

# meccanica delle vibrazioni

## laurea magistrale ingegneria meccanica

### parte 1 elementi base

## Elementi fondamentali

Massa : dove si immagazzina l'energia potenziale o l'inerzia

Smorzatore : dove si dissipa l'energia  
(normalmente trasformata da meccanica a termica)

Rigidezza : dove si immagazzina l'energia elastica

Forzanti : ciò che causa le vibrazioni  
(interne: condizioni iniziali/contorno, esterne, forze e momenti)

..IDEALI! una proprietà alla volta e solo quella!

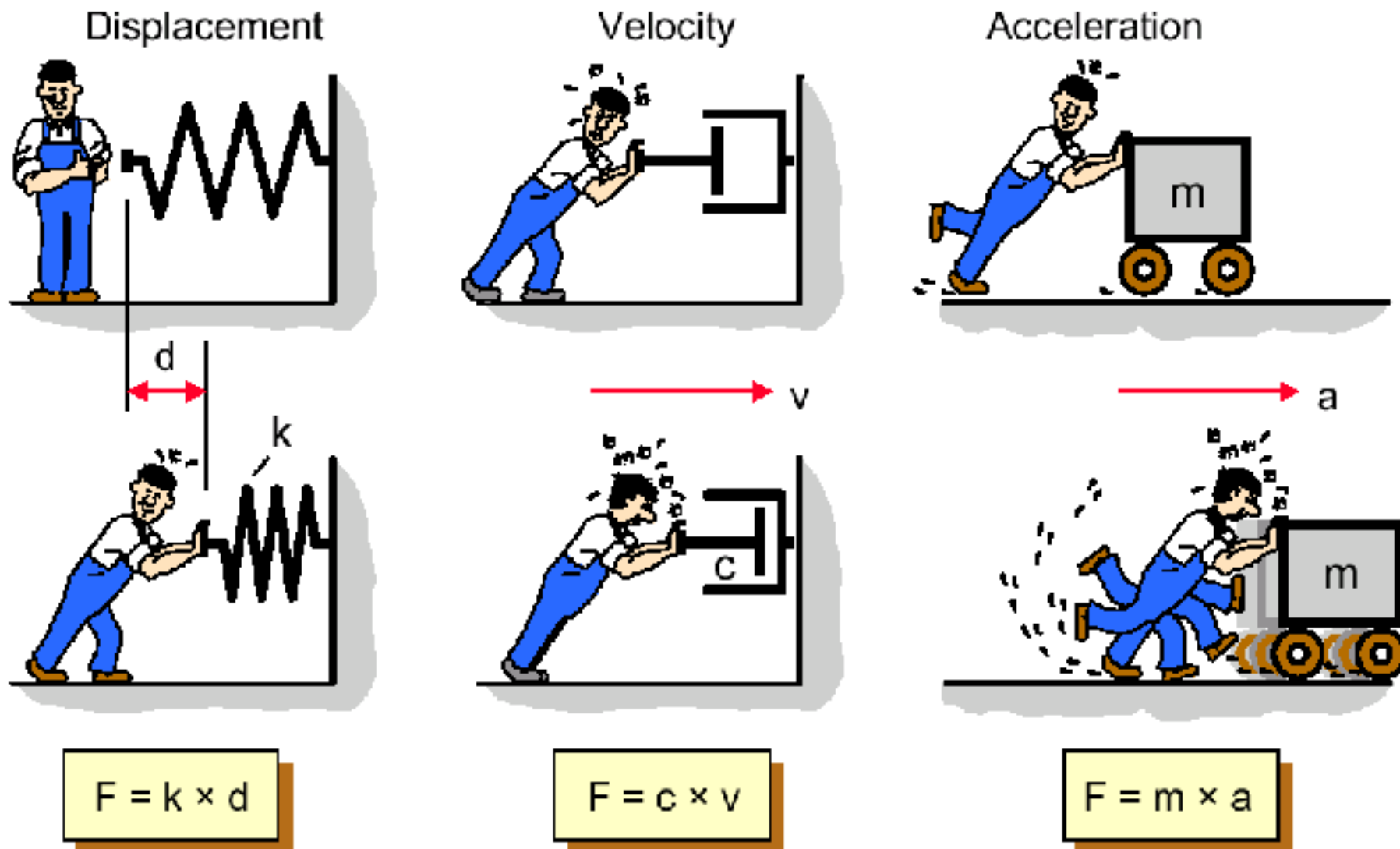


$$m=0$$

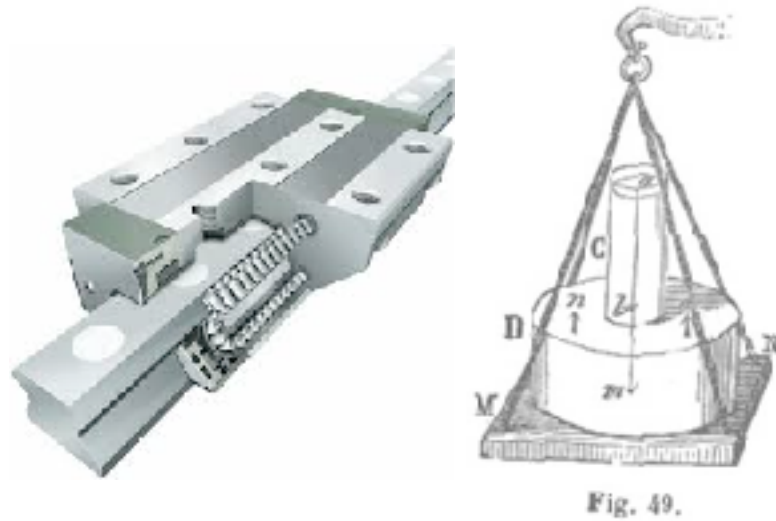
$$c=0$$

$$k=150\text{kN/m}$$

# Elementi fondamentali e grandezze



# Massa - Inerzia [kg], [kgm<sup>2</sup>]



Ricordarsi tutti  
i GDL (DOF)!

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad 1 \text{ DOF}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad 3 \text{ DOF}$$

..abituatevi a considerare analizzare risolvere  
sistemi con TRASLAZIONI e ROTAZIONI!

# Smorzatore - meccanismi dissipativi [Ns/m], [Ns/rad]

Diversi modelli matematici che rappresentano vari meccanismi dissipativi.. derivano equazioni del moto più o meno complesse!

Viscoso  $f_d = c\dot{x}$

es. ammortizzatori veicolo (olio/gas)

opposizione fase con vel

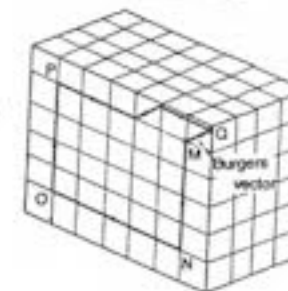
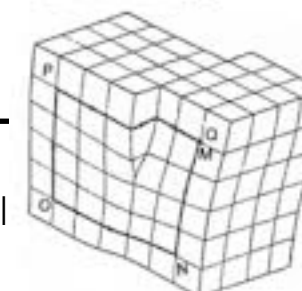
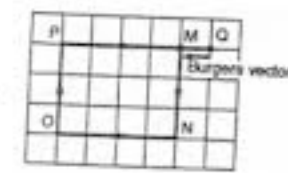
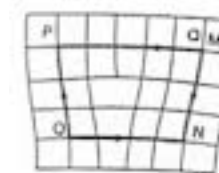
Coulumbiano  $f_d = -\mu mg \text{sign}(\dot{x})$

es. smorzatori attrito edilizia / lavatrici

fase con vel/prop spost

Strutturale/isteretico  $f_d = jhx$

es. cricche, dislocazioni, giochi



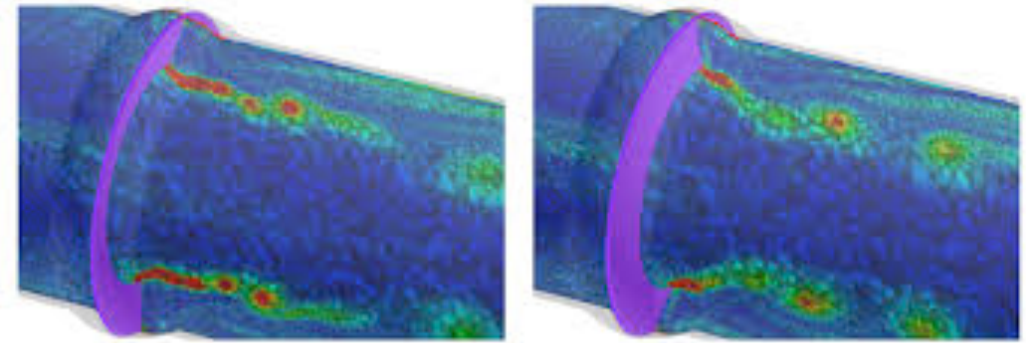


# Smorzamento

## Fluidodinamico

$$f_d = d\dot{x}^2$$

es. moto nei fluidi



## Frazionale

$$f_d = jA \frac{\partial^r x}{\partial t^r}$$

es. gomme / elastomeri  
feltri



## Magnetoreologico / combinati

es. ammortizzatori

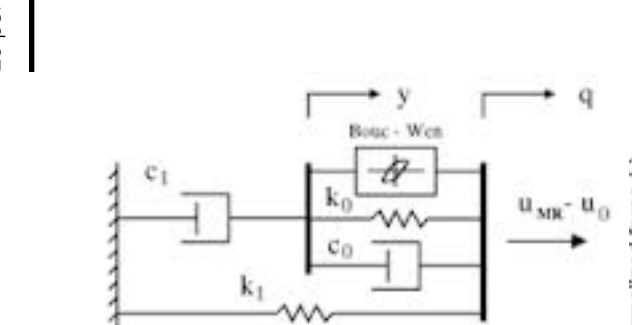
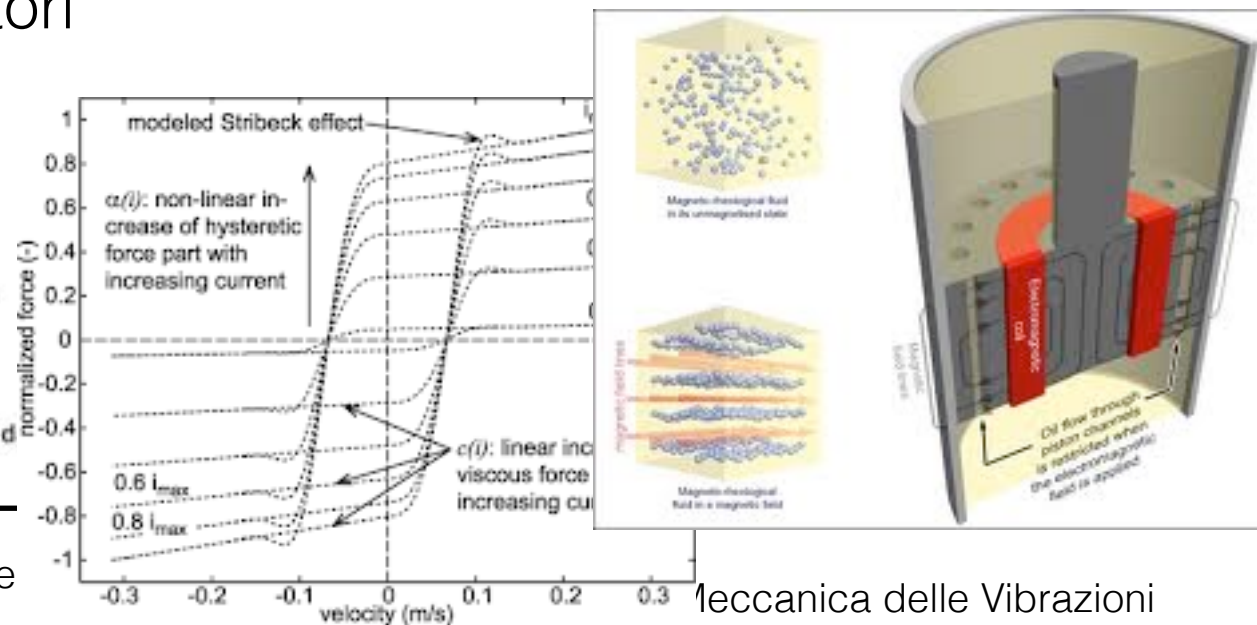


Figure 4. The modified Bouc-Wen model of the MR damper

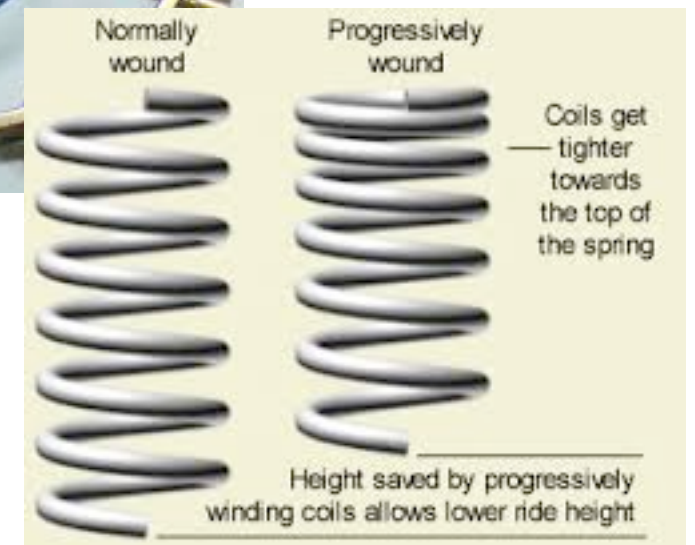
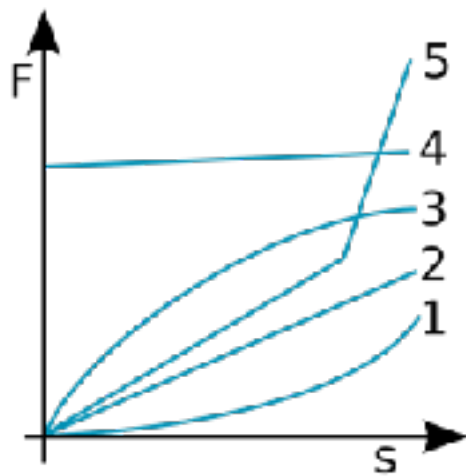


# Rigidezza - meccanismi elastici [N/m], [N/rad]

Lineari  $f_s = kx$   $f_s = k\theta$   
(caratteristica)



Non Lineari, Bilineari,  
Progressive (Hardening, Softening),...





# Rigidezza

## Equivalenza sistemi di molle!

Molle in serie

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_r}$$

..da sapere come si arriva qui!

Molle in parallelo

$$k_e = k_1 + k_2 + \dots + k_r$$

..abituatevi a considerare analizzare risolvere sistemi con TRASLAZIONI e ROTAZIONI!

Problem 6: (10 Points):

Find the equivalent spring constant of the system shown in Figure 2 in the direction of  $\theta$ .

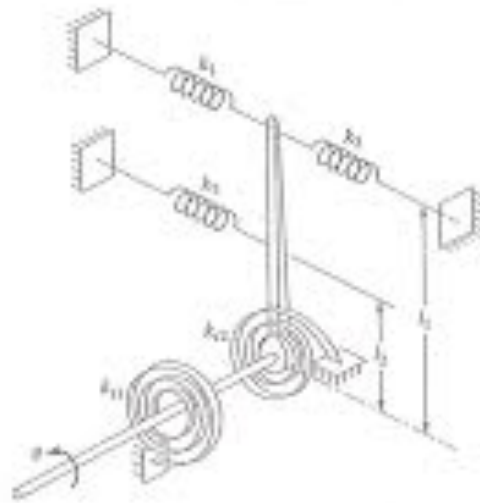


Figure 2 System involving two torsional springs and three linear springs

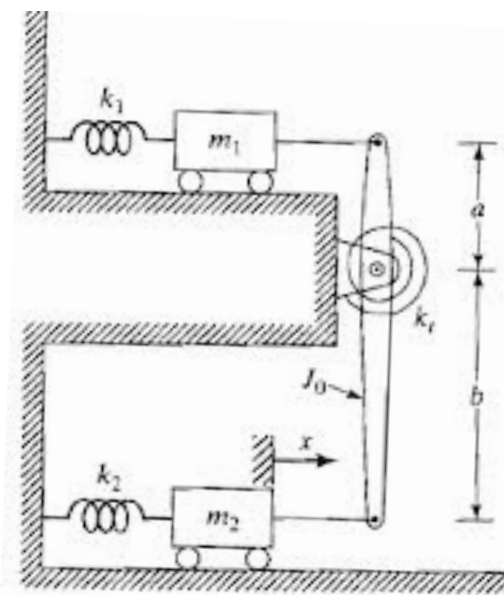
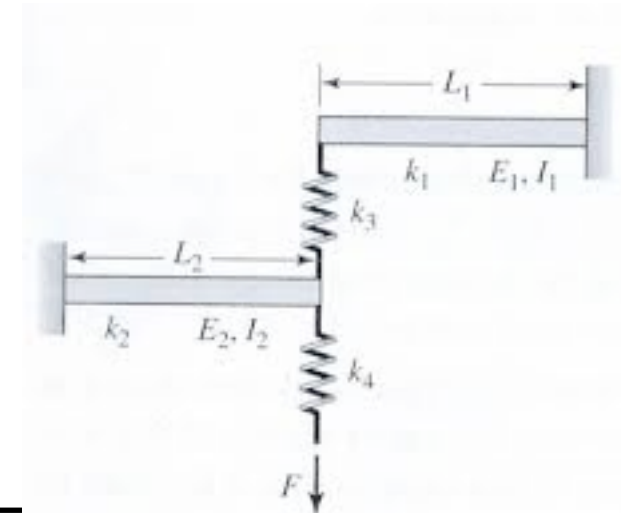


FIGURE 1.76 Rocker arm assembly.



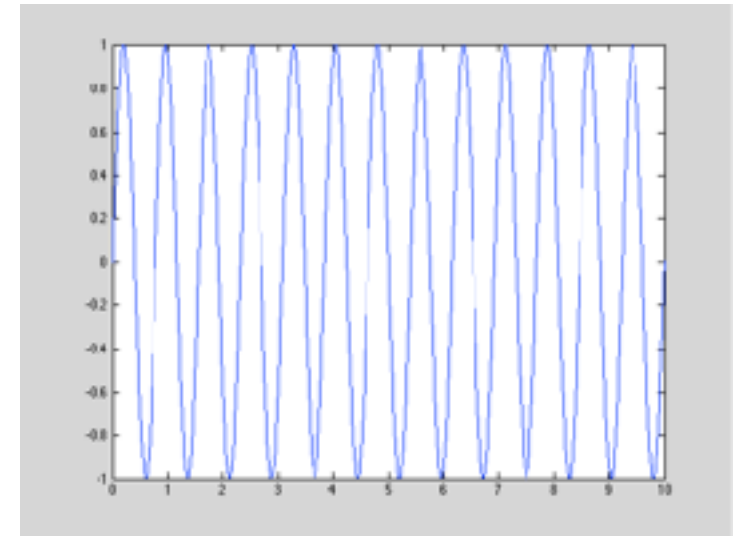


# Forzanti

## Armoniche semplici

es. squilibrio residuo

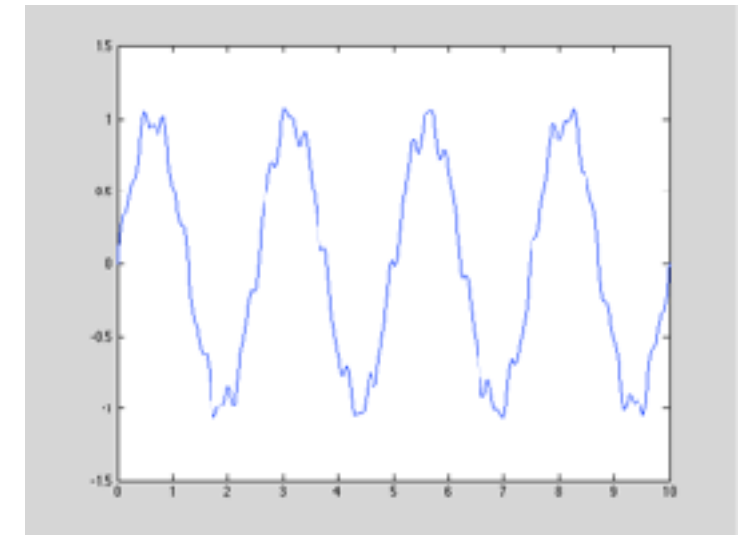
$$a = \sin(2\pi \cdot 1.3 \cdot t);$$



## Armoniche complesse

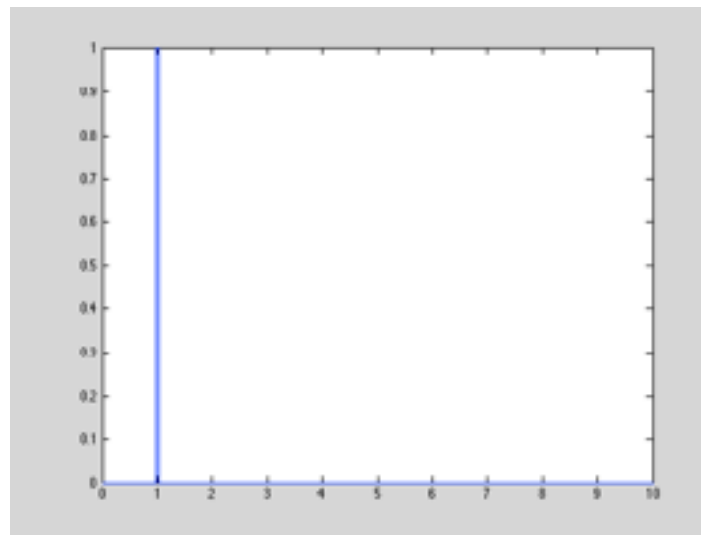
es. combustione

$$a = \sin(2\pi \cdot 0.4 \cdot t) + 0.09 \cdot \sin(2\pi \cdot 2.7 \cdot t) + 0.05 \cdot \sin(2\pi \cdot 5.1 \cdot t);$$

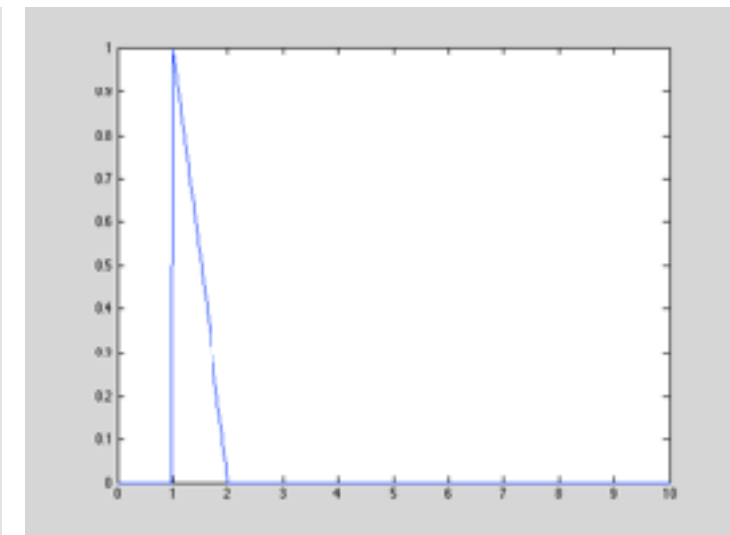


## Impulsive

es. impatto, esplosione



$$a = [\text{zeros}(1,100) \text{ ones}(1,3) \text{ zeros}(1,898)];$$

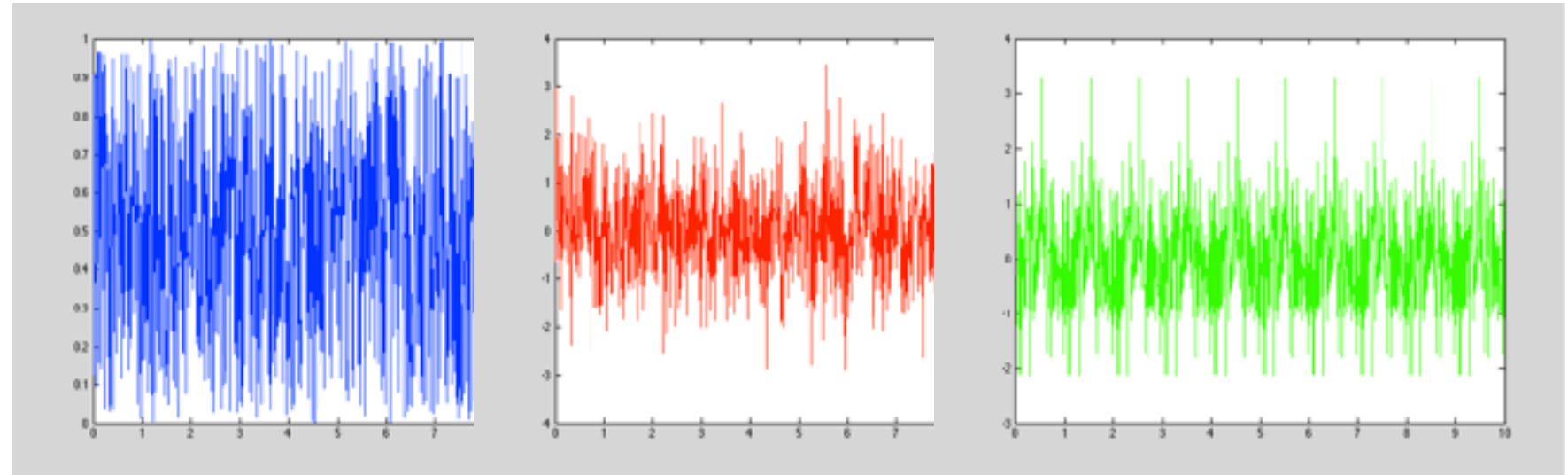


$$a = [\text{zeros}(1,100) 1-t(1:100) \text{ zeros}(1,801)];$$

# Forzanti

## Random

es. rugosità asfalto



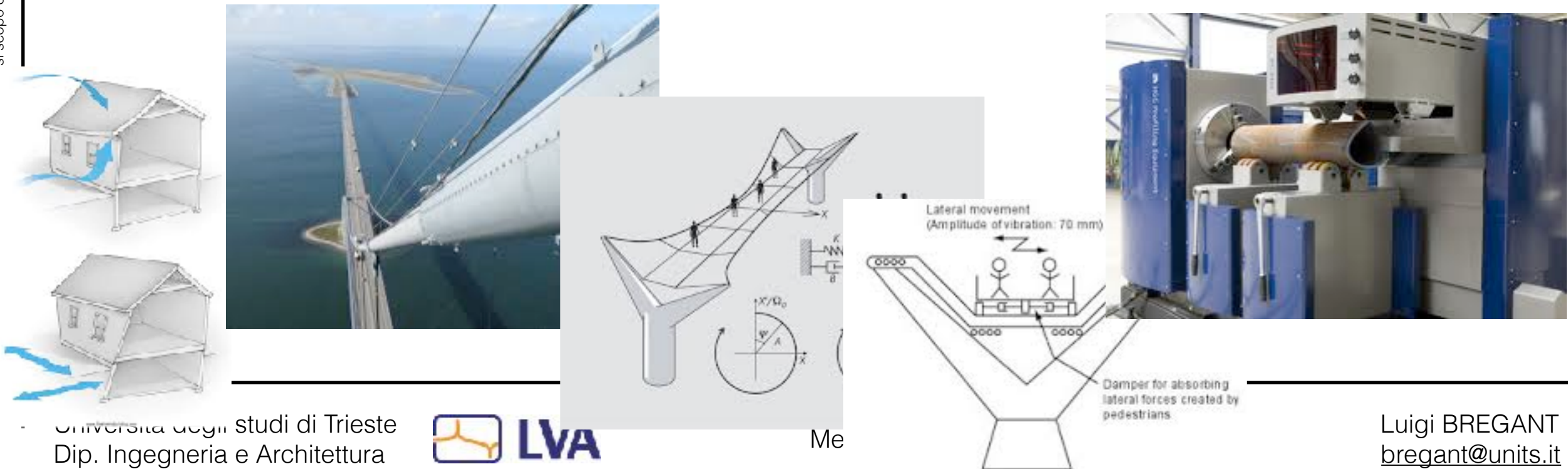
```
a=rand(1,size(t,2));
```

```
a=randn(1,size(t,2));
```

```
a=randn(1,100);  
a=[a a a a a a a a a];
```

# Operazionali

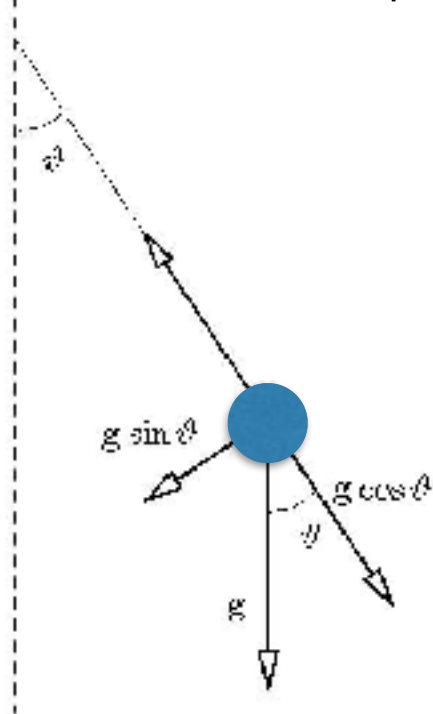
es. vento, funzionamento impianto, traffico veicolare, pedoni,...



# Linearizzazione

I sistemi reali NON sono lineari!, prima o poi il legame tra le grandezze non è proporzionale!  
 ..si linearizza per semplificare le equazioni del moto!

Vibrazioni del pendolo



$$\begin{cases} ma_c = T - mg \cos \theta \\ ma_t = -mg \sin \theta \end{cases} \quad \text{Moto Circolare:} \quad \begin{cases} a_c = L\dot{\theta}^2 \\ a_t = L\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} mL\dot{\theta}^2 = T - mg \cos \theta \\ mL\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \end{cases} \quad \text{divido per } m, \text{ e riordino}$$

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{g}{L} \right) \sin \theta = 0 \quad \text{equazione esatta}$$

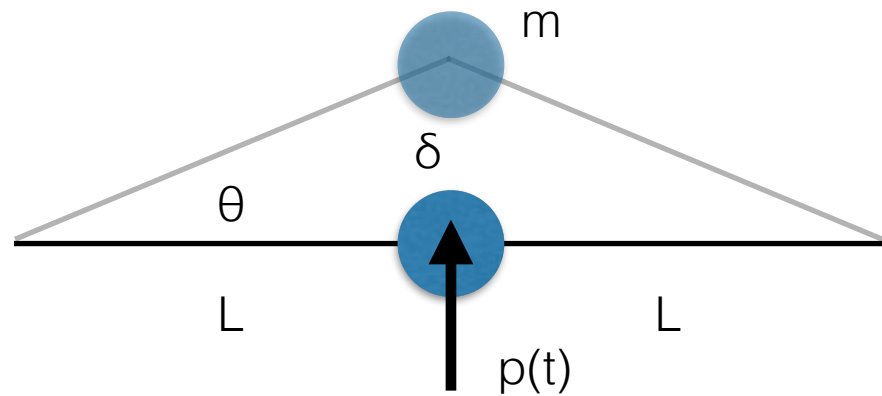
per piccoli spostamenti  $\sin \theta \approx \theta$

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{g}{L} \right) \theta = 0 \quad \text{equazione approssimata}$$



# Linearizzazione

## Vibrazioni fune tesa



Consideriamo la tensione di una fune di sezione  $A$ , lunghezza  $L$ , modulo di Young  $E$ , soggetta ad un allungamento  $\delta$

$$T = T_0 + \left( \frac{AE}{L} \right) \delta$$

$$\delta = \left( L^2 + u^2 \right)^{1/2} - L$$

$$m\ddot{u} + 2T \sin \theta = p$$

Eq. di equilibrio massa  $m$ ,

$$\sin \theta = \frac{u}{\left( L^2 + u^2 \right)^{1/2}}$$

sostituendo:

$$m\ddot{u} + 2 \left[ T_0 + \left( \frac{AE}{L} \right) \left[ \left( L^2 + u^2 \right)^{1/2} - L \right] \right] \left[ \frac{u}{\left( L^2 + u^2 \right)^{1/2}} \right] = p \quad \text{equazione esatta}$$

# Linearizzazione

## Vibrazioni fune tesa

..se considero l'ipotesi di piccoli spostamenti...  $u \ll L$  e riordino l'equazione..

$$\ddot{u} + \left( \frac{2T_0}{mL} \right) u = \left( \frac{1}{m} \right) p \quad \text{equazione approssimata lineare}$$

..se approssimo l'allungamento con un'espansione (spostamenti un po' più grandi) e riordino l'equazione..

$$\delta = L \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{u}{L} \right)^2 \right] - L = \left( \frac{1}{2L} \right) u^2$$

$$\ddot{u} + \left( \frac{2T_0}{mL} \right) u + \left( \frac{AE}{mL^3} \right) u^3 = \left( \frac{1}{m} \right) p \quad \text{equazione approssimata cubica}$$

+ $u^3$  ..hardening  
- $u^3$  .. softening

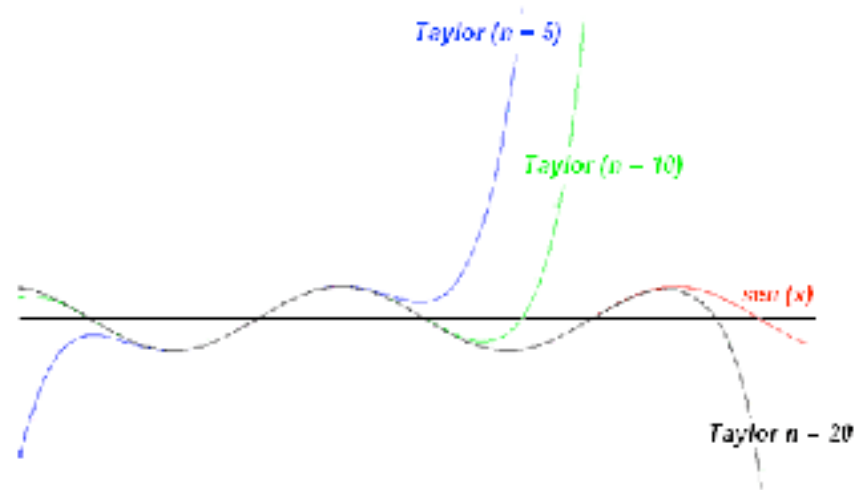
..more later on..  
Sistemi non lineari

# Linearizzazione

- ..piccoli spostamenti..
- ..espansioni in serie di Taylor / Maclaurin
- ..integrazione numerica

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

$$f^{(n)}(x_0) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$



..more later on..  
Integrazione numerica



# Linearizzazione

$$x(t) \rightarrow p(t)$$

$$y(t) \rightarrow q(t)$$

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \rightarrow \alpha p(t) + \beta q(t)$$

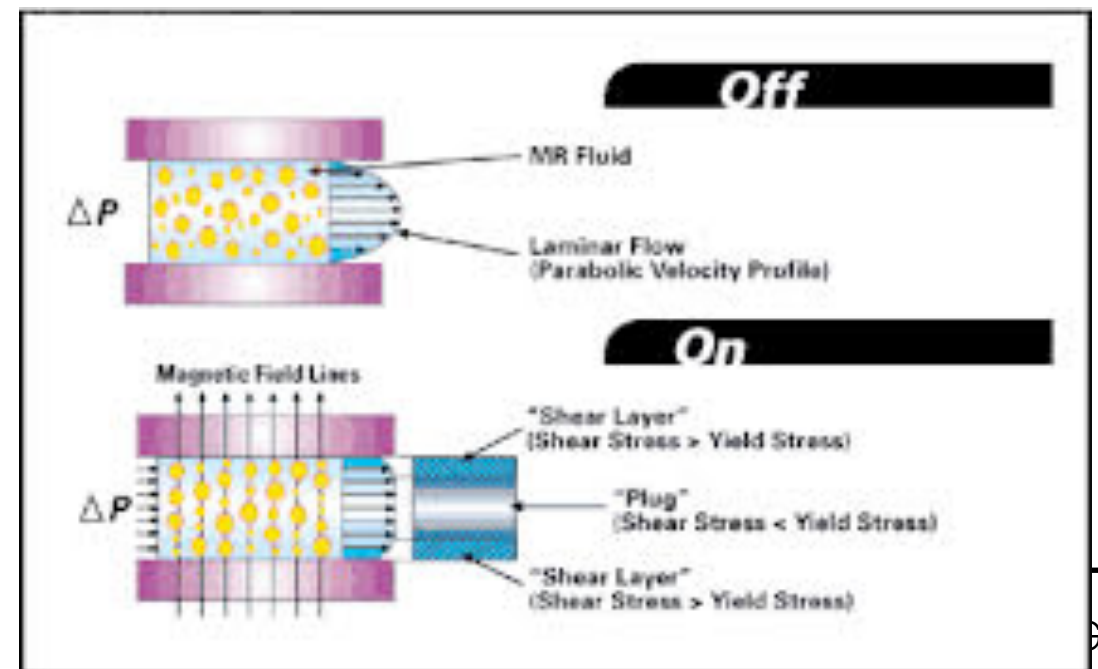
- ..vale il principio di sovrapposizione degli effetti
- ..vale il teorema di Maxwell/reciprocità

Nel Corso di MDV si considerano sistemi a parametri costanti nel tempo! sistemi LTI

Massa variabile

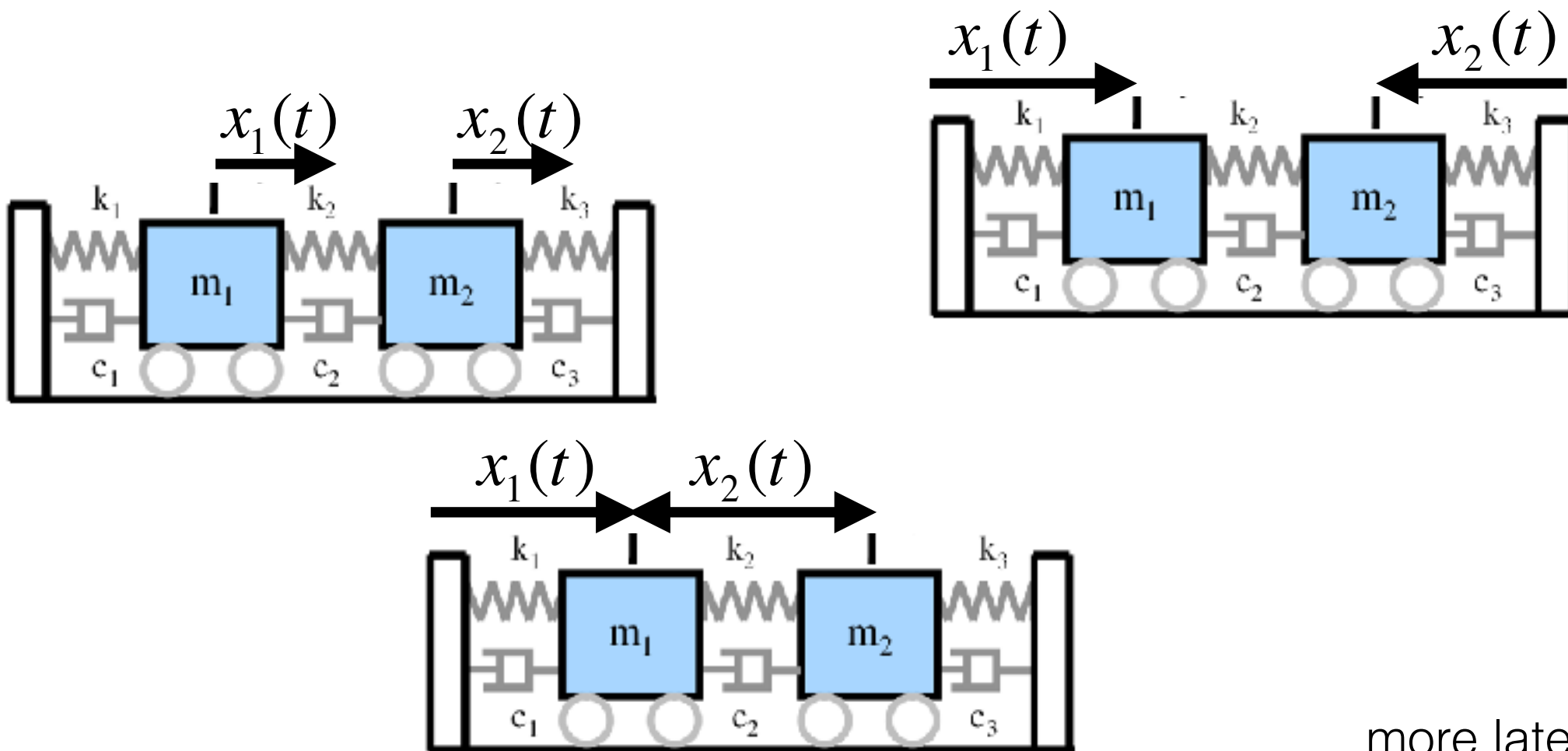


Materiali Magneto / Electro reologici



# Coordinate

Minimo numero di informazioni in grado di descrivere completamente lo stato del sistema.. (ed in maniera più semplice possibile!)



..more later on..  
Coordinate Accoppiate  
Coordinate Modali

# Coordinate

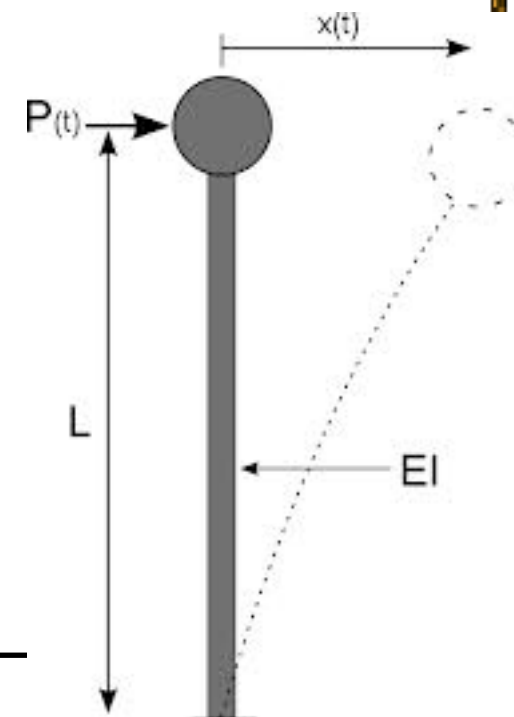
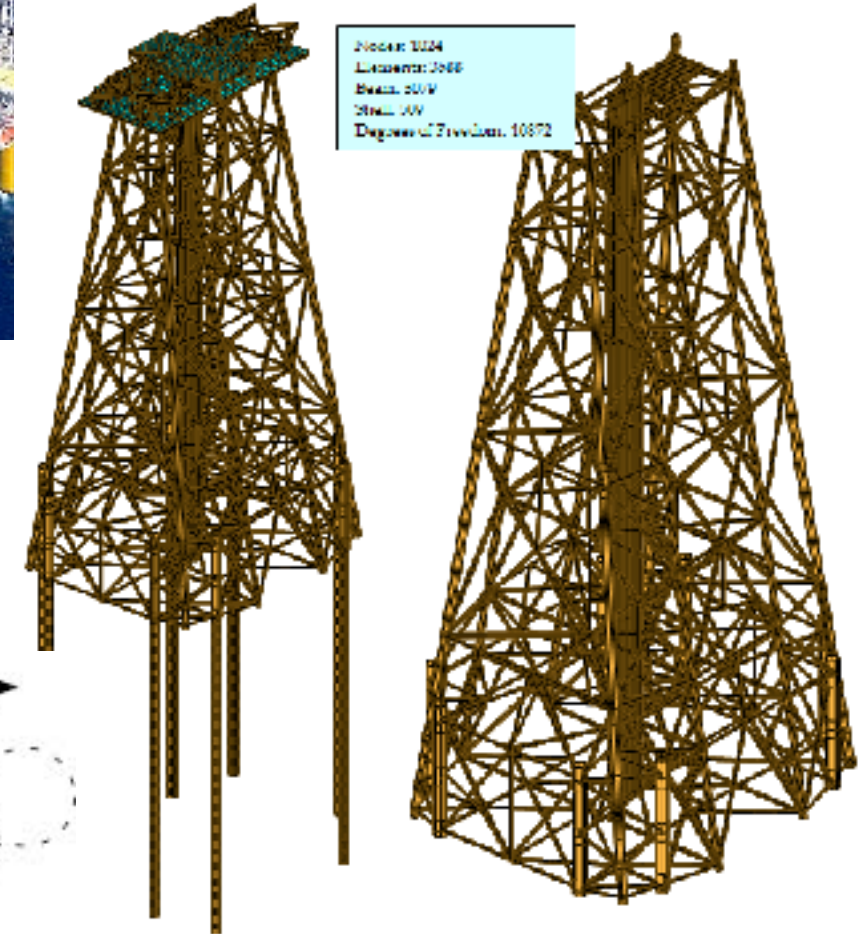
Sistemi Continui

..semplificare!

Sistemi MDOF

..MDV

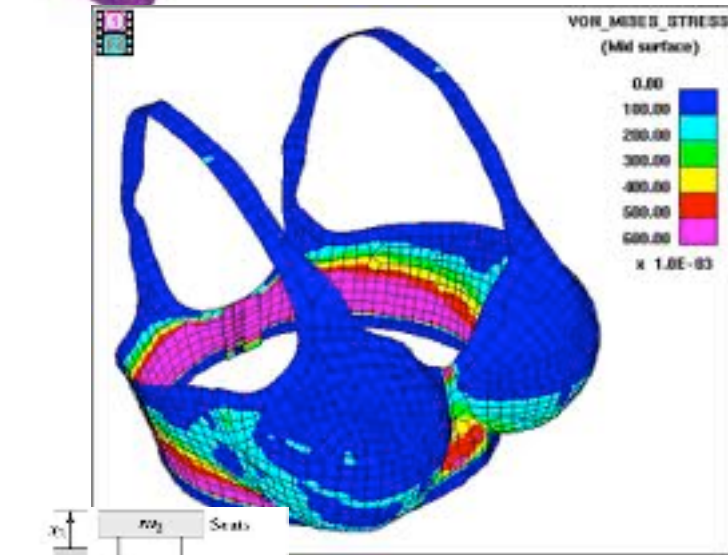
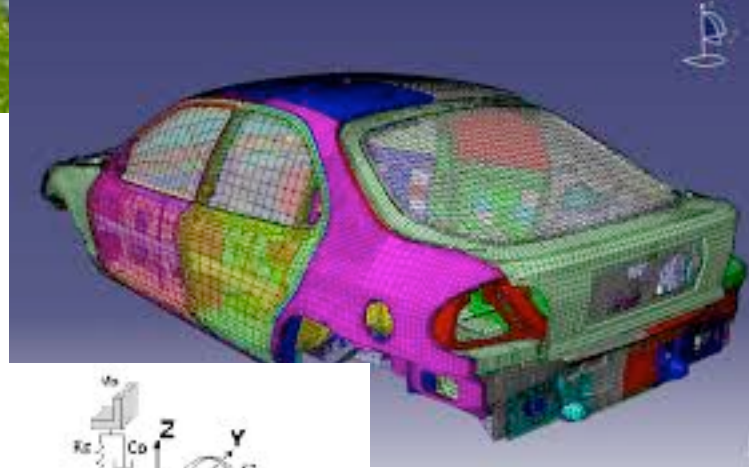
Sistemi SDOF



Meccanica delle Vibrazioni



# Coordinate

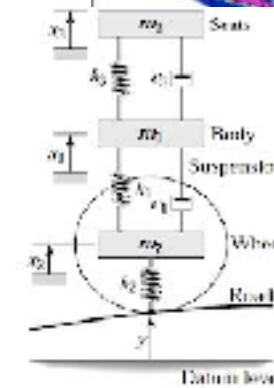
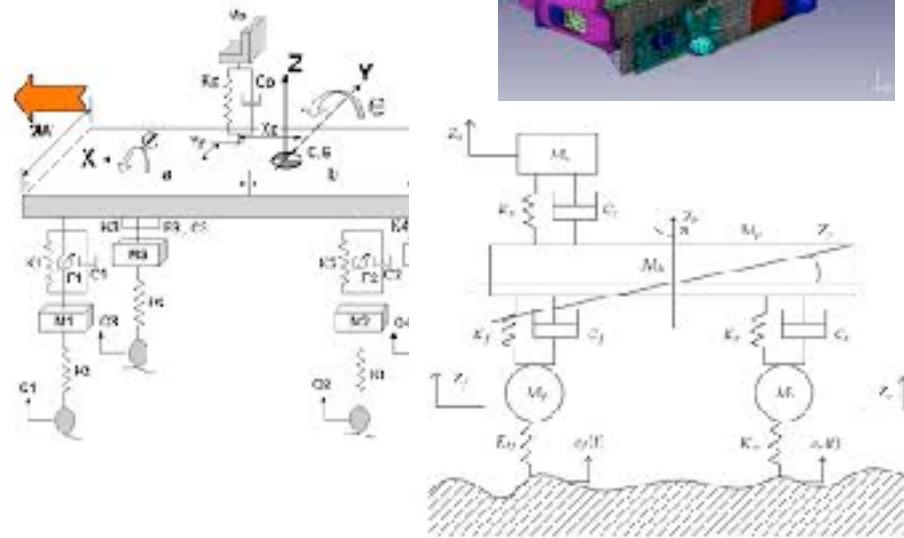


## Sistemi Continui

..semplificare!

## Sistemi MDOF

..semplificare!



## Sistemi SDOF

