j\omega-\lambda_1)(j\omega-\lambda_2)\ldots\ldots(j\omega-\lambda_{2N})}$$

..prodotto di p zeri
..prodotto di 2N poli

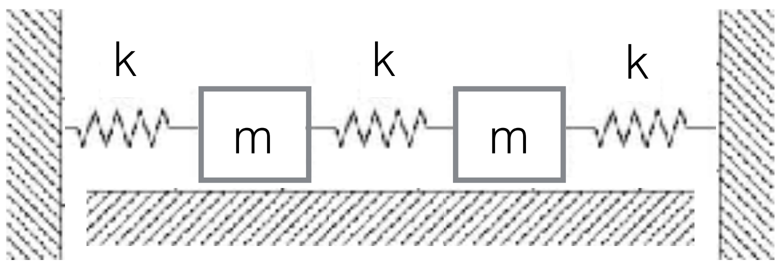
$$\left[H(j\omega)\right]=\sum_{r=1}^{N}\frac{\left[A_r\right]}{(j\omega-\lambda_r)}+\frac{\left[A_r^*\right]}{(j\omega-\lambda_r^*)}$$

..somma di N modi (ciascuno con 2 contributi traloro complessi coniugati)

$$H_{pq}(j\omega)=\sum_{r=1}^{N}\frac{A_{pqr}}{(j\omega-\lambda_r)}+\frac{A_{pqr}^*}{(j\omega-\lambda_r^*)}$$

Sistemi MDOF - modale

..esempio



$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

$$\left[Z(\omega)\right] = \begin{bmatrix} k_{11} - \omega^2 m_{11} & k_{12} - \omega^2 m_{12} \\ k_{21} - \omega^2 m_{21} & k_{22} - \omega^2 m_{22} \end{bmatrix}$$

..matrice di rigidezza dinamica

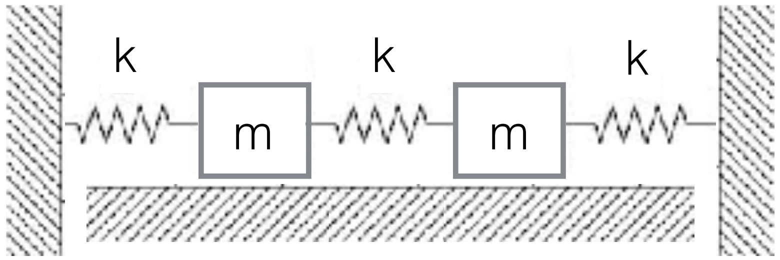
$$\left[H(\omega)\right] = \left[Z(\omega)\right]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} k_{22} - \omega^2 m_{22} & -\left(k_{21} - \omega^2 m_{21}\right) \\ -\left(k_{12} - \omega^2 m_{12}\right) & k_{11} - \omega^2 m_{11} \end{bmatrix}}{\left(k_{11} - \omega^2 m_{11}\right)\left(k_{22} - \omega^2 m_{22}\right) - \left(k_{12} - \omega^2 m_{12}\right)\left(k_{21} - \omega^2 m_{21}\right)}$$

$$\left(k_{11} - \omega^2 m_{11}\right)\left(k_{22} - \omega^2 m_{22}\right) - \left(k_{12} - \omega^2 m_{12}\right)\left(k_{21} - \omega^2 m_{21}\right) =$$
$$\left(j\omega - \lambda_1\right)\left(j\omega - \lambda_1^*\right)\left(j\omega - \lambda_2\right)\left(j\omega - \lambda_2^*\right)$$

..note che siano le radici dell'eq.caratteristica, o poli

Sistemi MDOF - modale

..esempio



$$\left[H(\omega)\right]=\left[Z(\omega)\right]^{-1}=\frac{\begin{bmatrix} k_{22}-\omega^2 m_{22} & k_{21}-\omega^2 m_{21} \\ k_{12}-\omega^2 m_{12} & k_{11}-\omega^2 m_{11} \end{bmatrix}}{\left(k_{11}-\omega^2 m_{11}\right)\left(k_{22}-\omega^2 m_{22}\right)-\left(k_{12}-\omega^2 m_{12}\right)\left(k_{21}-\omega^2 m_{21}\right)}$$

$$H_{11}(\omega)=\frac{k_{22}-\omega^2 m_{22}}{\left(j\omega-\lambda_1\right)\left(j\omega-\lambda_1^*\right)\left(j\omega-\lambda_2\right)\left(j\omega-\lambda_2^*\right)}$$

..le 4 FRF del sistema a 2 DOF..

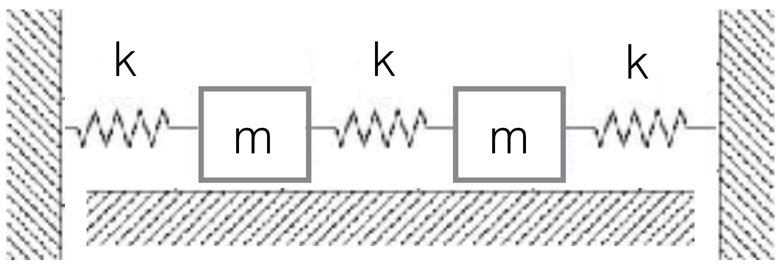
$$H_{12}(\omega)=H_{21}(\omega)=\frac{k_{12}-\omega^2 m_{12}}{\left(j\omega-\lambda_1\right)\left(j\omega-\lambda_1^*\right)\left(j\omega-\lambda_2\right)\left(j\omega-\lambda_2^*\right)}$$

$$H_{22}(\omega)=\frac{k_{11}-\omega^2 m_{11}}{\left(j\omega-\lambda_1\right)\left(j\omega-\lambda_1^*\right)\left(j\omega-\lambda_2\right)\left(j\omega-\lambda_2^*\right)}$$

..le N*N FRF del sistema a N DOF..

Sistemi MDOF - modale

..esempio



..analogamente al caso SDOF si cerca la rappresentazione a frazioni parziali

$$H_{11}(\omega)=\frac{k_{22}-\omega^2 m_{22}}{(j\omega-\lambda_1)(j\omega-\lambda_1^*)(j\omega-\lambda_2)(j\omega-\lambda_2^*)}$$

$$=\frac{c_1}{(j\omega-\lambda_1)}+\frac{c_2}{(j\omega-\lambda_1^*)}+\frac{c_3}{(j\omega-\lambda_2)}+\frac{c_4}{(j\omega-\lambda_2^*)}$$

..moltiplico per ($j\omega-\lambda_1$)..

$$c_1=\frac{k_{22}-\lambda_1^2 m_{22}}{(\lambda_1-\lambda_1^*)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2^*)}=A_{111}$$

..valuto per $j\omega=\lambda_1$..

..e analogamente gli altri residui

$$c_2=\frac{k_{22}-\lambda^{*2}_1 m_{22}}{(\lambda_1^*-\lambda_1)(\lambda_1^*-\lambda_2)(\lambda_1^*-\lambda_2^*)}=A_{111}^* \qquad c_3=\frac{k_{22}-\lambda_2^2 m_{22}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1^*)(\lambda_2-\lambda_2^*)}=A_{112} \qquad c_4=\frac{k_{22}-\lambda_2^2 m_{22}}{(\lambda_2^*-\lambda_1)(\lambda_2^*-\lambda_1^*)(\lambda_2^*-\lambda_2)}=A_{112}^*$$

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Sistemi MDOF - modale

..esempio

$$\left[H(j\omega)\right] = \sum_{r=1}^{N} \frac{\left[A_r\right]}{\left(j\omega - \lambda_r\right)} + \frac{\left[A_r^*\right]}{\left(j\omega - \lambda_r^*\right)}$$

$$\begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) \end{bmatrix} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\begin{bmatrix} A_{11r} & A_{12r} \\ A_{21r} & A_{22r} \end{bmatrix}}{\left(j\omega - \lambda_r\right)} + \frac{\begin{bmatrix} A_{11r}^* & A_{12r}^* \\ A_{21r}^* & A_{22r}^* \end{bmatrix}}{\left(j\omega - \lambda_r^*\right)}$$

Tanti contributi così quanti sono i modi (N)

..in realtà non serve calcolare tutte le matrici dei residui,
perché queste sono complesse coniugate a due a due..

..in realtà non serve calcolare tutti gli elementi delle le matrici dei residui,
perché queste sono simmetriche..

Sistemi MDOF - modale

La matrice dei residui A_r è proporzionale alla forma modale ϕ_r

$$\left[A_r\right]=Q_r\{\phi\}_r\{\phi\}_r^T=Q_r\begin{bmatrix}\phi_1\phi_1 & \phi_1\phi_2 & \dots & \phi_1\phi_N \\ \phi_2\phi_1 & \phi_2\phi_2 & \dots & \phi_2\phi_N \\ .. & \dots & \dots & \dots \\ \phi_1\phi_N & \phi_N\phi_2 & \dots & \phi_N\phi_N\end{bmatrix}$$

..vediamo come, partendo dalla matrice di rigidezza dinamica..

$$\left[Z(\omega)\right]\left[Z(\omega)\right]^{-1}=\left[I\right] \qquad \left[Z(\omega)\right]^{-1}=\frac{adj\left[Z(\omega)\right]}{\det\left[Z(\omega)\right]}$$

$$\left[Z(\omega)\right]\frac{adj\left[Z(\omega)\right]}{\det\left[Z(\omega)\right]}=\left[I\right]$$

$$\left[Z(\omega)\right]adj\left[Z(\omega)\right]=\det\left[Z(\omega)\right]$$

..valutiamola per λ_r.. $\det[Z(\lambda_r)]=0$

$$\left[Z(\lambda_r)\right]adj\left[Z(\lambda_r)\right]=\{0\}$$

..prendiamo la i-esima colonna

Sistemi MDOF - modale

$$\left[Z(\lambda_r)\right]\left\{Z(\lambda_r)\right\}_i^A=\{0\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[Z(\lambda_r)\right]\{X\}_{\lambda_r}=\left[Z(\lambda_r)\right]\{\phi\}_r=\{0\}$$

..ricordiamo la definizione di [Z(ω)]..

$$\{\phi_r\}=\beta_{ir}\left\{Z(\lambda_r)\right\}_i^A$$

..da cui la menzionata proporzionalità..

..essendo m e k matrici simmetriche, anche adj[Z(λ_r)] sarà simmetrica..
..lo stesso discorso vale per le righe e per le colonne…

$$adj\left[Z(\lambda_r)\right]=Q_r\{\phi\}_r\{\phi\}_r^T=Q_r\begin{bmatrix}\phi_1\phi_1 & \phi_1\phi_2 & \dots & \phi_1\phi_N\\ \phi_2\phi_1 & \phi_2\phi_2 & \dots & \phi_2\phi_N\\ .. & \dots & \dots & \dots\\ \phi_1\phi_N & \phi_N\phi_2 & \dots & \phi_N\phi_N\end{bmatrix}=\left[A_r\right]$$

Sistemi MDOF - modale

..sfruttiamo la proprietà appena vista per sintetizzare le FRF ..

Un sistema a N DOF ha potenzialmente N*N FRF,
è improponibile calcolarle/misurarle tutte!
Ci si milita ad un set discreto (un paio di righe o di colonne complete)
ed eventualmente si sintetizzano quelle mancanti d'interesse!

..ricordiamo..

$$\left[H(\omega)\right]=\begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \dots & H_{1N}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \dots & H_{2N}(\omega) \\ .. & \dots & \dots & \dots \\ H_{N1}(\omega) & H_{N2}(\omega) & \dots & H_{NN}(\omega) \end{bmatrix}$$

.. k-esima colonna della matrice dei residui..

..prendiamo la k-esima colonna..

$$\begin{Bmatrix} H_{1k}(\omega) \\ H_{2k}(\omega) \\ \dots \\ H_{Nk}(\omega) \end{Bmatrix}=\sum_{r=1}^{N}\frac{\{A_r\}_k}{j\omega-\lambda_r}+\frac{\{A_r\}_r^*}{j\omega-\lambda_r^*}$$

Sistemi MDOF - modale

$$[A_r] = Q_r \begin{bmatrix} \phi_1\phi_1 & \phi_1\phi_2 & \cdots & \phi_1\phi_N \\ \phi_2\phi_1 & \phi_2\phi_2 & \cdots & \phi_2\phi_N \\ .. & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_1\phi_N & \phi_N\phi_2 & \cdots & \phi_N\phi_N \end{bmatrix}$$

..prendiamo la k-esima colonna..

$$\begin{Bmatrix} A_{1k} \\ A_{2k} \\ \cdots \\ A_{Nk} \end{Bmatrix}_r = Q_r \begin{Bmatrix} \phi_1\phi_k \\ \phi_2\phi_k \\ \cdots \\ \phi_N\phi_k \end{Bmatrix}_r = Q_r\phi_{kr} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \cdots \\ \phi_N \end{Bmatrix}_r$$

..da cui deriviamo l'espressione per il generico termine dalla matrice dei residui..

$$A_{pqr} = Q_r\phi_{pr}\phi_{qr}$$

..e da questa l'espressione per la sintesi:

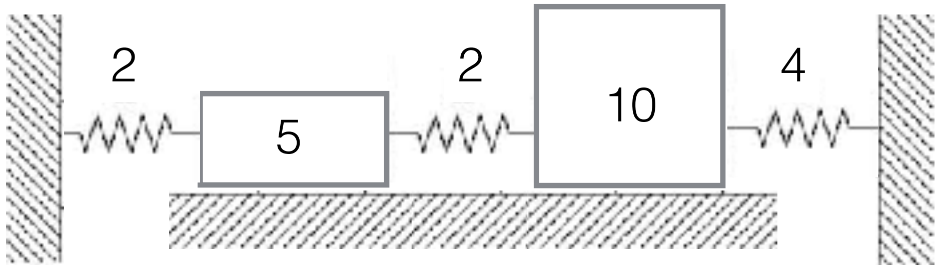
$$A_{pqr} = \frac{A_{kpr}A_{kqr}}{A_{kkr}} = \frac{Q_r\phi_{kr}\phi_{pr}Q_r\phi_{kr}\phi_{qr}}{Q_r\phi_{kr}\phi_{kr}}$$

.. serve conoscere il termine diretto A_{kkr}!!!

..schemino..

Sistemi MDOF - modale

..esempio..



$$[m]=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \qquad [k]=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

..senza smorzamento..

$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\}$$

..problema autovalori

$$\left\|\left[[k]+s^2[m]\right]\right\|=\{0\}$$

$$\left\|\left[[m]^{-1}[k]+s^2[I]\right]\right\|=\{0\}$$

$$\left\|\left[\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}+\frac{1}{s^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]\right\|=\{0\}$$

$$\left\|\left[[k]^{-1}[m]+\frac{1}{s^2}[I]\right]\right\|=\{0\}$$

$$\left[\begin{bmatrix} 3/10 & 1/10 \\ 1/10 & 1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}+\frac{1}{s^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\{0\}$$

Sistemi MDOF - modale

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}+\frac{1}{s^2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2+\frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad [*]$$

..per la soluzione non banale..

$$\det \begin{bmatrix} \frac{3}{2}+\frac{1}{s^2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2+\frac{1}{s^2} \end{bmatrix} = \{0\}$$

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{s^2}\right)\left(2+\frac{1}{s^2}\right)-\frac{1}{2}=0 \qquad \alpha=\frac{1}{s^2} \qquad \alpha^2+\frac{7}{2}\alpha+\frac{5}{2}=0 \qquad \alpha_{1,2}=\begin{cases} -\frac{5}{2} \\ -1 \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{\alpha_{1,2}}}=\begin{cases} \pm j\sqrt{\frac{2}{5}} \\ \pm j \end{cases}$$

..i poli del sistema sono puramente immaginari !! c=0..

sostituisco $\lambda_1 = \pm j\sqrt{\frac{2}{5}}$ in [*] per valutare l'autovettore

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_1 = \{0\}$$

Sistemi MDOF - modale

$$-X_1 + X_2 = \{0\} \qquad \{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_1 \end{Bmatrix}$$

sostituisco $\lambda_1 = \pm j$ in [*] per valutare l'autovettore 2

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_2 = \{0\}$$

$$\frac{1}{2} X_1 + X_2 = \{0\} \qquad \{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ -\frac{1}{2} X_1 \end{Bmatrix}$$

da cui la matrice modale che deve essere scalata opportunamente!!

$$[\phi] = \left[\{\phi\}_1 \{\phi\}_2 \right] = \begin{bmatrix} X_1 & X_1 \\ X_1 & -\frac{1}{2} X_1 \end{bmatrix}$$

X1 può assumere qualsiasi valore…
ma si può fare in modo che la matrice di massa modale sia unitaria….

Sistemi MDOF - modale

$$[\phi]^T[m][\phi] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_1 \\ X_1 & -\frac{1}{2}X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_1 \\ X_1 & -\frac{1}{2}X_1 \end{bmatrix}$$

si ottengono due equazioni.. per le due masse modali (unitarie)…

$$5X_1^2 + 10X_1^2 = 1$$

$$5X_1^2 + \frac{5}{2}X_1^2 = 1$$

da cui i due termini di scalaggio

$$X_{11} = \pm\sqrt{\frac{1}{15}}$$

$$X_{12} = \pm\sqrt{\frac{2}{15}}$$

$$[\boldsymbol{\Phi}] = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{15}} & \sqrt{\frac{2}{15}} \\ \sqrt{\frac{1}{15}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{15}} \end{bmatrix}$$

matrice modale scalata!

Sistemi MDOF - modale

$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\}$$

$$[\Phi]^T[m][\Phi]\{\ddot{q}\}+[\Phi]^T[k][\Phi]\{q\}=\{0\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\{\ddot{q}\}+\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\{q\}=\{0\}$$

..nel caso in cui ci fossero forzanti..

$$[\Phi]^T[m][\Phi]\{\ddot{q}\}+[\Phi]^T[k][\Phi]\{q\}=[\Phi]^T\{p\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\{\ddot{q}\}+\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\{q\}=\begin{Bmatrix} p_1' \\ p_2' \end{Bmatrix}$$

..le equazioni sono disaccoppiate! 2 sistemi SDOF disuniti…risposte note…

$$\{x\}=[\Phi]\{q\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{15}} & \sqrt{\frac{2}{15}} \\ \sqrt{\frac{1}{15}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{15}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

Sistemi MDOF - modale

..dalla matrice di rigidezza dinamica, calcoliamo le FRF…

$$[Z(s)] = \begin{bmatrix} 5s^2+4 & -2 \\ -2 & 10s^2+6 \end{bmatrix}$$

$$[H(s)] = \frac{adj\begin{bmatrix} 5s^2+4 & -2 \\ -2 & 10s^2+6 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 5s^2+4 & -2 \\ -2 & 10s^2+6 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 10s^2+6 & 2 \\ 2 & 5s^2+4 \end{bmatrix}}{(5s^2+4)(10s^2+6)-4}$$

..noti i poli si può usare la rappresentazione a frazioni parziali…

$$[H(s)] = \frac{\begin{bmatrix} 10s^2+6 & 2 \\ 2 & 5s^2+4 \end{bmatrix}}{50\left(s-j\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\left(s+j\sqrt{\frac{2}{5}}\right)(s-j)(s+j)}$$

Sistemi MDOF - modale

$$H_{11}(s)=\frac{10s^2+6}{50\left(s-j\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\left(s+j\sqrt{\frac{2}{5}}\right)(s-j)(s+j)}$$

$$H_{11}(s)=\frac{A_{111}}{\left(s-j\sqrt{\frac{2}{5}}\right)}+\frac{A_{111}^*}{\left(s+j\sqrt{\frac{2}{5}}\right)}+\frac{A_{112}}{(s-j)}+\frac{A_{112}^*}{(s+j)}$$

..con la solita tecnica..

$$A_{111}=-\frac{j\sqrt{2/5}}{12} \qquad A_{111}^*=\frac{j\sqrt{2/5}}{12} \qquad A_{112}=-\frac{j}{15} \qquad A_{112}^*=\frac{j}{15}$$

..analogamente per tutte le altre FRF e per tutti gli altri termini mancanti..

Sistemi MDOF - modale

$$[H(s)] = \frac{\begin{bmatrix} -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} & -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} \\ -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} & -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} \end{bmatrix}}{\left(s - j\sqrt{\frac{2}{5}}\right)} + \frac{\begin{bmatrix} \frac{j\sqrt{2/5}}{12} & \frac{j\sqrt{2/5}}{12} \\ \frac{j\sqrt{2/5}}{12} & \frac{j\sqrt{2/5}}{12} \end{bmatrix}}{\left(s + j\sqrt{\frac{2}{5}}\right)} + \frac{\begin{bmatrix} -\frac{j}{15} & -\frac{j}{30} \\ \frac{j}{30} & -\frac{j}{60} \end{bmatrix}}{(s-j)} + \frac{\begin{bmatrix} \frac{j}{15} & \frac{j}{30} \\ -\frac{j}{30} & \frac{j}{60} \end{bmatrix}}{(s+j)}$$

$$Q_1 = \pm j\frac{\sqrt{2/5}}{12} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1\phi_1 & \phi_1\phi_2 \\ \phi_2\phi_1 & \phi_2\phi_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$Q_1 = \pm\frac{j}{60} \qquad \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1\phi_1 & \phi_1\phi_2 \\ \phi_2\phi_1 & \phi_2\phi_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Sistemi MDOF - modale

..aggiungiamo smorzamento.. proporzionale

$$[c]=\frac{1}{2}[k]=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

$$[\Phi]^T\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}[\Phi]=\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

..la trasformazione modale diagonalizza la matrice di smorzamento..

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\{\ddot{q}\}+\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\{\dot{q}\}+\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\{q\}=\begin{Bmatrix} p_1^{'} \\ p_2^{'} \end{Bmatrix}$$

..i modi sono gli stessi che nel caso non smorzato..

Sistemi MDOF - modale

..ma cambia significativamente la matrice delle FRF..

$$[H(s)] = \frac{adj\begin{bmatrix} 5s^2+2s+4 & -s-2 \\ -s-2 & 10s^2+3s+6 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 5s^2+2s+4 & -s-2 \\ -s-2 & 10s^2+3s+6 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 10s^2+3s+6 & s+2 \\ s+2 & 5s^2+2s+4 \end{bmatrix}}{50s^4+35s^3+75s^2+20s+20}$$

..i poli diventano complessi, si spostano verso sx nel semipiano di Laplace..

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{1,2}}} = \begin{cases} -\frac{1}{10} \pm j\frac{\sqrt{39}}{10} \\ -\frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{15}}{4} \end{cases}$$

..NB i poli sono 4 a due a due complessi coniugati!

Sistemi MDOF - modale

$$H_{11}(s)=\frac{10s^2+3s+6}{50(s-\lambda_1)(s-\lambda_1^*)(s-\lambda_2)(s-\lambda_2^*)}$$

$$H_{11}(s)=\frac{-j\frac{\sqrt{39}}{117}}{(s-\lambda_1)}+\frac{j\frac{\sqrt{39}}{117}}{(s-\lambda_1^*)}+\frac{-j\frac{4\sqrt{15}}{225}}{(s-\lambda_2)}+\frac{j\frac{4\sqrt{15}}{225}}{(s-\lambda_2^*)}$$

$$Q_1=\pm j\frac{\sqrt{39}}{117} \qquad \begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}$$

$$H_{12}(s)=\frac{s+2}{50(s-\lambda_1)(s-\lambda_1^*)(s-\lambda_2)(s-\lambda_2^*)}$$

$$H_{12}(s)=\frac{-j\frac{\sqrt{39}}{117}}{(s-\lambda_1)}+\frac{j\frac{\sqrt{39}}{117}}{(s-\lambda_1^*)}+\frac{j\frac{2\sqrt{15}}{225}}{(s-\lambda_2)}+\frac{-j\frac{2\sqrt{15}}{225}}{(s-\lambda_2^*)}$$

$$Q_1=\pm\frac{j\sqrt{15}}{225} \qquad \begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\ -1\end{Bmatrix}$$

Sistemi MDOF - modale

..aggiungiamo smorzamento.. non proporzionale $\quad [c] == \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

..la trasformazione non disaccoppia le equazioni del sistema..
bisogna utilizzare l'espansione di Duncan-Collar

..cambiano le FRF..

$$[H(s)] = \frac{adj \begin{bmatrix} 5s^2+6s+4 & -4s-2 \\ -4s-2 & 10s^2+5s+6 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 5s^2+6s+4 & -4s-2 \\ -4s-2 & 10s^2+5s+6 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 10s^2+5s+6 & 4s+2 \\ 4s+2 & 5s^2+6s+4 \end{bmatrix}}{50s^4+85s^3+84s^2+40s+20}$$

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Sistemi MDOF - modale

..cambiano poli, e residui..

$$\begin{cases} \lambda_1 = -0.095 + j0.629 \\ \lambda_1^* = -0.095 - j0.629 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_2 = -0.754 + j0.645 \\ \lambda_2^* = -0.754 - j0.645 \end{cases}$$

$$H_{22}(s) = \frac{0.0037 - j0.0587}{(s-\lambda_1)} + \frac{0.0037 + j0.0587}{(s-\lambda_1^*)} + \frac{0.0037 - j0.0163}{(s-\lambda_2)} + \frac{0.0037 + j0.0163}{(s-\lambda_2^*)}$$

..ma soprattutto gli autovettori.. che diventano complessi!
(di diversi DOF non raggiungono gli estremi di spostamento simultaneamente!)

$$per\lambda_1 \qquad \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} -0.0034 - j0.0501 \\ 0.0037 - j0.0587 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0502 & -93.96^\circ \\ 0.0588 & -86.93^\circ \end{Bmatrix}$$

$$per\lambda_2 \qquad \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} -0.0034 + j0.0452 \\ 0.0037 - j0.0163 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0454 & +94.30^\circ \\ 0.0167 & -77.21^\circ \end{Bmatrix}$$

Sistemi MDOF - modale

numerica

sperimentale

sistema fisico

discretizzazione

equazioni moto $[m]\ddot{x}+[c]\dot{x}+[k]x=p$

soluzione problema autovalori

$[\phi]_n,[\lambda]_n$ $\qquad$ $[\phi]_s,[\lambda]_s$

sintesi FRF $\qquad$ correlazione $\qquad$ **identificazione**

$[H]_n$ $\qquad$ $[H]_s$ $\qquad$ N*r

misure sperimentali

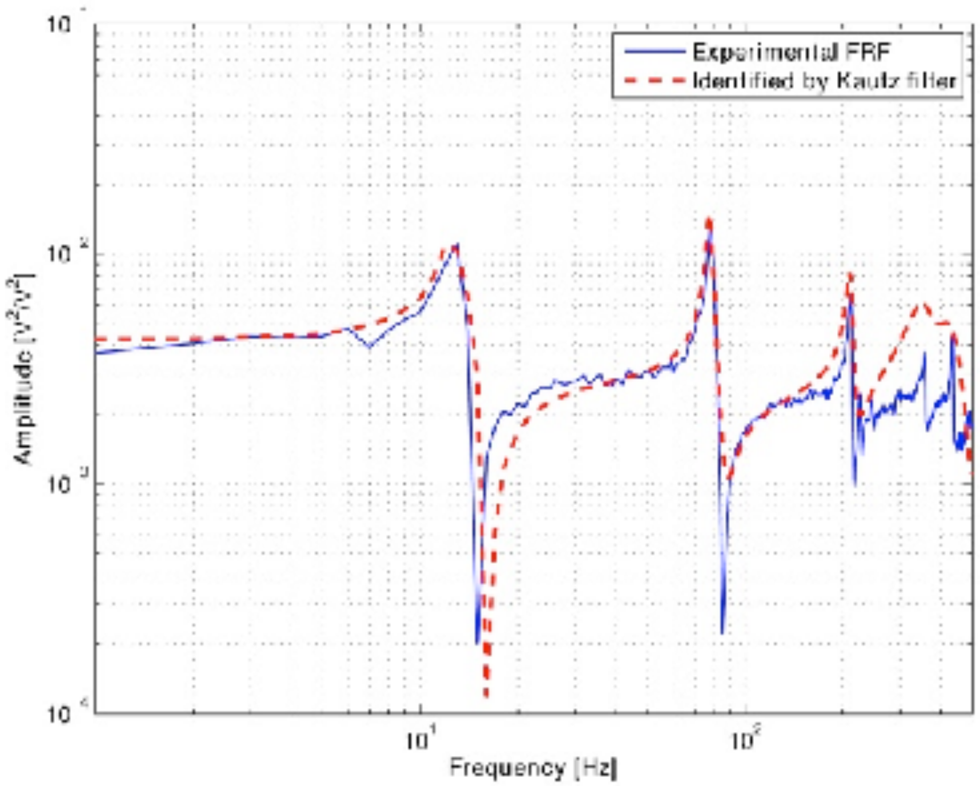
sistema fisico

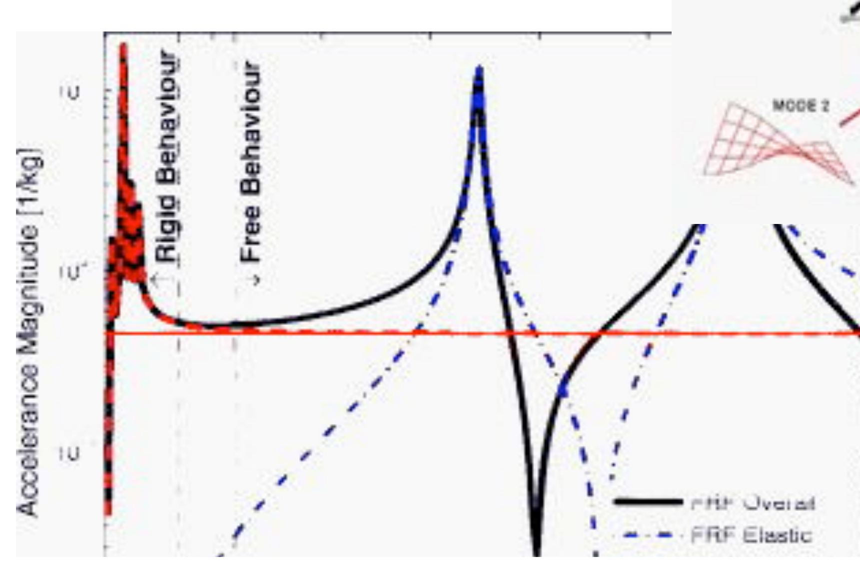
diverse dimensioni delle matrici!

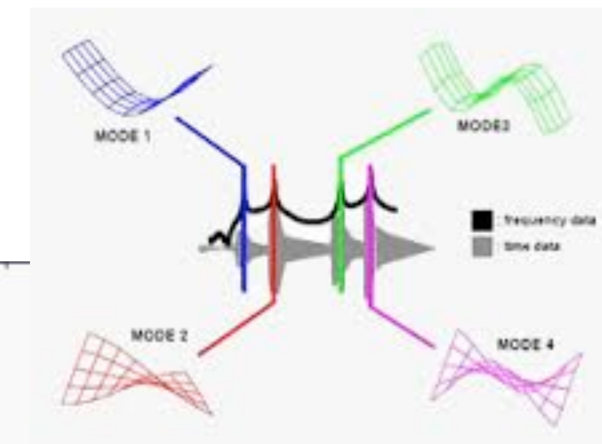
Sistemi MDOF - modale

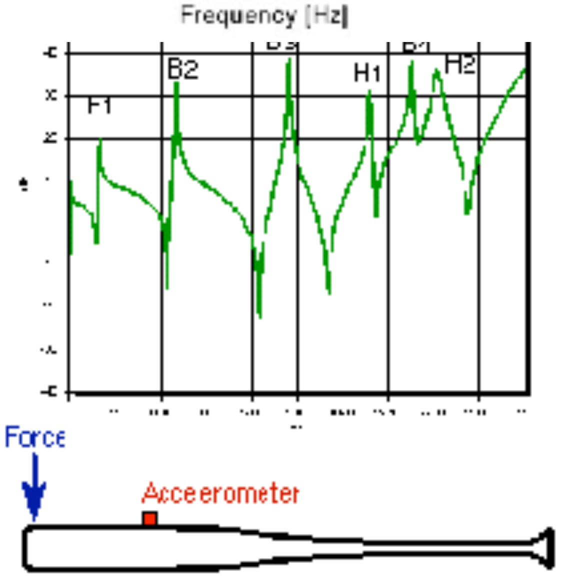
..identificazione..

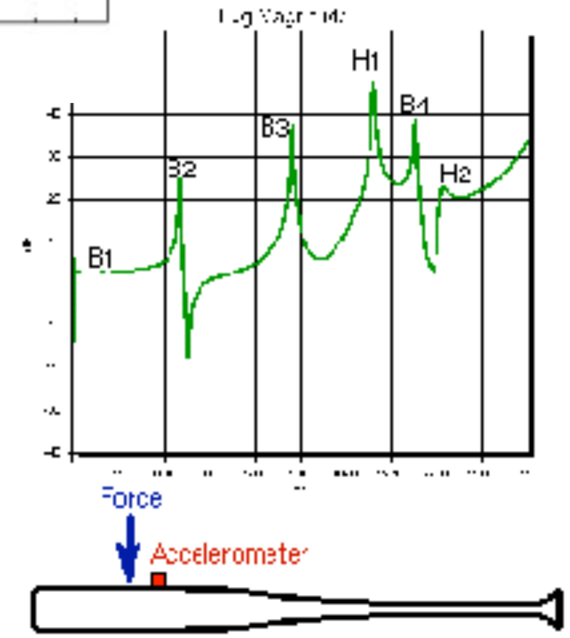
Con identificazione si intende un processo che dalle FRF sperimentali, permette di calcolare Autovalori ed Autovettori del sistema,
e costruire un modello matematico dello stesso che abbia delle FRF quanto più prossime a quelle misurate!

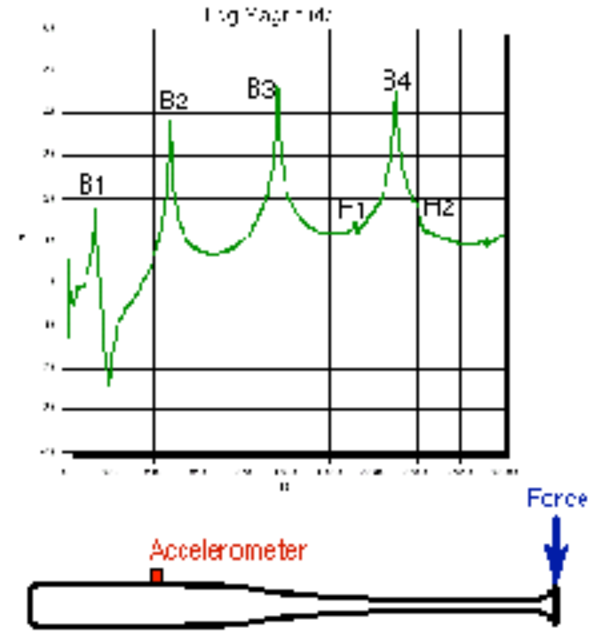












Sistemi MDOF - modale

Ricordiamo che per le proprietà dei residui basta misurare un numero limitato di FRF (complete)..

$$[H(\omega)]_s = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \dots & H_{1N}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \dots & H_{2N}(\omega) \\ .. & \dots & \dots & \dots \\ H_{N1}(\omega) & H_{N2}(\omega) & \dots & H_{NN}(\omega) \end{bmatrix}$$

$$[H(j\omega)] = \sum_{r=1}^{N} \frac{[A_r]}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{[A_r^*]}{(j\omega - \lambda_r^*)}$$

..e identificare i parametri del modello autovalori (λr) autovettori (ϕ_r) residui (A_r)…

$$[H(j\omega)] = [V][j\omega[I] - [\lambda]]^{-1}[L]$$

$$[V] = \begin{bmatrix} \{\phi\}_1 & \{\phi\}_2 & .. & \{\phi\}_N \end{bmatrix}$$ matrice modale

$$[L] = [Q][V]^T$$ matrice di partecipazione modale

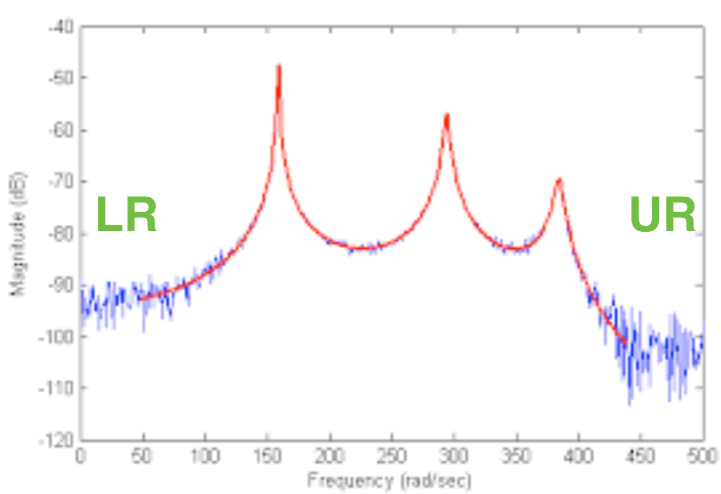
Sistemi MDOF - modale

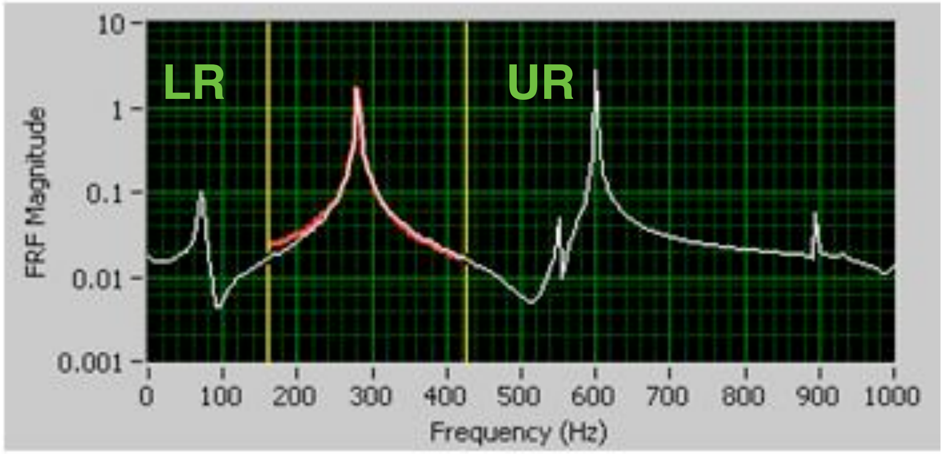
Le strutture reali sono continue.. hanno infiniti modi.. tra 0 e infinito…
se ne misura un numero N_m (minore di infinito)… si approssima la soluzione!!

$$\left[H(j\omega)\right]=\sum_{r=1}^{N}\frac{[A_r]}{(j\omega-\lambda_r)}+\frac{[A_r^*]}{(j\omega-\lambda_r^*)}+[UR]-\frac{[LR]}{\omega^2}$$

$[UR]$ Upper Residual.. per considerare i modi fuori-banda superiori

$\frac{[LR]}{\omega^2}$ Lower Residual.. per considerare i modi fuori-banda inferiori





Sistemi MDOF - modale

Metodi di identificazione si classificano:

SDOF vs MDOF: un solo modo o più modi nella banda d'interesse

LOCALI vs GLOBALI: non tengono o tengono conto del fatto che
i poli non dipendono da i,j, p modi non dipendono dal punto di eccitazione j,
i coefficienti di partecipazione non dipendono dal punto di misura i

S excitation vs M excitation: si considera una a più colonne contemporaneamente

MODALI vs DIRETTI: identificano i parametri modali o le matrici di m,c,k

REALI vs COMPLESSI: identificano forme modali reali o complesse

TEMPO vs FREQUENZA: identificano parametri modali dalle risposte all'impulso
o dalle risposte in frequenza ..schemino..

https://www.mpihome.com/en/service-support/modal-analysis-basics.html

http://macl.caeds.eng.uml.edu/umlspace/mspace.html

Sistemi MDOF - modale

Come utilizzare i risultati dell'analisi modale?

Calcolo della risposta forzata del sistema…

$$\left[H(\omega)\right]=\frac{X(\omega)}{F(\omega)} \qquad X(\omega)=\left[H(\omega)\right]F(\omega) \qquad x(t)=\left[h(t)\right]t(t)$$

con la trasformata inversa di Fourier…

$$\begin{Bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \\ X_3(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & .. & H_{14}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & .. & .. \\ H_{31}(\omega) & .. & .. & H_{34}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \\ F_3(\omega) \\ F_4(\omega) \end{Bmatrix}$$

Sistemi MDOF - modale

Come utilizzare i risultati dell'analisi modale?

Analisi di sensitività autovalori ed autovettori alla variazione dei parametri del sistema… **da aggiungere..**

Calcolo delle risposte del sistema a seguito di modifiche strutturali…

da aggiungere..

Calcolo delle risposte di sistemi accoppiati…

Aggiornamento parametri modelli numerici…

…