

4.3.6 Parità e nuclei

Si ricordino dapprima, senza dimostrazione, alcune proprietà della *parità*. Nel caso di un potenziale centrale, quindi descritto da una funzione pari, anche la relativa Hamiltoniana è pari e le funzioni d'onda degli stati associati hanno parità definita $P = (-1)^\ell$.

Più generalmente si trova che se l'Hamiltoniano di un sistema è pari allora la parità delle funzioni d'onda degli stati associati è definita.

In conseguenza di ciò si possono misurare contemporaneamente l'energia E di uno stato, in particolare di un livello nucleare, e la sua parità P , che può valere $+1$ o -1 , e tale parità si conserva nel tempo se tutte le interazioni sono pari, ovvero conservano esse stesse la parità.

Per uno stato puro, ovvero a parità definita, la densità di probabilità è sempre pari.

Un vettore è una quantità dispari, nel senso che cambia verso se si cambia il segno di tutte le sue componenti. Uno pseudovettore è una quantità con le stesse proprietà di rotazione di un vettore, ma che non cambia verso se si cambia il segno di tutte le sue componenti, come avviene ad esempio per il prodotto vettoriale, quindi è pari.

L'impulso e l'operatore quantistico associato sono quantità con caratteristiche vettoriali, quindi "dispari"

$$\vec{p}(-\vec{r}) = -\vec{p}(\vec{r}) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial(-\vec{r})} = -\frac{\partial}{\partial(\vec{r})} \quad (4.26)$$

L'energia cinetica, essendo proporzionale al quadrato dell'impulso, è pari e così anche per l'operatore quantistico ad essa associato.

Il momento angolare, essendo ottenuto tramite un prodotto vettoriale fra due vettori, è uno pseudovettore, ed è quindi pari, come l'operatore quantistico ad esso associato.

Il momento di dipolo elettrico invece, che è omogeneo a un vettore, è dispari: $\vec{D}(-\vec{r}) = -\vec{D}(\vec{r})$.

Il momento di dipolo magnetico, omogeneo a uno pseudovettore, è pari.

In base a quanto detto per l'impulso, l'energia cinetica e il momento angolare, si può affermare che se di uno stato di cui si conosca l'energia si misura il momento angolare, allora se ne può contemporaneamente misurare anche la parità, dato che i relativi operatori commutano. Ciò non si può invece fare con l'impulso, in quanto i relativi operatori non commutano.

Uno stato nucleare può quindi essere caratterizzato dalla contemporanea conoscenza di Energia, Momento angolare e Parità. Ci si riferisce alla contemporanea indicazione dei valori di momento angolare J e parità P con il simbolo J^P .

Dai risultati sperimentali si sa che le forze nucleari conservano la parità, per cui un livello nucleare ha parità ben definita e questo ha conseguenze importanti sui suoi possibili momenti angolari orbitali. Il suo momento angolare

J può infatti corrispondere a diversi valori del momento angolare orbitale L . Essendo questo associato a una parità positiva per L pari e negativa per L dispari, ne risulta che si possono avere eventuali mescolanze fra momenti angolari orbitali o solamente con L pari o solamente con L dispari.

Si consideri ad esempio il deutone 2H : esso è costituito da un protone e un neutrone legati, il suo stato fondamentale ha un'energia di legame di circa 2.225 MeV, un momento angolare totale pari a $J = 1$, con i due nucleoni in uno stato di tripletto con $S = 1$ e di conseguenza ha momento angolare orbitale $L = 0$ (onda S), come si deduce dalla misura del suo momento di dipolo magnetico, pari a $0.857 \mu_N$, che corrisponde circa alla somma di quelli del protone e del neutrone. Siccome però si trova sperimentalmente che il deutone ha anche un momento non nullo di quadrupolo elettrico, pari a $2.82 \times 10^{-31} \text{ m}^2/e$, ciò significa che il suo stato fondamentale non può essere considerato un puro stato in onda S , che sarebbe sfericamente simmetrico e quindi compatibile con un momento di quadrupolo elettrico nullo¹³, ma dovrà essere una mescolanza con altri momenti angolari orbitali. Per rispondere a quali possano essere questi ultimi che concorrono allo stato fondamentale del deutone si consideri che deve valere

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad , \quad \text{con} \quad \vec{S} = 1 \quad \text{e} \quad \vec{J} = 1 \quad (4.27)$$

e questo è possibile per $L = 0$, $L = 1$ (onda P) ed $L = 2$ (onda D). Ma l'onda P ha parità opposta a quella delle onde S e D , quindi se ne deduce, come verificato sperimentalmente, che la mescolanza può sussistere solo fra onda S e onda D ¹⁴.

4.3.7 Forze nucleari e dimensioni dei nuclei

Natura delle forze nucleari e dimensioni dei nuclei - 1

La forza nucleare ha un ridottissimo raggio d'azione; se infatti si considera l'atomo e il fatto che la sua struttura è spiegata ottimamente dalle sole interazioni elettromagnetiche, è chiaro che il raggio d'azione delle forze nucleari non deve estendersi molto oltre le dimensioni del nucleo stesso, altrimenti perturberebbe l'eccellente accordo fra dati sperimentali e previsioni teoriche per quanto concerne la fisica atomica.

Il fatto però che il nucleo abbia una distribuzione di carica elettrica estesa nello spazio, legata ai suoi protoni, suggerisce di studiare le eventuali perturbazioni alle energie dei livelli atomici, calcolate nell'ipotesi di un nucleo puntiforme, per dedurre informazioni sulle dimensioni e forma della distribuzione di carica protonica nel nucleo.

Se si immagina il nucleo come una struttura a simmetria sferica centrata in O , queste perturbazioni dipendono dal raggio " r " del nucleo, in quanto al

¹³Vedi paragrafo 4.3.9

¹⁴Sul deutone si vedano anche i paragrafi 22.1.1 e 22.1.2

suo interno il campo elettrico non è coulombiano e non dipende da $1/r^2$. La causa di questi effetti è essenzialmente quantistica: per il teorema di Gauss il campo elettrico nella regione "classicamente" fuori dal nucleo dovrebbe coincidere con quello generato da una carica puntiforme pari a Ze e posizionata in O , pertanto un'orbita elettronica classica di raggio maggiore di r non dovrebbe essere perturbata né in forma né in energia. Il livello energetico dell'orbitale atomico dipende in realtà dall'andamento del potenziale in tutto lo spazio, che determina anche la funzione d'onda. Si calcolino quindi gli spostamenti dei livelli indotti da una carica nucleare Ze supposta, per semplicità, uniformemente distribuita in una sfera di raggio R .

La carica contenuta in una sferetta di raggio $r < R$ è

$$q(r) = Ze \frac{r^3}{R^3} \quad , \quad \text{con} \quad q(R) = Ze \quad (4.28)$$

Di conseguenza il campo elettrico è

$$\begin{aligned} E_e(r) &= \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r^2} && \text{esternamente al nucleo } (r > R) \\ E_i(r) &= \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Ze r}{4\pi\epsilon_0 R^3} && \text{internamente al nucleo } (r \leq R) \end{aligned} \quad (4.29)$$

e l'energia potenziale elettrica $eV(r)$ è

$$\begin{aligned} eV(r) &= \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} && \text{esternamente al nucleo } (r > R) \\ eV(r) &= eV_0 + \frac{Ze^2 r^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} && \text{internamente al nucleo } (r \leq R) \end{aligned} \quad (4.30)$$

con V_0 determinato dalla condizione di continuità del potenziale in $r = R$:

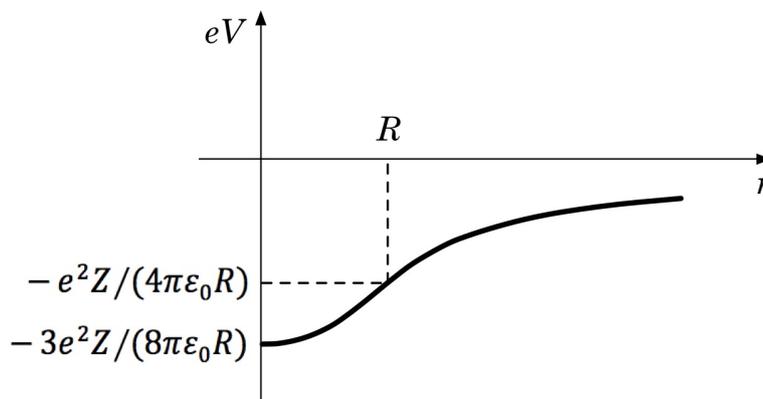


Figura 4.11:

$$eV(r) = eV_0 + \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 R} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (4.31)$$

da cui l'espressione del potenziale per $r < R$

$$eV(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) \quad (4.32)$$

Siccome si sa che le dimensioni lineari di un atomo sono circa $10^4 \div 10^5$ volte maggiori di quelle del suo nucleo, si può affermare che la funzione d'onda atomica si estende quasi del tutto all'esterno della zona occupata dal nucleo, e si può quindi calcolare l'effetto, supposto piccolo, della distribuzione non puntiforme della carica nucleare, con un approccio perturbativo.

Detta $\psi_{E_0}(\vec{x})$ la funzione d'onda dell'elettrone atomico corrispondente al livello imperturbato di energia E_0 , calcolato cioè per un atomo con nucleo puntiforme e posizionato in O , la perturbazione energetica è data da

$$\Delta E = \int \psi_{E_0}^*(\vec{x}) e\Delta V(r) \psi_{E_0}(\vec{x}) d_3x = \int \psi_{E_0}^2(\vec{x}) e\Delta V(r) d_3x \quad (4.33)$$

dove l'ultima uguaglianza è giustificata dall'essere reale la funzione d'onda per uno stato legato e $\Delta V(r)$ è la differenza fra il potenziale generato dalla distribuzione di carica e quello generato dalla carica puntiforme.

Supposto di considerare un atomo idrogenoide in uno stato S ($L = 0$), la funzione d'onda assume la forma

$$\psi_{E_0}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a} \right)^{3/2} e^{-\frac{Zr}{a}} \quad (4.34)$$

con $a = \hbar^2/(me^2)$ il raggio di Bohr, $E_0 = -Z^2e^2/(8\pi\epsilon_0 a)$, e

$$\Delta V(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 - \frac{r}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) \right]$$

Per la perturbazione energetica si ha quindi

$$\Delta E = 4\pi \int_0^R r^2 \psi_{E_0}^2(r) \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 - \frac{r}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) \right] d_3x \quad (4.35)$$

Essendo $R \ll a$ si può approssimare la funzione d'onda atomica dentro l'integrale col suo valore nell'origine O , sostituendo $\psi_{E_0}^2(r)$ con $\psi_{E_0}^2(0)$, per cui

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{Ze^2}{\epsilon_0} \frac{Z^3}{\pi a^3} \int_0^R r^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{r^2}{2R^3} \right) dr = \\ &= \frac{e^2 Z^4}{\pi \epsilon_0 a^3} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{10} \right) = \frac{1}{5} \frac{Z^2 e^2}{2\pi \epsilon_0 a} \left(\frac{ZR}{a} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Ricordando che $E_0 = -Z^2 e^2 / (8\pi\epsilon_0 a)$, si ottiene

$$\left| \frac{\Delta E}{E_0} \right| = \frac{4}{5} \left(\frac{ZR}{a} \right)^2 \quad (4.37)$$

Scegliendo un atomo idrogenoide molto pesante, con $Z = 82$ come il piombo, per cui $R \sim 8 \times 10^{-15}$ m ed $a \sim 0.53 \times 10^{-10}$ m, si ottiene

$$\left| \frac{\Delta E}{E_0} \right| \simeq 10^{-4}$$

ovvero un effetto molto piccolo anche per l'onda S , la cui funzione d'onda non si annulla in O , e del tutto trascurabile per le altre onde (P , D , ...), la cui funzione d'onda è nulla in O .

Questo suggerisce un modo per come attuare la misura sperimentale di questo effetto, che consiste nel rilevare per un atomo la frequenza $\nu = (E_P - E_0) / \hbar$ dei raggi X emessi in transizioni da onda P a onda S e confrontarla con quanto calcolato per il corrispondente atomo idrogenoide con nucleo supposto puntiforme.

Per rendere l'entità dell'effetto maggiore, e quindi permettere una misura più significativa, dalla 4.37 si vede che si può lavorare su tre termini, ma già scegliendo un atomo come il piombo si è fatto quanto possibile per accrescere i primi due Z ed R , e nonostante ciò si ottiene un risultato al limite della rilevabilità. Rimane il raggio a di Bohr dell'atomo che può essere opportunamente ridotto se per un tempo sufficientemente lungo si riesce a legare all'atomo una particella carica negativamente, più pesante dell'elettrone, che si vada a posizionare su orbite idrogenoidi. Il muone negativo μ^- è un candidato ideale allo scopo in quanto possiede le stesse caratteristiche dell'elettrone in termini di spin e carica elettrica, ha una massa m_μ circa 200 volte superiore a quella m_e dell'elettrone e dopo essere stato catturato dall'atomo e prima di decadere, vive abbastanza a lungo da poter dar luogo alle transizioni richieste. Quest'ultima condizione si può stimare semiclassicamente tenendo conto che fissato Z , il periodo medio di un'orbita idrogenoide del μ^- scala, rispetto a quella elettronica equivalente, come m_e/m_μ , in quanto così fanno anche le dimensioni lineari delle nuove orbite idrogenoidi. Queste risultano dunque circa 200 volte inferiori alle corrispondenti per gli elettroni e si può di conseguenza quasi del tutto trascurare anche l'effetto schermante della carica del nucleo da parte degli elettroni atomici presenti.

I risultati sperimentali, corrispondenti a salti del muone fra i livelli atomici, concernono l'emissione e la rivelazione di fotoni piuttosto energetici, dell'ordine di frazioni del MeV, quindi raggi γ . Il calcolo dell'effetto non può dunque più essere condotto con tecniche perturbative, data l'entità, in quanto le funzioni d'onda vengono modificate sostanzialmente e il calcolo preciso dell'energia dei livelli richiede di risolvere direttamente l'equazione di Schrödinger corrispondente nel potenziale modificato. Per una stima dell'entità si può comunque osservare che essendo $E_0^H \simeq 10$ eV l'energia tipica

d'un livello elettronico dell'idrogeno, l'energia dei corrispondenti livelli muonici E_μ^H , che scala in modo equivalente ai raggi orbitali, è proporzionale a $Z^2 E_0^H m_\mu/m_e$, che calcolata per $Z = 82$ risulta di ~ 10 MeV. Le variazioni energetiche associate ai γ rivelati costituiscono quindi frazioni importanti delle energie dei livelli stessi.

Lo studio delle differenze fra i valori dei livelli energetici reali, misurati

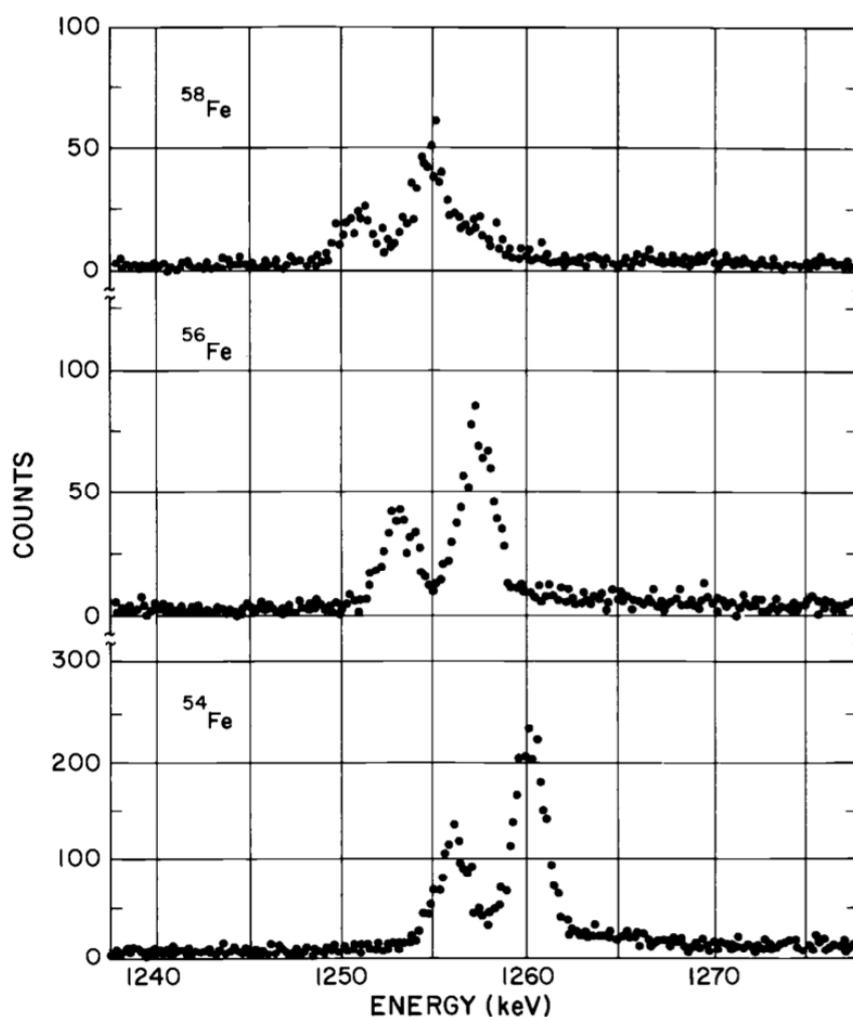


Figura 4.12: Spettri X di isotopi muonici del Ferro. Si vedono i due picchi delle transizioni $2p_{3/2}1s_{1/2}$ e $2p_{1/2}1s_{1/2}$ per i muoni, la prima con intensità doppia della seconda. Lo shift in energia della transizione è dello 0.02% fra un isotopo e il successivo, rispetto a valori dell'ordine di 10^{-6} ottenibili con elettroni equivalenti. [E.B. Shera et al., Phys. Rev. C 14 (1976) 731]

tramite la rivelazione dei raggi γ , e i valori calcolati per atomi idrogenoi-

di nell'ipotesi di dimensioni nucleari finite, fornisce stime dei raggi R delle distribuzioni di carica nucleari coerenti con la forma

$$R = R_0 A^{1/3} \quad , \quad \text{con} \quad R_0 \simeq 1.16 \text{ fm} \quad (4.38)$$

Oltre al muone vi sono anche altri candidati possibili alla cattura come pioni, Kaone, antiprotone, Sigma, ecc., e il sistema dopo la loro cattura, almeno finchè la particella catturata si mantiene su orbitali con alti valori di n , si comporta a tutti gli effetti come un atomo di idrogeno (atomo mesico, atomo antiprotonico, ...) il cui nucleo ha carica Ze , quindi emette raggi X in risposta alla cascata della particella verso orbitali con n inferiore.

Nel caso in cui le particelle in orbita idrogenoide sentano l'interazione forte, e ciò avviene col procedere del processo a cascata verso livelli con n sempre minore, bisogna considerare che non appena la loro funzione d'onda si sovrappone sensibilmente al nucleo, cresce moltissimo la probabilità di una reazione fra esse e il nucleo stesso, e se tale probabilità supera quella delle transizioni radiative i livelli si allargano con conseguente scomparsa della radiazione X associata. L'interruzione delle serie a un dato valore di n , con il conseguente spostamento e allargamento dei livelli, dà informazioni sull'interazione fra la particella e il nucleo e sul raggio d'azione di tale interazione, oltre che sulla massa ridotta della particella catturata. Si ottengono in tal modo informazioni sulla distribuzione in un nucleo di tutti i suoi componenti, compresi i neutroni, e i risultati sono sempre coerenti con una dipendenza da $A^{1/3}$.

Natura delle forze nucleari e dimensioni dei nuclei - 2

Un'altra importante evidenza del breve raggio d'azione delle forze nucleari viene dalla sostanziale costanza dell'energia media di legame B/A per nucleone, essenzialmente indipendente dalla taglia del nucleo e quindi dal numero di massa A , per valori di A circa maggiori di 12. Se infatti la forza nucleare avesse, come quella coulombiana, un ampio raggio d'azione, allora in un nucleo con A nucleoni vi sarebbero $A(A-1)/2$ coppie di interazioni fra essi e l'energia di legame media corrispondente B/A per ogni nucleone del nucleo dovrebbe quindi crescere proporzionalmente ad $(A-1) \simeq A$, ovvero: $B/A \propto A$.

Si constata però che sostanzialmente ogni nucleone di un nucleo interagisce efficacemente soltanto con i nucleoni che gli sono immediatamente vicini, e l'aggiunta di ulteriori nucleoni contribuisce ad accrescere le dimensioni del nucleo ma non la sua energia media di legame per nucleone.

La forza nucleare, garantendo la coesione del nucleo, è essenzialmente attrattiva. Esperimenti di diffusione su nuclei con particelle di alta energia mettono tuttavia in evidenza che le forze nucleari, al di sotto di un certo raggio d'azione, hanno caratteristiche fortemente repulsive, e ciò è attribuito alla struttura a quark dei nucleoni. Questo tra l'altro spiega perchè un

nucleo non collassi sotto l'azione della forza nucleare.

Il comportamento della forza nucleare percepita da un nucleone in moto verso il centro del nucleo può dunque essere grezzamente schematizzato come dovuto a una energia potenziale della forma di una buca quadrata come descritto in figura 4.13 Per sondare gli effetti del potenziale nucleare a di-

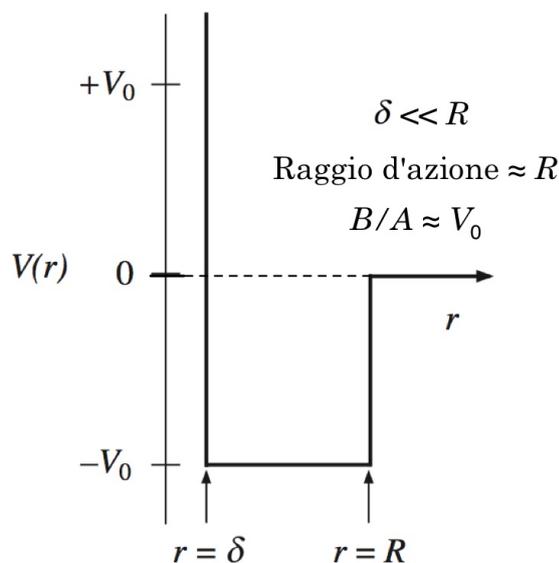


Figura 4.13: Energia potenziale nucleare a buca quadrata con core repulsivo in funzione della distanza r dal centro del nucleo. L'estensione radiale del core repulsivo è indicato da $\delta \ll R$.

stanze prossime a quelle dell'estensione δ del core repulsivo sono necessarie particelle incidenti con energie alte, tipicamente superiori a qualche centinaio di MeV. Questa considerazione permette, quando si trattano fenomeni caratterizzati da basse energie, di approssimare il potenziale nucleare con una semplice buca quadrata, priva della parte repulsiva.

Naturalmente non ci si aspetta che la densità nucleare e le forze nucleari s'interrompano bruscamente a una certa distanza $r = R$, e quindi il potenziale a buca quadrata costituisce semplicemente un grezzo approccio alla descrizione di effetti di carattere generale della forza nucleare. Esso risulta ad esempio più appropriato per descrivere l'effetto su neutroni incidenti, o altre particelle elettricamente neutre che risentano però l'effetto dell'interazione nucleare, che non su protoni o nuclei incidenti, che risentono anche l'effetto repulsivo coulombiano degli altri protoni del nucleo e sono quindi più sensibili alla forma della zona periferica della buca di potenziale.

Un protone incidente con energia totale E_0 su un nucleo con Z protoni sente la barriera repulsiva coulombiana e da un punto di vista classico non dovrebbe potersi avvicinare a una distanza inferiore ad $r = r_0^{min} = Ze^2 / (4\pi\epsilon_0 E_0)$

in quanto, per $R < r < r_0^{min}$, l'energia potenziale $V(r)$ sarebbe superiore ad E_0 e ciò condurrebbe alla condizione assurda di un'energia cinetica negativa per tale protone. Se tuttavia si considerano neutroni di energia equivalente e tale da non dover tenere conto del core repulsivo per $r \lesssim \delta$, questi dovrebbero essere in grado di penetrare nel nucleo. Questo portò a pensare che

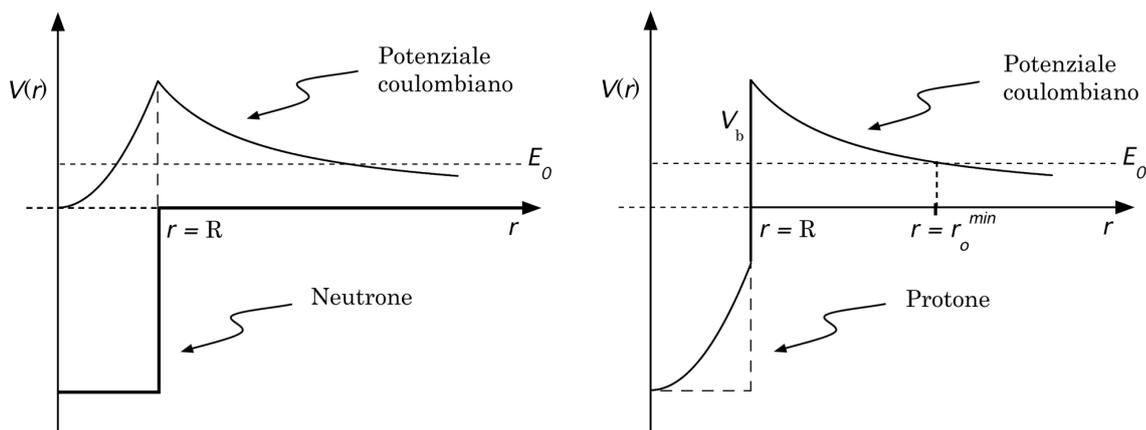


Figura 4.14: Potenziale nucleare per particelle incidenti neutre, a sinistra, e cariche, a destra, di bassa energia. Il *core* repulsivo non è presente ma si tiene conto del potenziale coulombiano.

esperimenti con neutroni di bassa energia avrebbero potuto permettere di ottenere la forma corretta del potenziale nucleare, mentre invece i risultati sperimentali derivanti da esperimenti con fasci di neutroni di bassa energia mostrano una ridottissima dipendenza dai dettagli della forma del potenziale, con una dipendenza più diretta dall'intensità e dal raggio d'azione di questo.

Si può dunque considerare il potenziale a buca quadrata semplicemente come un possibile modo di dare una descrizione fenomenologica di alcune rilevanti caratteristiche della forza nucleare.

Da un punto di vista quantistico questo suggerisce ad esempio che un sistema fisico quale un nucleo atomico debba presentare una struttura con livelli energetici discreti e conseguentemente stati legati del tipo di quanto trovato per gli atomi. La presenza di questi stati quantistici nucleari e delle possibili transizioni fra essi, sono state confermate da una molteplicità di risultati sperimentali, sia relativi ad esperimenti di diffusione che allo studio degli spettri energetici delle emissioni radioattive. La modellizzazione dei livelli fondamentali e degli stati eccitati di nuclei hanno rappresentato una delle prime basi di prova della meccanica quantistica, e sono all'origine del cosiddetto *modello a shell* e delle sue varianti che con successo descrivono parti importanti della fenomenologia nucleare e di cui si parlerà nel paragrafo 23.3.

Natura delle forze nucleari e dimensioni dei nuclei - 3

Studi effettuati su *nuclei speculari*, ovvero isobari che si differenziano per lo scambio fra i corrispondenti numeri di protoni e neutroni¹⁵ come ad esempio $^{15}_8\text{O}$ e $^{15}_7\text{N}$, e tramite reazioni di protoni e neutroni su nuclei, mostrano che una volta apportate le correzioni dovute agli effetti coulombiani, la forza fra due neutroni è sostanzialmente la stessa che fra due protoni, o fra protone e neutrone. Si riscontra quindi una sostanziale *indipendenza dalla carica elettrica* per la forza nucleare. Immaginando di poter "spegnere" l'effetto del campo coulombiano, neutrone e protone dovrebbero dunque, secondo quest'ipotesi, comportarsi in modo indistinguibile dal punto di vista della loro interazione nucleare, analogamente a quanto succede per due elettroni di spin opposti, nello stesso orbitale ma in assenza di un campo magnetico esterno. In questo caso i due stati risultano degeneri in energia finchè appunto non si applichi il campo magnetico esterno che definendo una direzione privilegiata nello spazio rimuove la degenerazione fra i due stati differenziandoli in energia.

Similmente si può pensare a protone e neutrone come due stati degeneri in massa per effetto di una qualche simmetria dell'interazione forte (ovvero dell'Hamiltoniano che la descrive) e si può chiamare questa simmetria *simmetria di spin isotopico forte*. La presenza delle forze elettromagnetiche e deboli "rompe" in effetti questa simmetria e quindi la degenerazione in massa, permettendo di distinguere fra protone e neutrone.

Questo ha condotto all'introduzione del concetto di *spin isotopico* o *isospin*, che è dunque un numero quantico che caratterizza neutrone e protone come due diversi stati di una medesima particella, il nucleone. L'isospin di cui si tratta ora viene anche detto *isospin forte* per distinguerlo da un concetto simile introdotto per spiegare alcune caratteristiche dell'interazione *debole*. Questi risultati e osservazioni hanno anche suggerito un ulteriore modo per stimare le dimensioni della distribuzione di carica elettrica di un nucleo. Si consideri la differenza fra le energie di legame di due nuclei speculari, che nelle ipotesi precedenti sarà dovuta interamente alle diverse energie potenziali coulombiane fra i protoni dei due nuclei. Supponendo ogni nucleo come una sfera uniformemente carica di raggio R si ha che l'energia potenziale elettrostatica è espressa da

$$E_C = \frac{1}{2} \left[\int_0^R r^2 E_i^2(r) dr + \int_R^\infty r^2 E_e^2(r) dr \right] \quad (4.39)$$

¹⁵Questi nuclei presentano ugual numero di interazioni $n - p$, ma diversi numeri di interazioni $p - p$ ed $n - n$.

con $E_i(r)$ ed $E_e(r)$ date dalle 4.29, per cui

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{(Ze)^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\int_0^R \frac{r^4}{R^6} dr + \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \right] = \frac{(Ze)^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right) = \\ &= \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{(Ze)^2}{R} = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Nell'ipotesi, suffragata dai dati sperimentali, che le dimensioni radiali di un nucleo dipendano essenzialmente da A come già visto, cioè $R = R_0 A^{1/3}$, si può assumere che i due nuclei speculari abbiano lo stesso raggio R , quindi, per grandi valori di Z , la differenza fra le energie di legame si scrive come

$$\Delta E_C = \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R} [Z^2 - (Z-1)^2] \simeq \frac{3}{10\pi\epsilon_0} \frac{e^2 Z}{R_0 A^{1/3}} \quad (4.41)$$

Se ΔE_C è sufficientemente grande il nucleo con Z maggiore decade β^+ nel nucleo con Z minore emettendo un positrone e^+ , dalla misura dell'energia del quale si può risalire alla differenza d'energia di legame e di conseguenza ricavare R_0 , che anche in questi casi risulta consistente con quanto ottenuto negli altri modi.

I modi d'indagine fin qui descritti per lo studio delle dimensioni dei nuclei, supponendo comunque che essi siano delle strutture spazialmente simmetriche che tendono a una forma sferica al crescere del numero di massa A , si basano essenzialmente su proprietà e caratteristiche strutturali dei nuclei stessi.

Più oltre si vedranno anche altri approcci, legati a processi di diffusione di proiettili sia carichi che neutri da parte dei nuclei.

4.3.8 Modello a goccia e formula di Weizsäcker

La formulazione di una *teoria del nucleo*, in grado di interpretare la molteplicità dei fenomeni osservati e organizzarli logicamente è un obiettivo perseguito ma non raggiunto.

Lo studio delle proprietà statiche e dinamiche del nucleo atomico coinvolge la soluzione di un complicato problema quantistico a più corpi: un nucleo contiene tipicamente troppi nucleoni per poter sperare di descriverne la struttura e le interazioni con particelle o altri nuclei risolvendo le equazioni del moto collettivo dei nucleoni, ma contemporaneamente contiene un numero ancor troppo piccolo di nucleoni per poter applicare senza riserve i metodi statistici.

Queste due opposte circostanze hanno congiuntamente concorso allo sviluppo di modelli ad hoc per la descrizione di particolari aspetti della fenomenologia nucleare. La mancanza di un'unità concettuale che questo comporta è

largamente compensata dagli importanti chiarimenti forniti dalla modellistica nucleare nell'analisi e interpretazione dei risultati sperimentali: i modelli nucleari, anche se spesso fra loro contraddittori e mutuamente inconciliabili, si completano parzialmente a vicenda e forniscono premesse per una possibile sintesi delle conoscenze acquisite che dovrebbe basarsi sull'opportuna applicazione delle interazioni fondamentali fra quark.

Ogni modello nucleare si fonda su una più o meno accentuata idealizzazione della realtà allo scopo di individuare, in uno schema teorico semplificato, gli elementi fisici essenziali per interpretare una certa classe di risultati sperimentali. La schematizzazione da cui trae origine il modello implica inevitabilmente la ricerca di un opportuno compromesso fra l'esigenza del rigore matematico e la realistica opportunità di procedere a semplificazioni, anche drastiche, quando fisicamente giustificabili.

Il più semplice modello di nucleo atomico lo schematizza come una *goccia sferica* di liquido, di volume $V = \frac{4}{3}\pi R_0^3$, nella quale gli $A = (Z + N)$ nucleoni sono uniformemente distribuiti con densità¹⁶ costante e indipendente da A

$$\begin{cases} \rho(r) = 3A/4\pi R_0^3 \equiv \rho_0 & \text{con } r \leq R_0 \\ \rho(r) = 0 & \text{con } r > R_0 \end{cases} \quad (4.42)$$

Le ipotesi alla base di tale modello di nucleo sono sostanzialmente che

- l'energia di interazione fra due nucleoni non dipende dal tipo e dal numero di nucleoni;
- l'interazione è attrattiva con un breve raggio d'azione r_{int} , così come nelle gocce di liquido in cui le molecole hanno interazione dipolo-dipolo;
- per distanze $r \ll r_{int}$, l'interazione fra i componenti nucleari è fortemente repulsiva;
- l'energia di legame di un nucleo è proporzionale al numero dei suoi nucleoni.

Queste ipotesi implicano la cosiddetta condizione di *saturazione della densità* , per cui ogni nucleone interagisce efficacemente solo con i suoi primi vicini e si ha

$$R_0 = \left(\frac{3A}{4\pi\rho_0} \right)^{1/3} = r_0 A^{1/3} \quad (4.43)$$

Basandosi sul modello a goccia e con un approccio semi-empirico, nel 1928 von Weizsäcker formulò un'equazione che ben descrive l'andamento dell'energia media di legame per nucleone $\langle B \rangle \equiv |B/A|$, illustrato in figura 4.5.

L'equazione di von Weizsäcker aveva dunque come obiettivo di interpretare l'osservata dipendenza dell'energia di legame $B(A, Z)$ di un nucleo atomico dai numeri A e Z .

Esaminando la dipendenza dell'energia media di legame per nucleone $|B/A|$ da A e Z si individuano due distinti contributi all'energia di legame $B(A, Z)$

¹⁶Si ricordi che la densità nucleare media è pari a $\rho_0 \simeq 0.17$ nucleoni/fm³.