

meccanica delle vibrazioni

laurea magistrale  
ingegneria meccanica

parte 7  
analisi del segnale  
addendum1 FFT

# Analisi del segnale - trasformata di Fourier

Supponiamo di avere un segnale del tempo campionato con una certa frequenza, che N campioni rappresentino un periodo del segnale, che N sia una potenza di 2 ( $N=2^p$ ):

La trasformata di Fourier è esprimibile con la seguente sommatoria:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

..introduciamo  $W_N$  (twiddle factor):

$$W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

rappresenta un vettore (versore) rotante che ruota di una quantità definita dal numero N

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

..la DFT può essere espressa in forma matriciale:  $\{X(k)\} = [W_N^{kn}] \{x(n)\}$

Ci sono  $N*N$  prodotti complessi, es con 1024 campioni ..1048576 operazioni

# Analisi del segnale - trasformata di Fourier

$$\begin{Bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \dots \\ X(N-1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^{00} & W_N^{01} & \dots & W_N^{0(N-1)} \\ W_N^{10} & W_N^{11} & & W_N^{1(N-1)} \\ \dots & \dots & & \dots \\ W_N^{(N-1)0} & \dots & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \dots \\ x(N-1) \end{Bmatrix}$$

Ci sono  $N \cdot N$  prodotti complessi, es con  $10^6$  campioni ..  $10^{12}$  operazioni

$$\begin{Bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & 1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{Bmatrix}$$

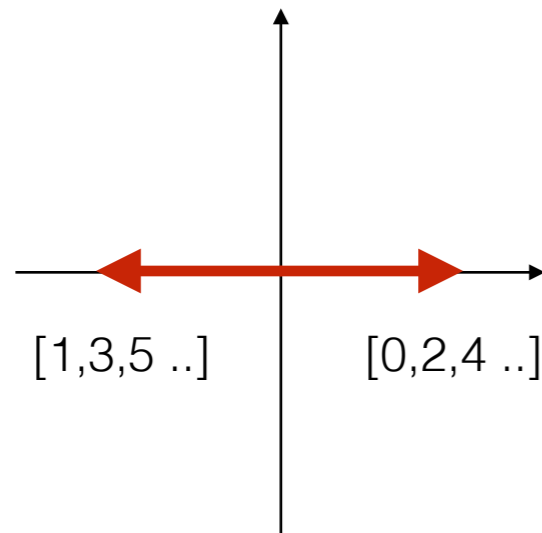
Computazionalmente è molto oneroso...ma si possono sfruttare delle proprietà dei twiddle factors (simmetria e periodicità) per ridurre il numero di operazioni a  $N \cdot \log_2 N$  es con  $10^6$  campioni ..  $2 \cdot 10^7$  operazioni (1s vs 14.4h)

# Analisi del segnale - twiddle factor

..osserviamo con attenzione  $W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$

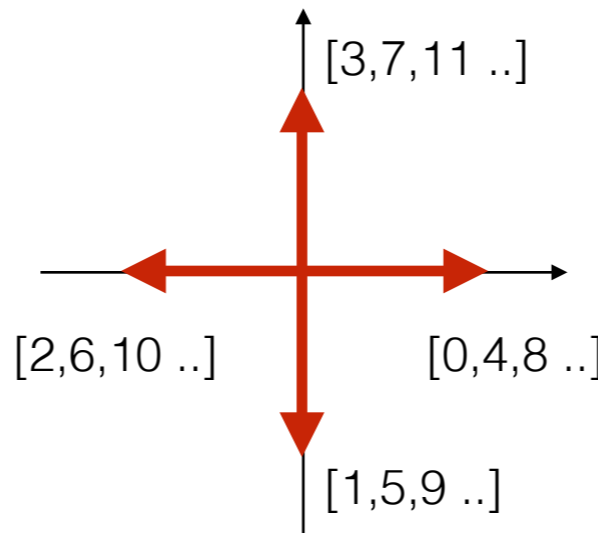
N=2

$$W_2^n = e^{-j\frac{2\pi}{2}n} = e^{-j\pi n}$$



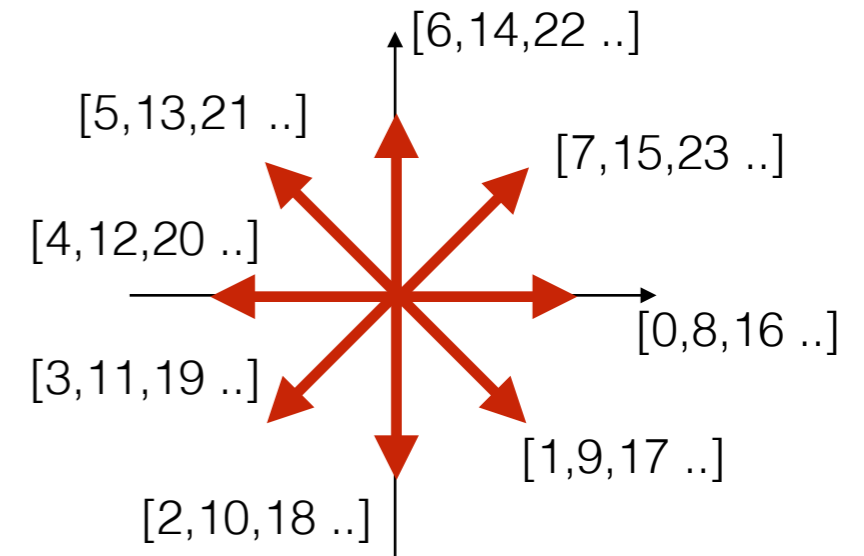
N=4

$$W_4^n = e^{-j\frac{2\pi}{4}n} = e^{-j\frac{\pi}{2}n}$$



N=8

$$W_8^n = e^{-j\frac{2\pi}{8}n} = e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$



..i fattori si ripetono in ampiezza ed orientazione..

..sono in fase o opposizione in fase, in funzione di N o di N/2

# Analisi del segnale - trasformata di Fourier

Supponiamo di dividere la trasformata di N elementi,  
in due trasformate di N/2 elementi (lemma di Danielson Lanczos)  
(termini pari da una parte, termini dispari dall'altra)

$$X(k) = \sum_{\text{pari}} x(n)W_N^{nk} + \sum_{\text{dispari}} x(n)W_N^{nk} \quad \begin{array}{ll} n = 2r & n = 2r + 1 \\ \text{pari} & \text{dispari} \end{array}$$

$$X(k) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r)W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k}$$

per le proprietà di  $W_N$

$$X(k) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r)W_N^{2rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r+1)W_N^{(2r)k}$$

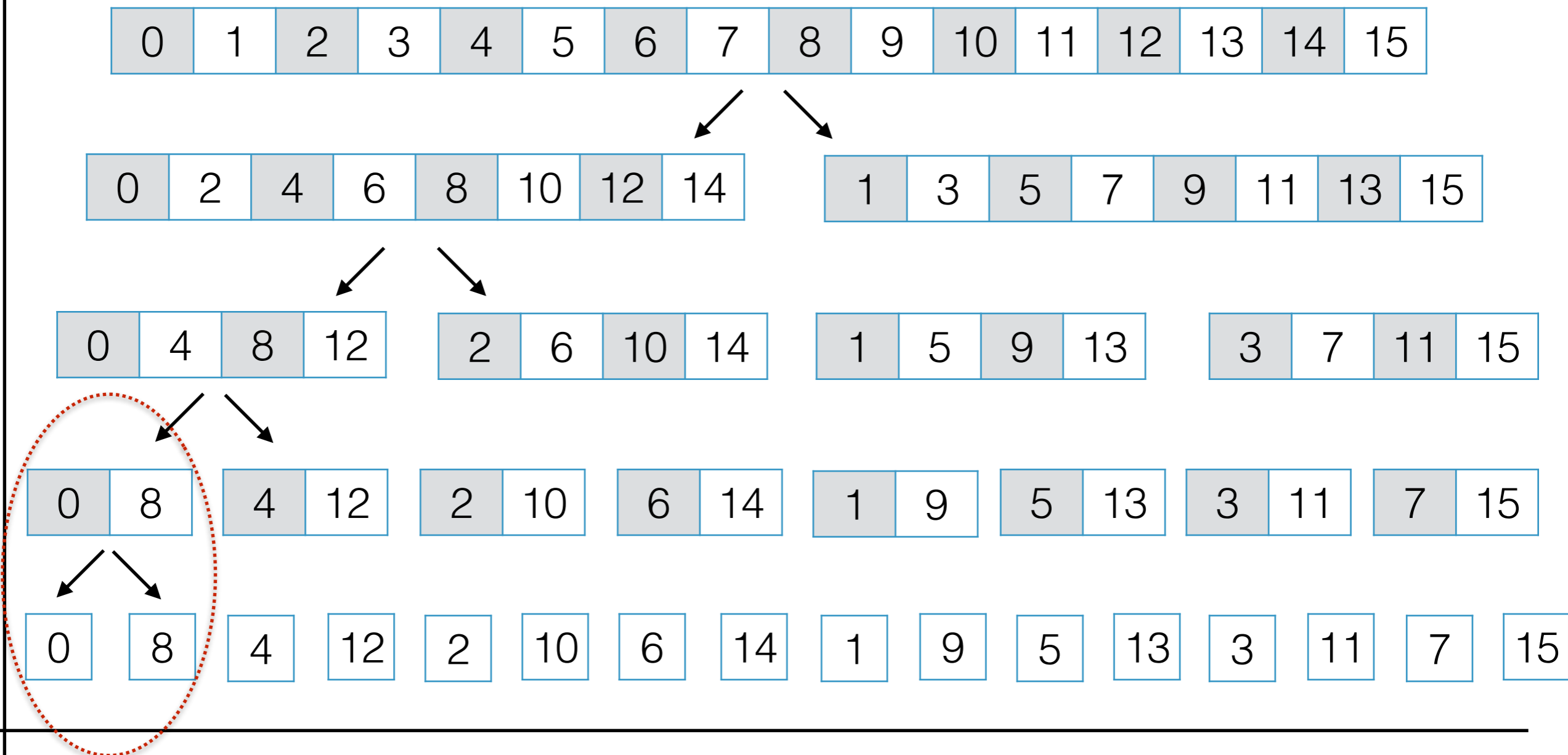
$$W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N}2} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$$

$$X(k) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r)W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r+1)W_{N/2}^{rk} = G(k) + W_N^k H(k)$$

campioni pari    campioni dispari

# Analisi del segnale - trasformata di Fourier

..supponiamo ora di dividere le 2 trasformate di  $N/2$  elementi, ciascuna, in due trasformate di  $N/4$  elementi.. e così via fino ad arrivare ad una trasformata ad 1 solo punto..



# Analisi del segnale - trasformata di Fourier

..all'ultimo livello potremmo scrivere qualcosa del genere

$$X(k) = x(0) + W_2^k x(1)$$

campioni pari    campioni dispari

N=2

$$X(0) = x(0) + W_2^0 x(1)$$

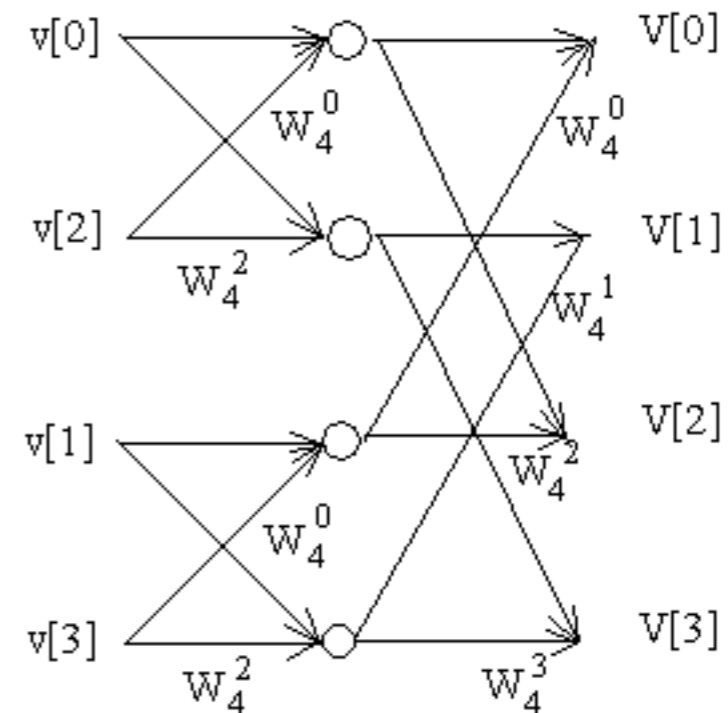
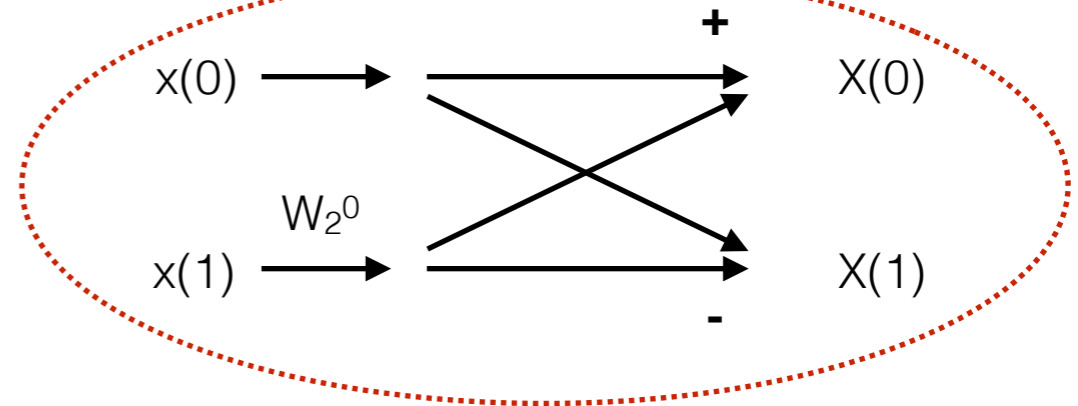
$$X(1) = x(0) - W_2^0 x(1)$$

..a rigore dovrebbe essere  $W_2^1$ ,  
ma per le proprietà dei twiddle factors..

N=4

$$X(k) = x(0) + W_2^k x(2) + W_4^k x(1) + W_4^k W_2^k x(3)$$

..butterfly diagram..

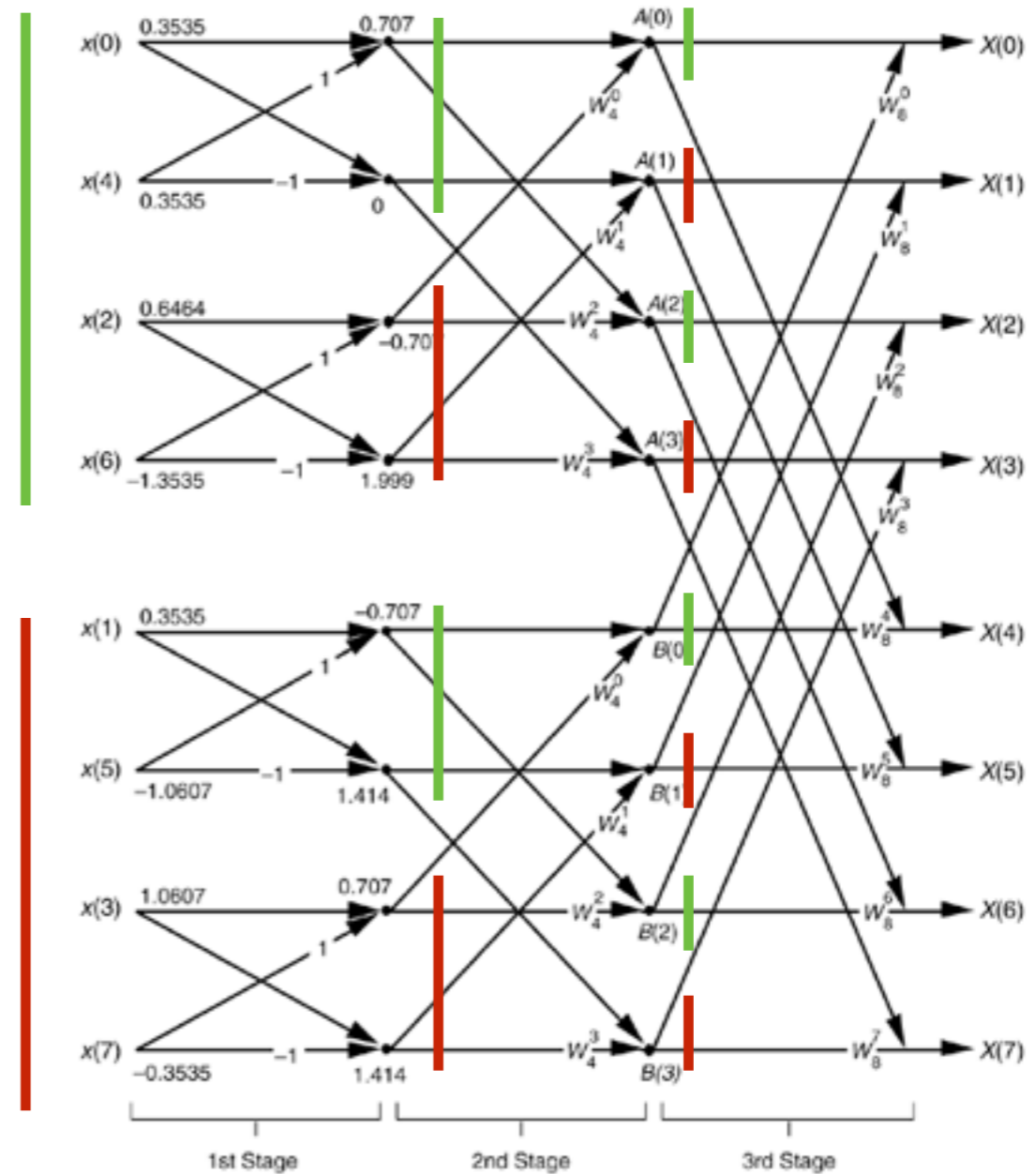


# Analisi del segnale - trasformata di Fourier

$$N=8 \quad X(k) = x(0) + W_2^k x(4) + W_4^k x(2) + W_4^k W_2^k x(6) + W_8^k x(1) + W_8^k W_2^k x(5) + W_8^k W_4^k x(3) + W_8^k W_4^k W_2^k x(7)$$

..e cosi via... all'aumentare del numero di componenti..

..ordine nel dominio della frequenza...corretto del tempo.. bit reversed!





# Analisi del segnale - trasformata di Fourier

..l'ordine dei nel dominio della frequenza è corretto, mentre risulta riorganizzato quello nel dominio del tempo ..  
-bit reversed order-  
si devono riordinare i campioni prima di effettuare la trasformata..

..esistono diversi algoritmi per effettuare la FFT che sfruttano in maniera diversa quanto visto..

numero di campioni N potenza / non potenza di 2  
proprietà dei twiddle factros  
riordino nel t / nella f

	binario	binario reversed	
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

# Analisi del segnale - FFT in matlab

In Matlab il comando per calcolare l'FFT è

```
>>fft(x,n)
```

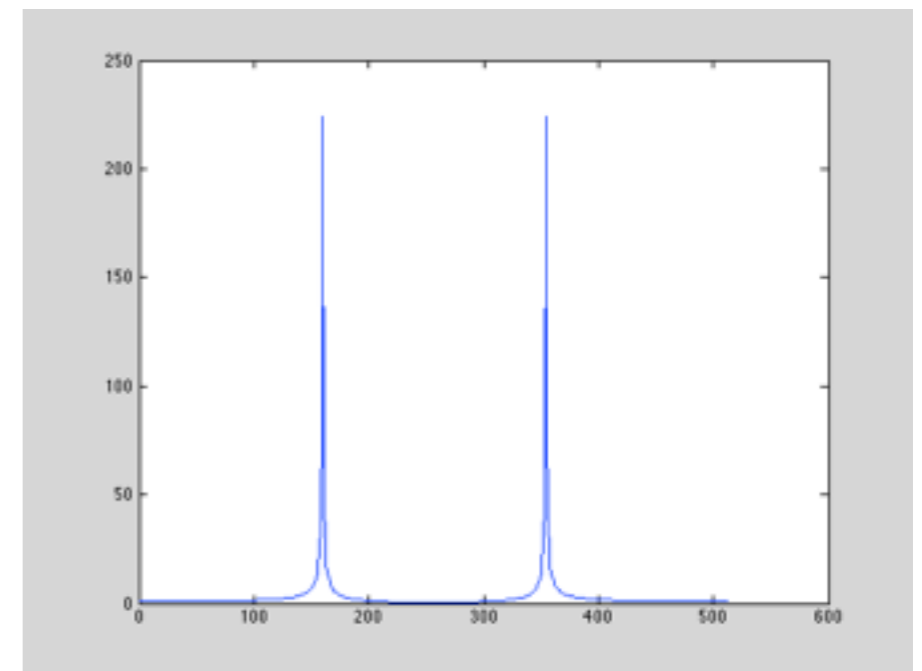
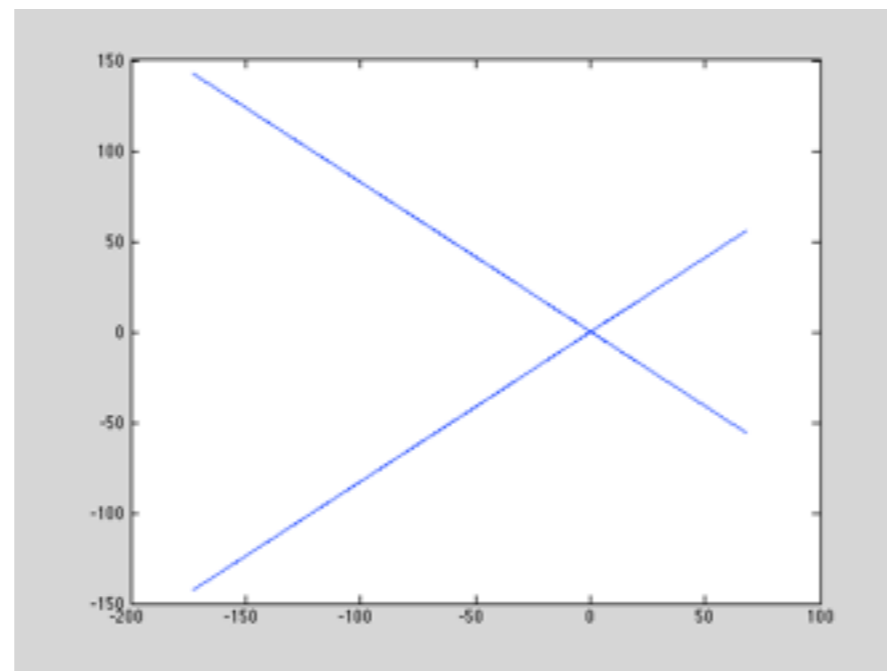
con x segnale da trasformare e n numero di campioni (possibilmente esponente di 2)

attenzione al risultato:

è una quantità complessa!

è un vettore che contiene il risultato tra 0 e  $fn/2$  e  $-fn/2$  e 0

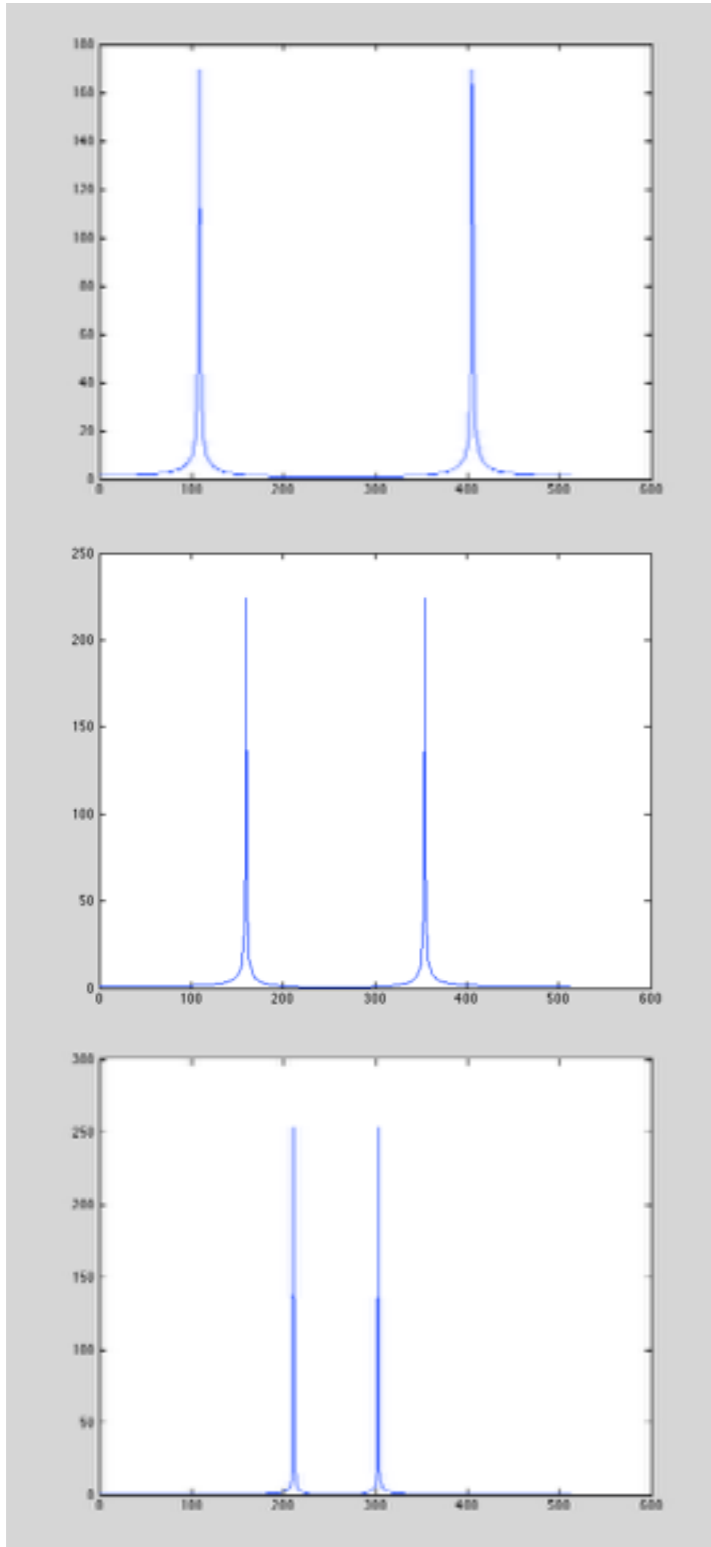
```
>>t=0:.01:10;  
>> a=sin(2*pi*t*31);  
>> plot(t(1:100),a(1:100))  
>> A=fft(a,512);  
>> plot(A)  
>>plot(abs(A))
```



...meglio visualizzare lo spettro ( $2*fft(x)$ ) tra 0 e  $fs/2$

# Analisi del segnale - FFT in matlab

E' vietato ogni utilizzo diverso da quello inerente la preparazione dell'esame del corso di Meccanica delle Vibrazioni @Units  
E' espressamente vietato l'utilizzo per qualsiasi scopo commerciale e/o di lucro



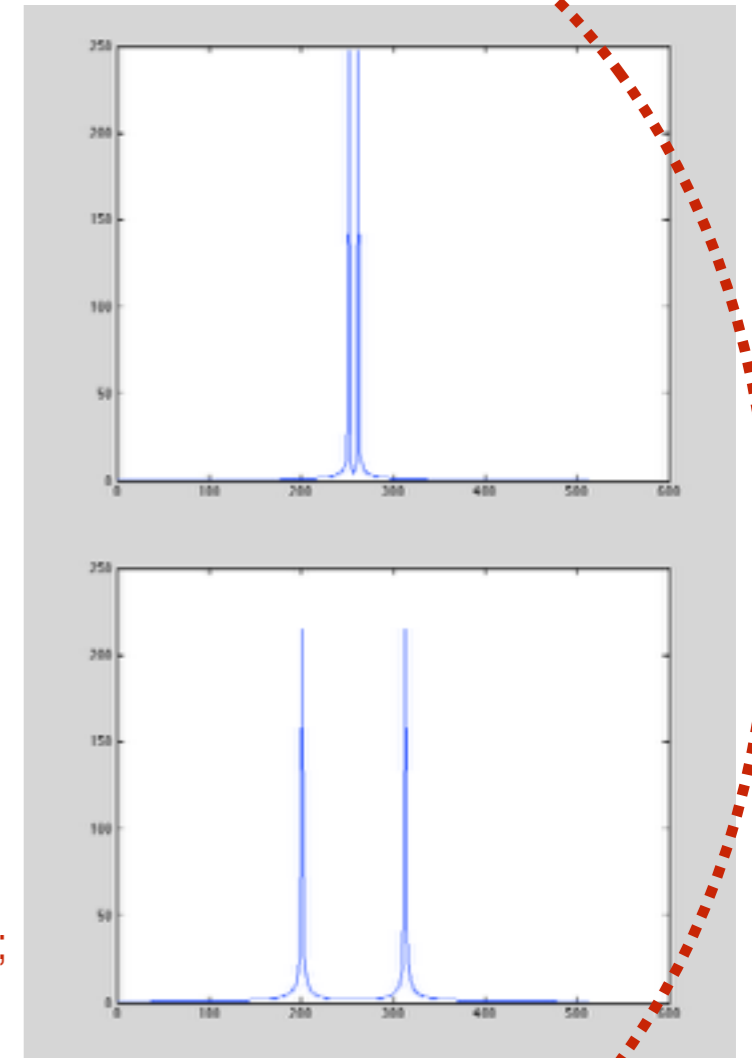
```
>>a=sin(2*pi*t*21);
```

```
>>a=sin(2*pi*t*31);
```

```
>>a=sin(2*pi*t*41);
```

```
>>a=sin(2*pi*t*51);
```

```
>>a=sin(2*pi*t*61);
```



ALIASING...  
indistinguibile da spettri corretti,

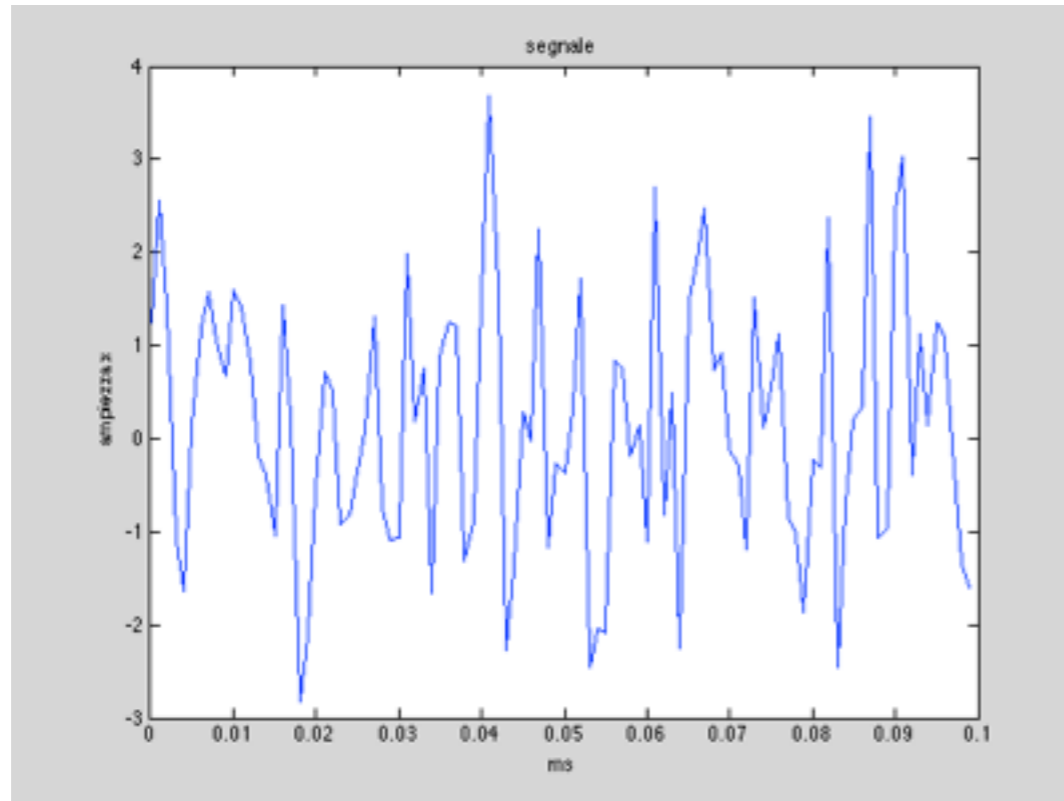
# Analisi del segnale - FFT in matlab

..fatto un po' meglio..

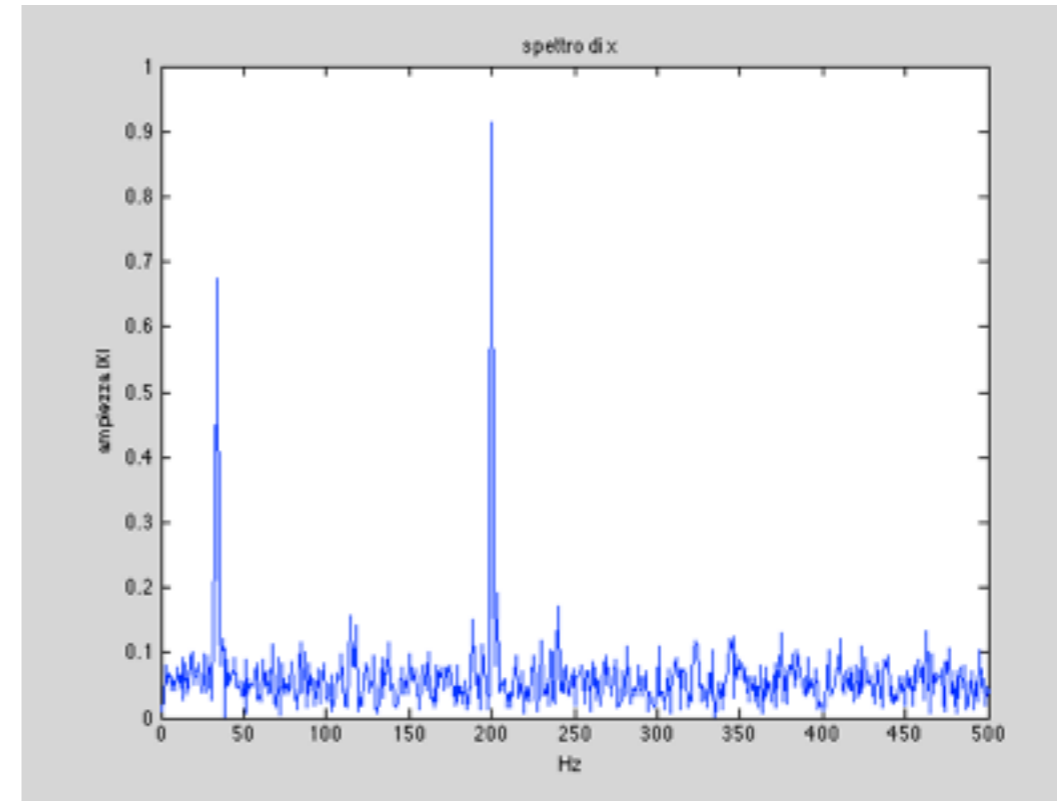
```
fs = 1000; % frequenza di campionamento
dt=1/fs; % intervallo di campionamento
N = 1024; % numero di campioni - potenza di 2
t = (0:N-1)*dt; % durata segnale
x = 0.7*sin(2*pi*34*t)+sin(2*pi*200*t)+randn(size(t));
plot(t(1:100),x(1:100)) %plotto segnale
xlabel('ms')
ylabel('ampiezza x')

nfft = N; % lunghezza della trasformata uguale al segnale
X = fft(x,nfft)/N;
f = fs/2*linspace(0,1,nfft/2+1); % definisco range di frequenza (su N/2 campioni)
figure
plot(f,2*abs(X(1:nfft/2+1))) % plotto solo metà campioni (da 0 a fs/2)
title('spettro di x')
xlabel('Hz')
ylabel('ampiezza |X|')
```

# Analisi del segnale - FFT in matlab



segnale del tempo



spettro in frequenza

