

di un nucleo: un contributo di volume  $B_V(A)$  che ha carattere *universale* e assicura la debole dipendenza da  $A$  e  $Z$  di  $|B/A|$  per le diverse specie nucleari, e un contributo  $B_i(A, Z)$  articolato su caratteristiche specifiche dei vari nuclidi, cioè

- la **repulsione elettrostatica** fra gli  $Z$  protoni del nucleo che tende a ridurre il legame nucleare;
- le **dimensioni finite** del nucleo, per cui i nucleoni delle regioni *periferiche* sono meno legati di quelli localizzati nella regione più centrale;
- l'**eccesso neutronico** che tende anche a ridurre il legame nucleare;
- la natura **pari o dispari** di  $A$  e  $Z$ , responsabile delle variazioni di massa e quindi di energia di legame, osservate nelle sequenze isobariche.

La dipendenza da  $A$  e  $Z$  delle prime due caratteristiche indicate si ottiene sulla base di elementari considerazioni classiche. Questo e il modo in cui nel modello si tien conto di alcune prescrizioni quantistiche, costituiscono uno dei limiti sostanziali di tale approccio, al di là del suo importante ruolo nell'interpretazione di molta fenomenologia nucleare e nell'utilizzazione pratica.

- La riduzione dell'energia di legame dovuta alle dimensioni finite di un nucleo, espressa dalla cosiddetta *energia di superficie*  $B_S(A)$ , è proporzionale alla superficie  $S = 4\pi R_0^2 = 4\pi r_0^2 A^{2/3}$  del nucleo stesso. Ciò è intuibile tenendo conto del fatto che ogni nucleone sulla superficie, proprio per motivi geometrici, ha minori interazioni leganti con i suoi simili rispetto ad un nucleone nell'interno di un nucleo. Si pone quindi

$$B_S(A) = b_S A^{2/3} \quad (4.44)$$

con  $b_S$  costante da determinare.

Questo termine spiega perchè l'energia media di legame per nucleone  $|B/A|$  sia minore per i nuclei più leggeri, che hanno un maggior rapporto superficie/volume e quindi relativamente più nucleoni sulla superficie che nel *core* interno.

- La riduzione dell'energia di legame dovuta alla repulsione coulombiana fra i protoni è indicata col termine  $B_C(A, Z)$ . La si può stimare considerando una distribuzione, non necessariamente uniforme ma di simmetria sferica, della carica protonica in un nucleo descritta dalla densità di carica  $\rho_Z(r)$ . Detta  $V_C(r)$  l'energia potenziale elettrostatica di un protone nel campo elettrico degli altri  $(Z - 1)$  protoni del

nucleo, applicando il teorema di Gauss si ha, detto  $\Phi(E_{r'})$  il flusso della componente radiale  $E_{r'}$  del campo elettrico attraverso la superficie  $S(r') = 4\pi r'^2$

$$E_{r'} = \frac{Q(r')}{4\pi\epsilon_0 r'^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \int_0^{r'} 4\pi\rho_{Z-1}(r'')r''^2 dr'' \quad (4.45)$$

con  $Q(r')$  la carica elettrica racchiusa nel volume sferico di raggio  $r'$ . Per la conservatività del campo elettrostatico si ha  $E_{r'} = -dV_C(r')/dr'$ , da cui:

$$V_C(r) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr'}{r'^2} \int_0^{r'} \rho_{Z-1}(r'')r''^2 dr'' \quad (4.46)$$

Si ricordi che  $V_C(r) \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow \infty$ .

L'energia potenziale elettrostatica (coulombiana) del nucleo è

$$B_C = \frac{1}{2} \int \rho_Z(r)V_C(r)d^3r \quad (4.47)$$

Supponendo ora che la densità di carica sia uniforme entro il volume del nucleo e nulla fuori

$$\begin{cases} \rho_Z(r) = 3Ze/4\pi R_0^3 & \text{con } r \leq R_0 \\ \rho_Z(r) = 0 & \text{con } r > R_0 \end{cases} \quad (4.48)$$

si ha:

$$\begin{cases} V_C(r) = \frac{(Z-1)e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R_0} \left(3 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) & \text{con } r \leq R_0 \\ V_C(r) = \frac{(Z-1)e}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{con } r > R_0 \end{cases} \quad (4.49)$$

In base alle 4.48 e 4.49, la 4.47 diventa:

$$B_C(A, Z) = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R_0} = b_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \quad (4.50)$$

con  $b_C = (3e^2)/(20\pi\epsilon_0 r_0)$ .

La dipendenza da  $A$  e  $Z$  trovata per l'energia coulombiana vale anche se la carica elettrica non è uniformemente distribuita nel volume nucleare, purchè sia a simmetria sferica, in tal caso sarà il valore di  $b_C$  a cambiare.

Allo stesso risultato si poteva arrivare ricordando, come ottenuto con la 4.40 che l'energia potenziale elettrostatica di una distribuzione sferica di raggio  $R_0$  e simmetrica di carica  $Ze$  vale

$$\frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R_0}$$

ma che al tempo stesso, perchè ci sia repulsione fra cariche, bisogna che ce ne siano almeno due, quindi per  $Z = 1$  il termine di potenziale che "indebolisce" l'energia di legame di un nucleo deve annullarsi, e ciò si ottiene sostituendo  $Z(Z - 1)$  a  $Z^2$ .

- La riduzione dell'energia di legame dovuta all'eccesso neutronico è espressa dalla cosiddetta *energia di simmetria*  $B_{sim}(A, Z)$ . Sperimentalmente si osserva che mentre per nuclei con bassi valori di  $A$  si tende ad avere una condizione per cui  $N \cong Z$ , al crescere di  $A$  il numero di neutroni diventa preponderante ( $N/Z > 1$ ), e ciò in parte compensa l'accrescersi della repulsione coulombiana che seppur più debole dell'interazione nucleare, agendo però a lungo range ridurrebbe troppo l'energia di legame rendendo instabili i nuclei al crescere di  $A$  ben prima di quanto non avvenga. La dipendenza da  $A$  e  $Z$  di  $B_{sim}(A, Z)$  può essere intuitivamente ottenuta considerando che ogni neutrone in eccesso provoca una riduzione di energia di legame per nucleone proporzionale a  $(N - Z)/A$ . Siccome il numero totale di neutroni in eccesso è  $(N - Z)$ , l'effetto complessivo è proporzionale ad  $(N - Z)^2/A$ , da cui

$$B_{sim}(A, Z) = b_{sim} \frac{(N - Z)^2}{A} = b_{sim} \frac{(A - 2Z)^2}{A} \quad (4.51)$$

La costante di proporzionalità  $b_{sim}$  si ottiene sperimentalmente.

Il perchè il termine  $B_{sim}(A, Z)$  contribuisca a ridurre  $|B/A|$ , nonostante l'aumento di  $N/Z$  al crescere di  $A$  favorisca la stabilità dei nuclei più pesanti, può essere intuito pensando al principio d'esclusione secondo il quale uno stesso stato quantico non può essere occupato da più di due fermioni. Tenendo conto del fatto che ad ogni fissato livello energetico di stato legato c'è un numero finito di stati quantici disponibili, si ha che aggiungendo nucleoni a un nucleo essi si posizioneranno su livelli a energie sempre più alte; ciò però determina l'aumento dell'energia totale del nucleo portando di conseguenza a una diminuzione della sua energia di legame.

Come si vedrà più avanti, trattando del modello nucleare a gas di Fermi, protoni e neutroni occupano nel nucleo due diversi gruppi di livelli energetici pressochè paralleli e se un nucleo contiene più neutroni che protoni, vi sarà per esso un certo numero di neutroni su livelli a energie superiori rispetto ai protoni.

Immaginando di poter trasformare metà dei neutroni in eccesso in protoni e sistemandoli quindi sui relativi livelli, riequilibrando così i numeri di protoni e neutroni di quel nucleo, si otterrebbe una riduzione della sua energia, e quindi una maggior energia di legame. È dunque sostanzialmente lo squilibrio fra i numeri dei due tipi di nucleoni che genera il termine d'asimmetria.

- Lo studio sistematico delle masse nucleari mostra che i nuclei sono più stabili quando posseggono un numero pari di protoni e/o di neutroni. Questo viene interpretato come un accoppiamento a doppietti sia dei protoni che dei neutroni, in funzione di come si accoppiano i loro momenti orbitali e di spin a formare il momento angolare totale  $J$  di un nucleo. Empiricamente si tiene conto di ciò ponendo

$$B_{ac}(A, Z) = b_{ac} \frac{\delta(A, Z)}{A} \quad (4.52)$$

L'analisi fenomenologica delle sequenze isobariche suggerisce di porre  $\delta(A, Z) = -1$  se  $N$  e  $Z$  sono entrambi pari,  $\delta(A, Z) = 0$  se  $N$  e  $Z$  sono l'uno pari e l'altro dispari, o viceversa, e  $\delta(A, Z) = +1$  se  $N$  e  $Z$  sono entrambi dispari. Per tener conto di ciò si può anche scrivere

$$B_{ac}(A, Z) = -b_{ac} \frac{(-1)^N + (-1)^Z}{2A} \quad (4.53)$$

Tornando ora al termine dell'energia di volume  $B_V(A)$ , lo si esprime come una funzione lineare del numero di massa  $A$

$$B_V(A) = b_V A \quad (4.54)$$

cosicchè il contributo di volume dell'energia media per nucleone,  $b_V = B_V(A)/A$ , risultando indipendente da  $A$ , rappresenti l'indispensabile termine costante dell'energia media di legame, senza il quale la debole dipendenza da  $A$  (per  $A \geq 12$ ) osservata per  $b(A, Z)$  non sarebbe giustificabile.

Si ottiene quindi, per l'energia di legame dei nuclei atomici, la seguente formula semi-empirica:

$$\begin{aligned} B_0(A, Z) &= B_V(A) + B_S(A) + B_C(A, Z) + B_{sim}(A, Z) + B_{ac}(A, Z) = \\ &= b_V A + b_S A^{2/3} + b_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + b_{sim} \frac{(A-2Z)^2}{A} + b_{ac} \frac{\delta(A, Z)}{A} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Un best-fit con questa relazione sui dati sperimentali permette di ottenere i valori dei cinque parametri  $b_V$ ,  $b_S$ ,  $b_C$ ,  $b_{sim}$  e  $b_{ac}$ . Qui di seguito sono riportati i valori di uno di tali best-fit:

$$\begin{cases} b_V = -15.56 & \text{MeV} \\ b_S = +17.23 & \text{MeV} \\ b_C = +0.697 & \text{MeV} \\ b_{sim} = +19.1 & \text{MeV} \\ b_{ac} = +135.0 & \text{MeV} \end{cases} \quad (4.56)$$

Per le masse nucleari si ottiene quindi, partendo dalla 4.9,

$$M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n + \frac{B_0(A, Z)}{c^2} \quad (4.57)$$

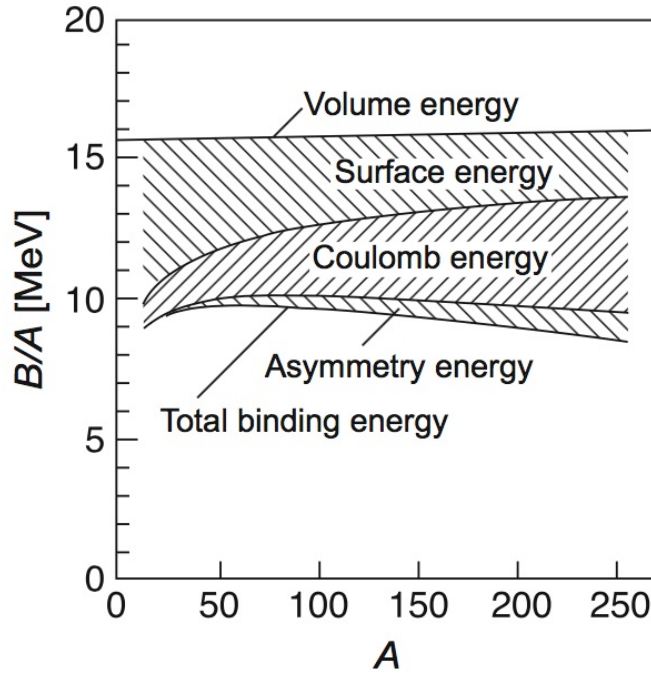


Figura 4.15: Illustrazione del contributo dei vari termini della formula di Weizsäcker all'energia media di legame per un nucleone in un nucleo, in funzione del numero di massa  $A$ .

L'attendibilità media dei risultati forniti dalla 4.57 è di circa 2 MeV, tranne che in corrispondenza ai valori di  $A$  e  $Z$  per i quali si fanno sentire forti effetti di *chiusura degli strati*.

In figura 4.15 è illustrata l'entità dei diversi contributi all'energia media di legame per un nucleone in un nucleo presenti nella 4.55; in figura 4.16 è riportato il risultato di un fit, sempre utilizzando la formula di Weizsäcker 4.55, sull'insieme dei valori delle energie di legame medie per nucleone. Si veda ora che se nella 4.57 si pone

$$\begin{cases} \alpha = b_C A^{-1/3} + 4b_{sim} A^{-1} \\ \beta = b_C A^{-1/3} + 4b_{sim} + m_n - m_p \\ \gamma = b_V + b_S A^{-1/3} + b_{sim} + m_n \end{cases} \quad (4.58)$$

essa diventa

$$M(A, Z) = \alpha Z^2 - \beta Z + \gamma A + b_{ac} \frac{\delta(A, Z)}{A} \quad (4.59)$$

esprimendo la massa dei nuclei come una funzione quadratica di  $Z$ , per valori fissati di  $A$ . Con valori dispari di  $A$  si ha un unico andamento parabolico per  $M(Z)$ ; per valori pari di  $A$  si trova che le masse dei nuclei pari-pari e dispari-dispari si distribuiscono su due parabole traslate verticalmente, con

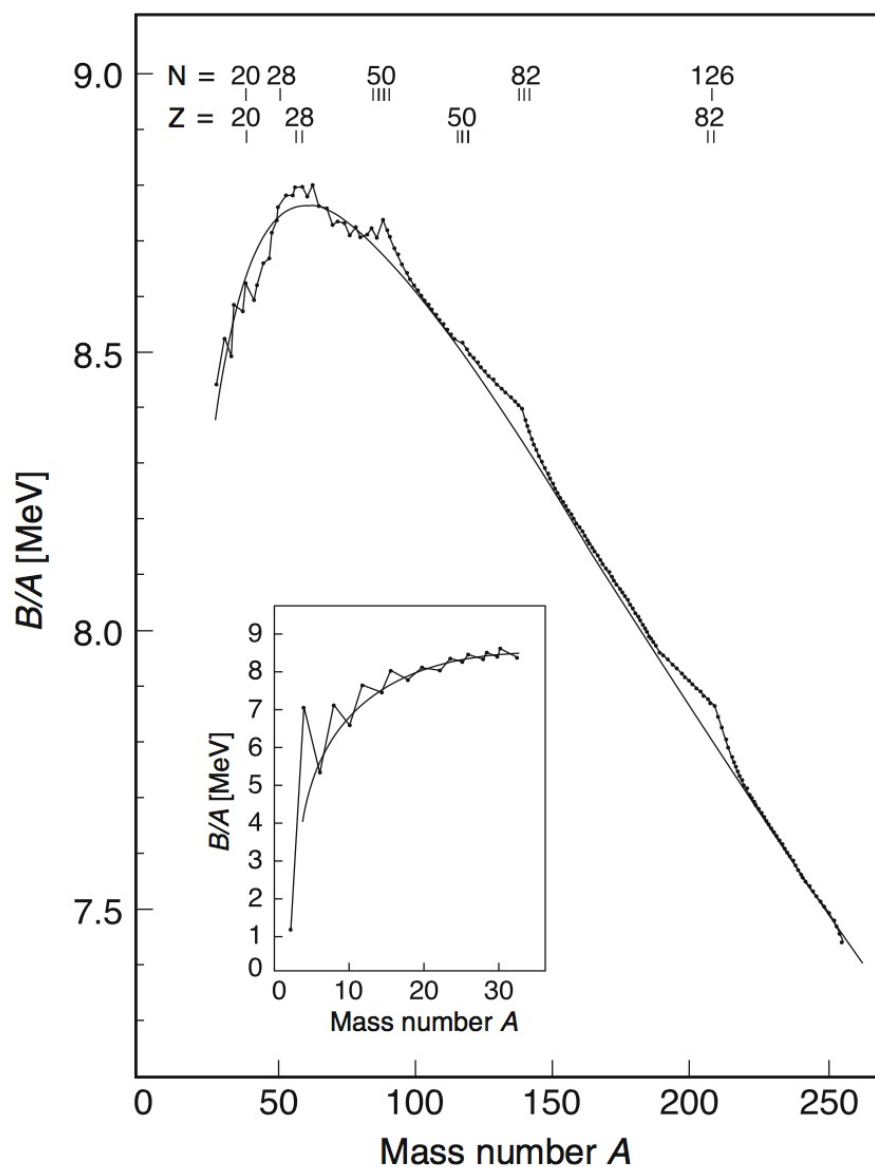


Figura 4.16: Fit con la formula di Weizsäcker sull'insieme dei valori delle energie di legame medie per nucleone, dei nuclei con valore pari di  $A$  (dalla compilazione di Mattauch, Thiele e Wapstra, Nuc. Phys. 67(1965) 1). Sono evidenziati i *numeri magici*.

quella relativa ai nuclei dispari-dispari situata a energie maggiori della quantità  $2|B_{ac}(A, Z)|$ .

I minimi di tali parabole sono in corrispondenza di  $Z = \beta/2\alpha$ , e indicano i nuclidi di massa inferiore per la sequenza isobarica individuata dal partico-

lare valore di  $A$ , stabili rispetto al decadimento  $\beta$ .

Si è così ritrovato quanto evidenziato sperimentalmente dalla tabella dei nuclidi e descritto nel precedente paragrafo 4.2.

Per chiarire l'importanza e l'utilità della formula di Weizsäcker è anche necessario sottolinearne i limiti che contribuiscono a definirne anche gli effettivi ambiti di applicabilità.

L'ipotesi sulla base della quale si sono ottenuti alcuni termini considera il nucleo come sostanzialmente *sferico*, e questo non permette di tener conto dei termini non nulli di quadrupolo elettrico che si osservano per svariati nuclei.

Risultati in merito alla saturazione della forza di coesione fra i nucleoni in un nucleo e alla loro repulsione a breve range <sup>17</sup>, mettono in evidenza che non basta tener conto del principio di esclusione di Pauli come fatto.

Le considerazioni sul ruolo che momento angolare orbitale e spin dei nucleoni hanno sul carattere repulsivo della forza, sono puramente qualitative e semiclassiche.

Si osservi poi che il filo conduttore che conduce a tale formula consiste sostanzialmente nell'assimilare il nucleo atomico a una specie di *goccia di liquido*, ma le predizioni che ne conseguirebbero per descrivere moti collettivi rotazionali e/o vibrazionali non coprono la panoramica dei fenomeni osservati, o comunque non li descrivono in modo completo e soddisfacente.

L'approccio è stato ed è comunque utile nel descrivere la stabilità dei nuclei rispetto al decadimento  $\alpha$ , alla fissione e al decadimento  $\beta$ .

### 4.3.9 Momenti elettrici e magnetici dei nuclei

La gran parte di quanto si sa della struttura dei nuclei non deriva direttamente dallo studio di come essi interagiscono "fortemente" con altri nuclei, ma piuttosto di come interagiscono elettromagneticamente.

La forza nucleare determina sostanzialmente distribuzione e moto dei nucleoni nel nucleo e se per sondarli si utilizzano interazioni elettromagnetiche, queste hanno effetti più deboli dell'ambiente "nucleare" circostante, in tal modo si ha una discreta garanzia di non distorcere significativamente le caratteristiche di quanto si sta misurando.

Ogni distribuzione di cariche o correnti è sorgente di campi elettrici e magnetici la cui forma e intensità dipendono anche dalla distanza dalla sorgente.

Abitualmente si associano alle distribuzioni di cariche e correnti dei "momenti di multipolo" per ogni specifica distribuzione spaziale: la proporzionalità  $1/r^2$  del campo elettrico deriva dalla carica totale della sorgente e gli si assegna il momento d'ordine zero o "monopolo"; la proporzionalità  $1/r^3$  deriva dal momento d'ordine uno o "dipolo"; la proporzionalità  $1/r^4$  deriva dal momento d'ordine due o "quadrupolo", e così via.

---

<sup>17</sup>Si veda anche il paragrafo 22.2.

Per i momenti magnetici le cose sono simili con l'eccezione del momento di ordine zero, il monopolo magnetico, che sembra non esistere, e quindi non vi sono contributi di momento magnetico proporzionali a  $1/r^2$ .

Con l'elettromagnetismo si è visto come calcolare i diversi momenti di multipolo elettrici e magnetici e la stessa strategia può essere adottata per i momenti di un nucleo, tenendo però conto che si ha a che fare in tal caso con un soggetto che va trattato quantisticamente, per cui i momenti di multipolo diventeranno delle osservabili per le quali si possono calcolare i valori d'aspettazione associati ai diversi stati di un nucleo. Questi valori d'aspettazione dovranno naturalmente essere poi direttamente confrontabili con i valori sperimentali misurati.

Classicamente si ha che una distribuzione di carica a simmetria sferica genera soltanto il campo monopolare coulombiano e i multipoli d'ordine superiore sono tutti nulli.

Una corrente che si sviluppi su un percorso piano-circolare genera soltanto un campo magnetico dipolare.

È inoltre ragionevole pensare che i nucleoni di un nucleo si aggregino a formare il nucleo in una struttura che se non eccitata, nel rispetto dell'interazione nucleare, tende a una distribuzione e forma il più possibile simmetriche, quindi per quanto possibile prossima a quella sferica, ed è per questo che in molti casi è sufficiente misurare e calcolare soltanto i multipoli d'ordine più basso per caratterizzare le proprietà elettromagnetiche di un nucleo. Questo porta a immaginare che le proprietà multipolari d'ordine superiore di un nucleo possano essere ascritte alla presenza in esso di nucleoni spaiati. Un ulteriore vincolo all'insorgere di momenti di multipolo nei nuclei è legato alle sue proprietà di simmetria e alla parità dei suoi stati. Ogni momento di multipolo elettromagnetico ha una definita parità, determinata dal comportamento dell'operatore associato quando si considera la trasformazione  $r \rightarrow -r$ , e bisogna tenerne conto per la compatibilità con la parità degli stati del nucleo.

La parità dei momenti elettrici è data da  $(-1)^\ell$ , dove  $\ell$  rappresenta l'ordine del momento di multipolo ( $\ell = 0$  per il monopolo,  $\ell = 1$  per il dipolo, ...). La parità dei momenti magnetici è invece data da  $(-1)^{\ell+1}$ .

Per calcolare il valore d'aspettazione di un operatore "momento di multipolo"  $\mathcal{O}$ , si effettua un integrale del tipo

$$\int \psi^*(\vec{r}) \mathcal{O} \psi(\vec{r}) d^3r \quad (4.60)$$

Se le forze in gioco conservano la parità, allora in un sistema descritto da una funzione d'onda  $\psi$  non degenere, la parità della stessa è ininfluente e si ha che  $\psi^*\psi = |\psi|^2$  è pari. Se però  $\mathcal{O}$  è un operatore dispari allora tutto l'integrando è una funzione dispari, per cui l'integrale si annulla. Questo porta ad affermare che *in un nucleo tutti i momenti di multipolo statico con*



*parità dispari devono essere nulli*, quindi il dipolo elettrico, il quadrupolo magnetico, l'ottupolo elettrico, ... .

L'evidenza sperimentale dell'assenza di momenti di dipolo elettrici per i nuclei, porta dunque a concludere che le forze nucleari conservano la parità. Il fatto che a meno di possibili piccole influenze dovute all'interazione debole che può introdurre nell'Hamiltoniana termini che non conservano la parità, gli stati nucleari abbiano parità definita, è però di per sé una condizione solo sufficiente all'annullarsi dei momenti di multipolo elettrico d'ordine dispari; si può infatti provare che il momento di dipolo elettrico di un nucleo si annulla anche se tutti i moti interni soddisfano l'*inversione temporale*.

Si vedano ora i primi tre momenti di multipolo nucleari non nulli, che sono quelli significativi dal punto di vista sperimentale.

- Il momento di monopolio elettrico corrisponde, come già osservato, alla carica nucleare netta  $Ze$ .
- Il successivo momento non nullo è il momento di dipolo magnetico  $\mu$ . Considerando una corrente  $I$  che si sviluppa lungo una traiettoria piana circolare di area  $A$ , si vede che gli è associato un momento magnetico di modulo  $|\vec{\mu}| = IA$  e se la corrente è dovuta a una particella di massa  $M$  e carica  $e$  che ruota con velocità di modulo  $v$  su una traiettoria circolare di raggio  $r$ , con periodo  $T = 2\pi r/v$ , allora

$$|\vec{\mu}| = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2} = \frac{e}{2M} |\vec{\ell}| \quad (4.61)$$

con  $\vec{\ell}$  il momento angolare classico. Quantisticamente si definisce operativamente l'osservabile momento magnetico come corrispondente alla massima componente di  $\vec{\ell}$ , per cui si può scrivere la forma quantistica di  $\mu$  sostituendo  $\ell$  nella 4.61, col suo valore d'aspettazione relativo alla direzione lungo la quale la sua proiezione è massima, ovvero pari ad  $m_\ell \hbar$  con  $m_\ell = +\ell$

$$\mu = \frac{e\hbar}{2M} \ell \quad (4.62)$$

con  $\ell$  numero quantico del momento angolare orbitale.

La quantità  $e\hbar/2M$  è detta *magnetone elementare* e nel caso atomico si pone  $M = m_e$ , ottenendo il magnetone di Bohr  $\mu_B$ , mentre nel caso nucleare si pone  $M = m_p$ , ottenendo il magnetone nucleare  $\mu_N$ .

Il fatto che  $\mu_N/\mu_B \ll 1$  giustifica che in molte circostanze gli effetti derivanti dal magnetismo atomico siano preponderanti rispetto a quelli del magnetismo associato ai nuclei.

La 4.62 può essere utilmente scritta come

$$\mu = g_\ell \ell \mu_N \quad (4.63)$$

dove  $g_\ell$  è un fattore associato al momento angolare orbitale  $\ell$  che vale 1 per i protoni e 0 per i neutroni.

I nucleoni posseggono, come visto, anche un momento angolare intrinseco di spin cui è associato un momento magnetico intrinseco, che non ha analogo classico, ma che può essere scritto in una forma simile alla 4.63

$$\mu = g_s s \mu_N \quad (4.64)$$

con  $s = 1/2$  e  $g_s$  il cosiddetto *fattore di spin*, che dalla soluzione dell'equazione di Dirac dovrebbe coincidere con 2, nell'ipotesi di particelle puntiformi, quindi prive di struttura interna.

Ciò è molto ben verificato per l'elettrone, mentre i valori misurati sperimentalmente su nucleoni liberi sono

$$\begin{aligned} g_s &= 5.5856912 \pm 0.0000022 && \text{per il protone} \\ g_s &= -3.8260837 \pm 0.0000018 && \text{per il neutrone} \end{aligned}$$

Questo è chiaramente un indizio imprescindibile del fatto che protoni e neutroni non sono assimilabili a particelle elementari, ma hanno una struttura costitutiva e non sono puntiformi.

Tabella - Momenti di dipolo magnetico di alcuni nuclei nello stato fondamentale

Nuclide	$\mu$ ( $\mu_N$ )
$n$	-1.9130418
$p$	+2.7928456
$^2\text{H}$ (D)	+0.8574376
$^{17}\text{O}$	-1.89379
$^{57}\text{Fe}$	+0.09062293
$^{57}\text{Co}$	+4.733
$^{93}\text{Nb}$	+6.1705

Si è accennato al fatto che i nucleoni in un nucleo interagiscono in modo da accoppiarsi favorendo quanto più possibile una condizione di massima energia di legame per il nucleo stesso, e questo corrisponde al fatto che gli accoppiamenti tendono a determinare per ogni nucleo un momento angolare orbitale totale e di spin totale, quanto più possibile prossimi a zero.

Questo porta a dedurre che i nucleoni accoppiati non danno contributo al momento magnetico che deriva sostanzialmente solo dagli eventuali "pochi" *nucleoni di valenza*, ovvero disaccoppiati, presenti.

Queste osservazioni sono suffragate dai risultati sperimentali che mostrano come la gran parte dei nuclei abbia valori contenuti del momento di dipolo magnetico; il valore più alto è quello del  $^{93}\text{Nb}$ , leggermente

superiore a 6 magnetoni nucleari.

Nel 1937 Schmidt elaborò un modello per predire i valori dei momenti magnetici di dipolo dei nuclei, basato sull'idea che il contributo prevalente sia dovuto al nucleone spaiato, suggerito da una regolarità abbastanza generale desumibile dai dati per i nuclei con  $A$  dispari. Questi possono infatti essere visti come composti da una parte costituita da uno "strato" completo di nucleoni con spin appaiati, più un nucleone spaiato. Lo strato completo contiene necessariamente un numero pari di neutroni e protoni ed è quindi ragionevole pensare che non possieda né momento angolare né momento magnetico. Aggiungendo a questo strato un nucleone di momento angolare  $\ell$  e spin  $1/2$ , lo spin totale del nucleo risulta pari ad  $\ell \pm 1/2$ . In base al modello vettoriale  $\vec{\ell}$  ed  $\vec{s}$  si combinano per formare  $\vec{J}$ , acquisendo ognuno e indipendentemente un moto di precessione attorno a  $\vec{J}$ . Il momento magnetico lungo la direzione di  $\vec{J}$  è allora, in magnetoni nucleari

$$\mu_J = g_\ell \frac{\vec{\ell} \cdot \vec{J}}{J} + g_s \frac{\vec{s} \cdot \vec{J}}{J} = Jg_\ell \quad (4.65)$$

con  $g_\ell = 0$  per il neutrone,  $g_\ell = 1$  per il protone ed  $\vec{\ell} \cdot \vec{J}$  espresso dalla

$$s^2 = \ell^2 + J^2 - 2\vec{\ell} \cdot \vec{J}$$

che quantisticamente diventa

$$\frac{\vec{\ell} \cdot \vec{J}}{J^2} = \frac{\ell(\ell+1) + J(J+1) - s(s+1)}{2J(J+1)}$$

e analogamente per  $(\vec{s} \cdot \vec{J})/J^2$ . Sostituendo si ottiene

$$\begin{aligned} g_J &= g_s \frac{J(J+1) + s(s+1) - \ell(\ell+1)}{2J(J+1)} + \\ &+ g_\ell \frac{J(J+1) + \ell(\ell+1) - s(s+1)}{2J(J+1)} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Quindi, per  $J = \ell + 1/2$ ,

$$\mu_J = \frac{1}{2} g_s + \ell g_\ell \quad (4.67)$$

e per  $J = \ell - 1/2$

$$\mu_J = -\frac{1}{2} g_s \frac{2\ell-1}{2\ell+1} + g_\ell \frac{(\ell+1)(2\ell-1)}{2\ell+1} \quad (4.68)$$

Combinando le due espressioni si ha

$$\mu_J = J \left[ g_\ell \pm \frac{1}{2\ell + 1} (g_s - g_\ell) \right] \quad (4.69)$$

con il segno ”+” che vale per  $J = \ell + 1/2$ . Nelle figure 4.16 e 4.17 sono riportati i valori sperimentali per  $\mu_J$ , confrontati con i risultati forniti dalla formula (4.67) che individua le cosiddette ”curve di Schmidt”. Si nota che queste non riproducono con precisione i valori sperimentali che si trovano comunque compresi nella fascia di valori da esse delimitata, e ciò non deve sorprendere, dato il carattere grossolano del modello.

- Proseguendo nella ricerca dei momenti di multipolo non nulli si trova il ”momento di quadrupolo elettrico”. L’espressione classica per il momento di quadrupolo elettrico  $eQ$  associato a una carica puntiforme  $e$ , posta a distanza  $r$  dall’origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $(x, y, z)$ , e riferito all’asse  $z$ , è data da

$$eQ = e(3z^2 - r^2) \quad (4.70)$$

come mostrato in Appendice B.

Se nel nucleo c’è un nucleone spaiato che però si muove in modo sfericamente simmetrico, per cui in media si ha  $x^2 = y^2 = z^2 = r^2/3$ , allora il momento di quadrupolo elettrico risulta nullo.

Se si immagina che il nucleone si muova lungo un’orbita piana ”classica” giacente sul piano  $(x; y)$ , allora si ha  $z = 0$  e  $Q = -r^2$ .

La corrispondente osservabile momento di quadrupolo elettrico in meccanica quantistica è definita come

$$eQ = e \int \psi^*(\vec{r}) (3z^2 - r^2) \psi(\vec{r}) d^3r \quad (4.71)$$

se quindi il nucleone spaiato è un neutrone, ovvero di carica elettrica nulla, il suo contributo al momento di quadrupolo elettrico del nucleo è nullo.

Se  $|\psi|^2$  è a simmetria sferica, quindi con  $|\vec{J}| = 0$ , allora  $Q = 0$ , come nel caso classico.

Quantisticamente si trova che  $Q = 0$  anche per  $|\vec{J}| = 1/2$ <sup>18</sup>.

Se  $|\psi|^2$  è concentrata nel piano  $(x; y)$ , ovvero  $(z \simeq 0)$ , allora si ha che  $Q \sim -\langle r^2 \rangle$ , con  $\langle r^2 \rangle$  il raggio quadratico medio dell’orbita, e si ha una deformazione ”oblata” della distribuzione di carica.

Se invece  $|\psi|^2$  è concentrata lungo l’asse  $z$ , quindi  $(z \simeq r)$ , si trova  $Q \sim +2\langle r^2 \rangle$ , e si ha una deformazione ”prolata” della distribuzione di carica.

---

<sup>18</sup>Si veda l’Appendice B

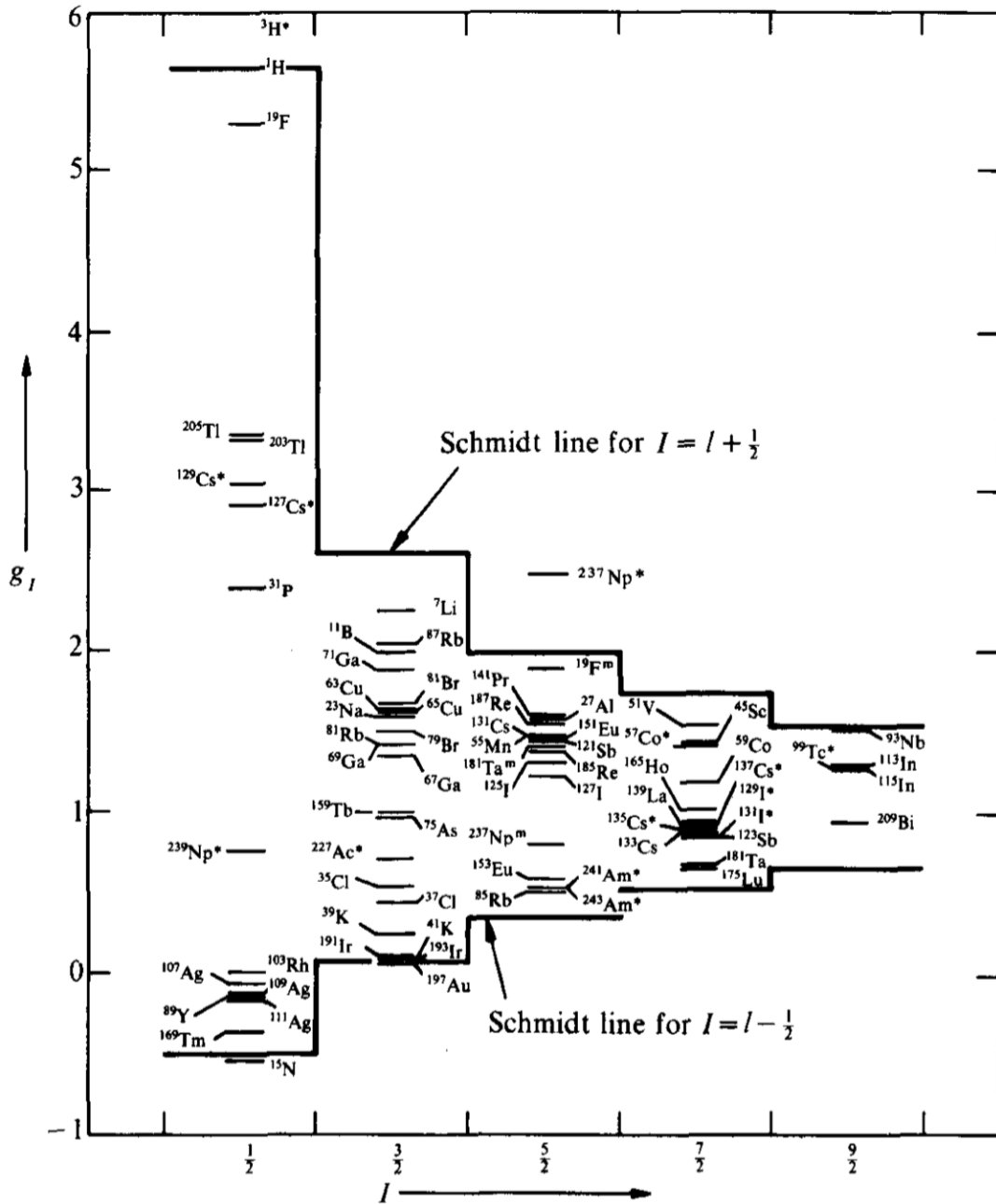


Figura 4.17: Valori di  $g_J$  e linee di Schmidt per nuclei con numero dispari di protoni.

Considerare il termine d'accoppiamento risulta anche in questo caso utile in quanto si può assumere che nucleoni accoppiati che si muovono

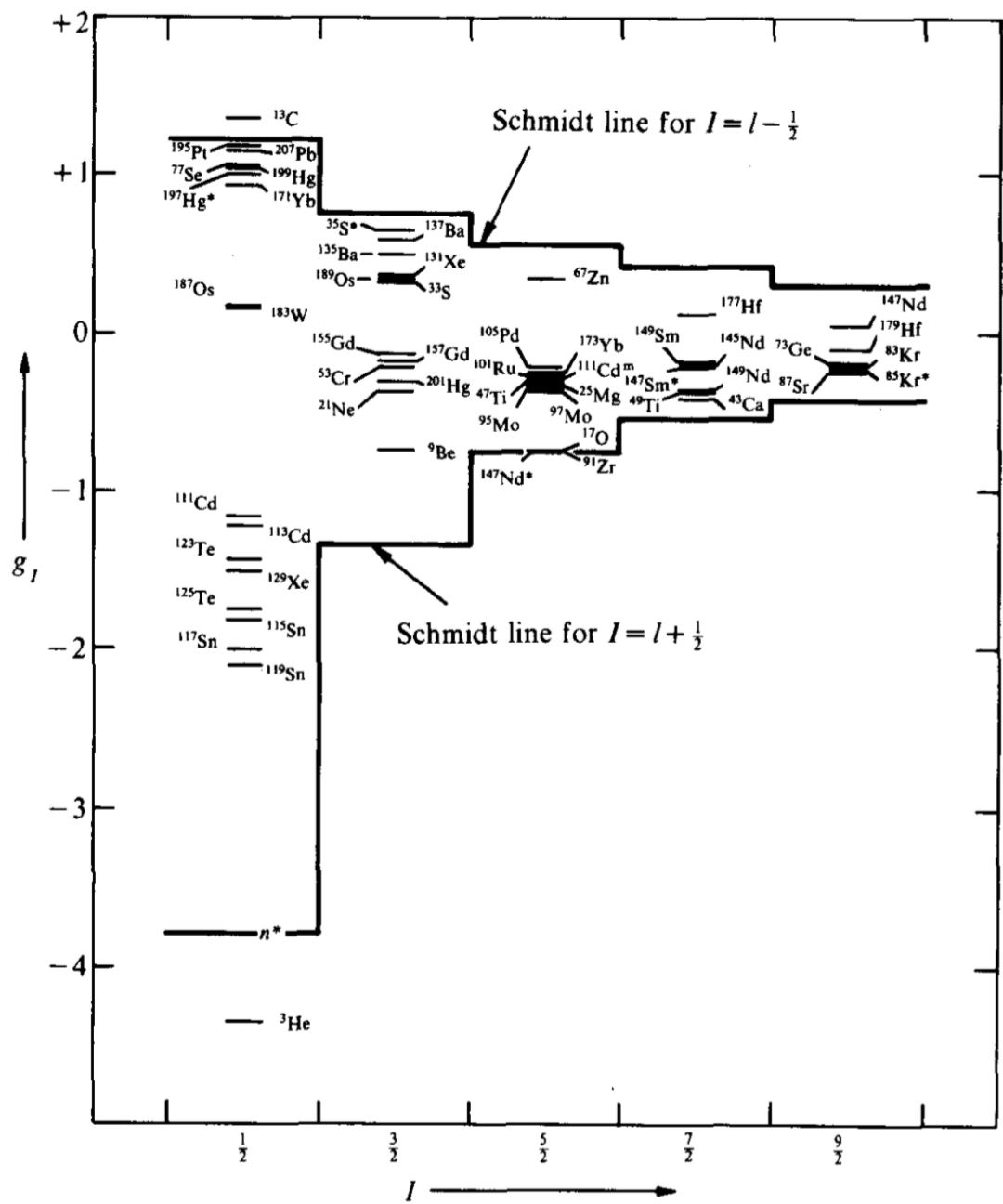


Figura 4.18: Valori di  $g_J$  e linee di Schmidt per nuclei con numero dispari di neutroni.

nel nucleo in modo sfericamente simmetrico non contribuiscano a  $Q$ . Si può dunque immaginare che per nuclei che soddisfino questa simmetria strutturale il momento di quadrupolo elettrico possa essere stimato

tenendo conto della presenza di un eventuale nucleone spaiato, detto anche di valenza, che si muova in prossimità della superficie di un core quasi sferico costituito dagli altri  $A - 1$  nucleoni accoppiati, quindi a distanza  $R = R_0 A^{1/3}$  dal centro, il che porta a stimare il momento di quadrupolo come

$$|eQ| \leq e R_0^2 A^{2/3} \quad (4.72)$$

Calcolando  $|eQ|$  si trova che esso varia da circa  $6 \times 10^{-30} e \cdot m^2$ , per i nuclei leggeri, fino a circa  $50 \times 10^{-30} e \cdot m^2$  per i nuclei più pesanti.

Introducendo il *barn*, con  $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$ , si trova quindi che i valori calcolati secondo il semplice modello proposto soddisfano la condizione  $0.06 e \cdot \text{b} \leq |eQ| \leq 0.5 e \cdot \text{b}$ .

Le misure sperimentali mostrano che molti nuclei hanno valori di  $|eQ|$  compresi entro questo intervallo, nonostante ve ne siano alcuni, soprattutto fra le terre rare, che se ne discostano anche significativamente, indicando che in quei casi il modello a nucleone spaiato singolo non riesce a spiegare i grandi valori misurati per il momento di quadrupolo elettrico. Quindi se ne deduce che l'assunzione che i nuclei siano costituiti da un core a simmetria sferica di nucleoni appaiati, più un eventuale nucleone spaiato, non è valida per tutti i nuclei; in certi casi anche il "core" pu`o presentarsi con una simmetria non sferica. Nella tabella che segue sono riportati i valori dei momenti di quadru-polo di alcuni nuclei nel loro stato fondamentale.

Tabella - Momenti di quadrupolo di alcuni nuclei nello stato fondamentale.

Nuclide	$Q$ (barn)
$^2\text{H}$ (D)	+0.00288
$^{17}\text{O}$	-0.02578
$^{59}\text{Co}$	+0.40
$^{63}\text{Cu}$	-0.209
$^{133}\text{Cs}$	-0.003
$^{161}\text{Dy}$	+2.4
$^{179}\text{Lu}$	+8.0
$^{209}\text{Bi}$	-0.37

### 4.3.10 Misure dei momenti elettrici e magnetici dei nuclei

Nei nuclei ci sono quindi neutroni e protoni in movimento che danno luogo a densità di massa, di carica e di correnti. Nell'ipotesi che i campi elettrici e magnetici esterni in cui un nucleo si può trovare non perturbino le sue distribuzioni interne di cariche e correnti, l'energia globale del nucleo dipende anche dall'interazione dei suoi momenti elettrici e magnetici con questi campi esterni.

I campi esterni elettrici e magnetici possono essere quelli dovuti agli elettroni dell'atomo e/o della molecola cui il nucleo appartiene, o altri prodotti ad hoc.

I campi magnetici dovuti agli elettroni atomici sono orientati lungo la direzione del momento angolare totale dell'atomo. Anche il momento angolare e il momento magnetico del nucleo sono orientati lungo una stessa direzione, che per le note prescrizioni quantistiche derivanti dal rispetto del principio di indeterminazione non potrà però mai allinearsi esattamente alla precedente.

Campi magnetici ad hoc possono essere generati e controllati dagli sperimentatori, ma non superano intensità massime dell'ordine di poche decine di Tesla; quelli generati dagli elettroni atomici sono noti con minor precisione, ma possono essere molto più intensi. Le energie d'interazione con i momenti elettrici e magnetici nucleari perturbano i livelli di atomi e/o molecole generando la cosiddetta *struttura iperfine* delle linee spettrali atomiche o molecolari, spiegata da W. Pauli nel 1924 e la cui analisi sperimentale permette appunto di effettuare misure dei momenti nucleari.

Misure del momento  $d_n$  di dipolo elettrico del neutrone danno un limite superiore ( $d_n/e$ )  $< 3 \times 10^{-28}$  m, con  $e$  la carica elementare.

I valori dei momenti di quadrupolo elettrico misurati per i nuclidi sono compresi fra i +8 barn del  $^{176}\text{Lu}$  e  $-1.0$  barn del  $^{123}\text{Sb}$ . Introducendo la quantità

$$Q_{rid} = \frac{Q}{Ze \langle R \rangle^2} \quad (4.73)$$

detta *momento di quadrupolo ridotto* e dove  $\langle R \rangle$  è una sorta di raggio medio della distribuzione di carica, si agevola il confronto fra le entità delle deformazioni nucleari in funzione dei diversi numeri di massa.

Osservando in figura 4.19, la distribuzione dei momenti di quadrupolo elettrico ridotto di nuclei con  $A$  dispari, graficati in funzione del valore di  $N$ , si nota che il  $Q_{rid}$  dei nuclei con  $Z$  dispari e  $N$  pari dipende essenzialmente dal numero di protoni, mentre quello dei nuclei con  $Z$  pari ed  $N$  dispari dipende in segno dal numero di protoni e in valore assoluto dal numero di neutroni. Inoltre  $Q_{rid}$  cambia bruscamente valore tra coppie di nuclei adiacenti a nuclei con valori di  $Z$  ed  $N$  espressi da:  $Z^*, N^* = 2, 8, 20, 50, 82, 126$ , ovvero i *numeri magici* già incontrati nel paragrafo 4.2.



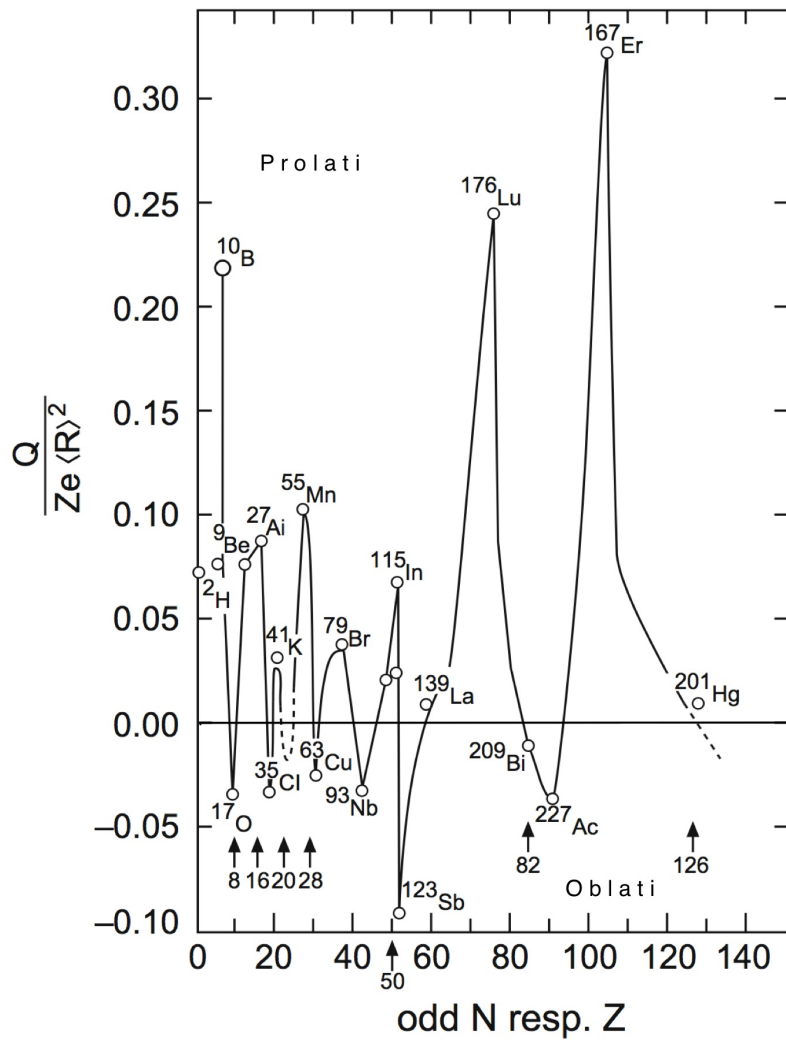


Figura 4.19:  $Q_{rid}$  di nuclei con  $A$  dispari in funzione di  $N$ . Il tratto continuo interpola i dati misurati, di cui è mostrato solo un sottoinsieme.

Dei momenti magnetici dei nuclei si tratterà ulteriormente parlando anche del "modello a shell".

### 4.3.11 Isospin

Come si vedrà più avanti gli esperimenti di diffusione su nuclei a bassa energia hanno messo in evidenza la stretta somiglianza tra le forze *neutrone – protone* e quelle *protone – protone*, così come anche l'analisi delle proprietà dei nuclei speculari, quali  ${}^3\text{H}$  ed  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^7\text{Li}$  e  ${}^7\text{Be}$ , ...

Le forze coulombiane sono diverse nei nuclei speculari, ma a parte questo i livelli energetici di nuclei speculari mostrano una considerevole somiglianza, come si osserva nelle figure 4.20 e 4.21.

I nuclei speculari con  $N = Z \pm 1$  hanno oltretutto masse molto simili,

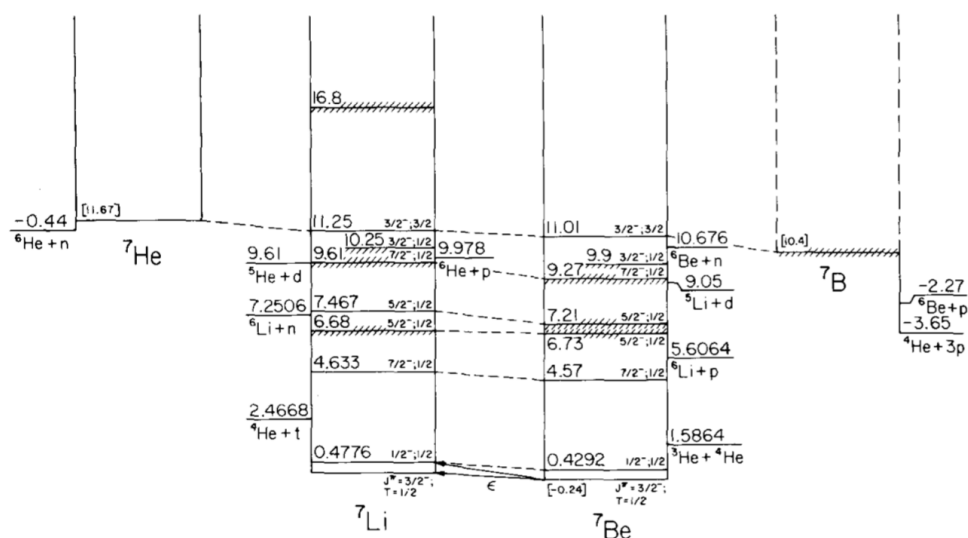


Figura 4.20: Livelli energetici dei nuclei speculari  ${}^7\text{He}$ ,  ${}^7\text{B}$ , e  ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^7\text{Be}$ .

a meno del contributo dovuto alle diverse energie elettrostatiche; la loro differenza in massa, a meno del termine  $c^2$ , è infatti espressa da

$$\Delta M = \frac{3}{5} \frac{(2Z+1)}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R_0 A^{1/3}} \quad (4.74)$$

come si deduce dal termine coulombiano della formula semi-empirica di Weizsäcker 4.50.

Per la precisione, la somiglianza fra i livelli dei nuclei speculari del tipo  $N = Z \pm 1$  suggerisce soltanto che vi sia "simmetria di carica", ovvero sostanziale equivalenza tra le forze  $n - n$  e quelle  $p - p$ . L'equivalenza più completa appare evidente analizzando anche nuclei con  $A$  pari quali  ${}^6\text{He}$ ,  ${}^6\text{Li}$ ,  ${}^6\text{Be}$ ,  ${}^8\text{Li}$ ,  ${}^8\text{Be}$ ,  ${}^8\text{B}$ , o  ${}^{14}\text{C}$ ,  ${}^{14}\text{N}$  e  ${}^{14}\text{O}$ , di cui si vedono alcuni livelli nelle figure 4.22 e 4.23. Le differenze tra i livelli si spiegano pressochè totalmente in base agli effetti coulombiani. Questi risultati suggerirono a Heisenberg, Coudon e Cassen, nel 1932, che le forze nucleari debbano essere considerate

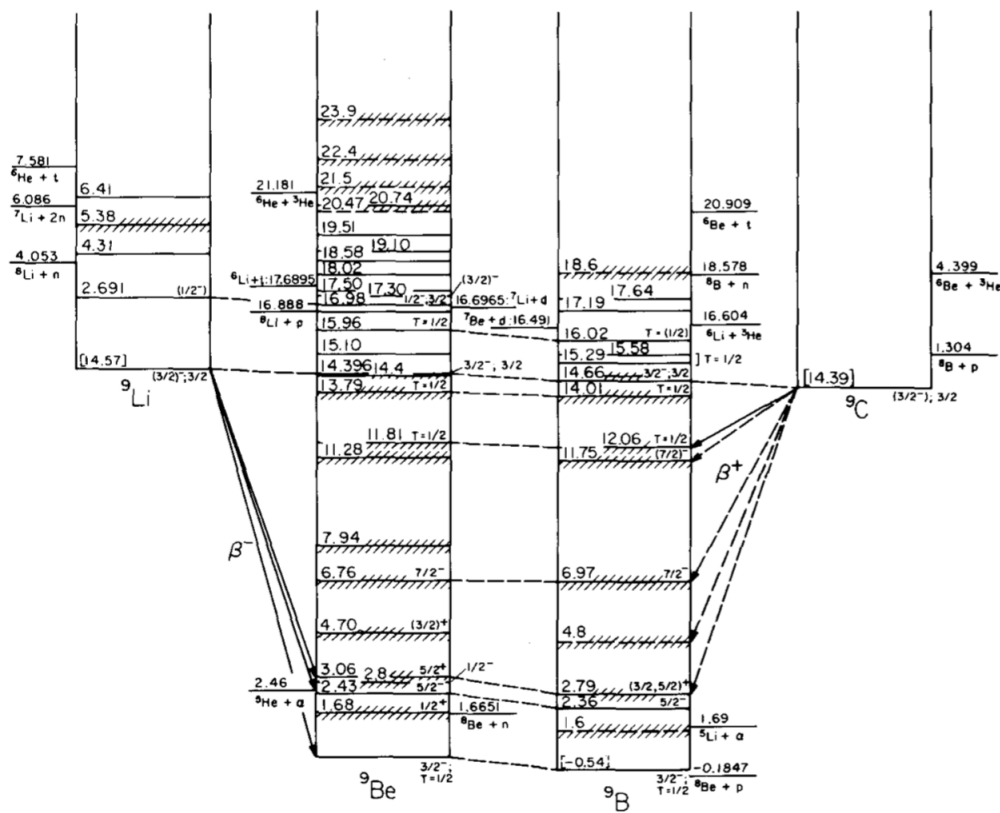


Figura 4.21: Livelli energetici dei nuclei speculari  ${}^9\text{Li}$ ,  ${}^9\text{C}$ , e  ${}^9\text{Be}$ ,  ${}^9\text{B}$ .

indipendenti dalla carica elettrica e che quindi, tolto l'effetto coulombiano, le interazioni fra  $n - p$ ,  $p - p$  e  $n - n$ , siano uguali (si trascura comunque, ad esempio, quanto dipende dalla leggera differenza in massa tra protone e neutrone). Questa ipotesi è più forte della pura simmetria di carica ma non dice nulla circa le forze  $n - p$ .

Per sfruttare le conseguenze di quest'ipotesi si è introdotto il formalismo del cosiddetto *spin isotopico* che permette di assegnare a ogni nucleone un ulteriore grado di libertà cui corrisponde una variabile detta *isospin* o appunto *spin isotopico*, che può assumere soltanto due valori, ed è dunque dicotomica, dovendosi limitare a differenziare tra protone e neutrone. Disponendo già di un modello di variabili dicotomiche per lo spin ordinario dei fermioni, se ne mutua in questo caso la struttura algebrica.

Partendo da un esempio specifico di nuclei speculari si presentano ora alcune caratteristiche della simmetria di isospin per i nuclei.

In figura 4.23 sono riportati i diagrammi dei livelli energetici di  ${}^{14}_6\text{C}_8$  e  ${}^{14}_8\text{O}_6$ , assieme a quelli di  ${}^{14}_7\text{N}_7$ .

Sono evidenti le somiglianze fra i livelli di  ${}^{14}_6\text{C}_8$  e  ${}^{14}_8\text{O}_6$ , sia per i numeri quantici  $J^P$  che nelle spaziature relative dei rispettivi livelli. Le piccole dif-

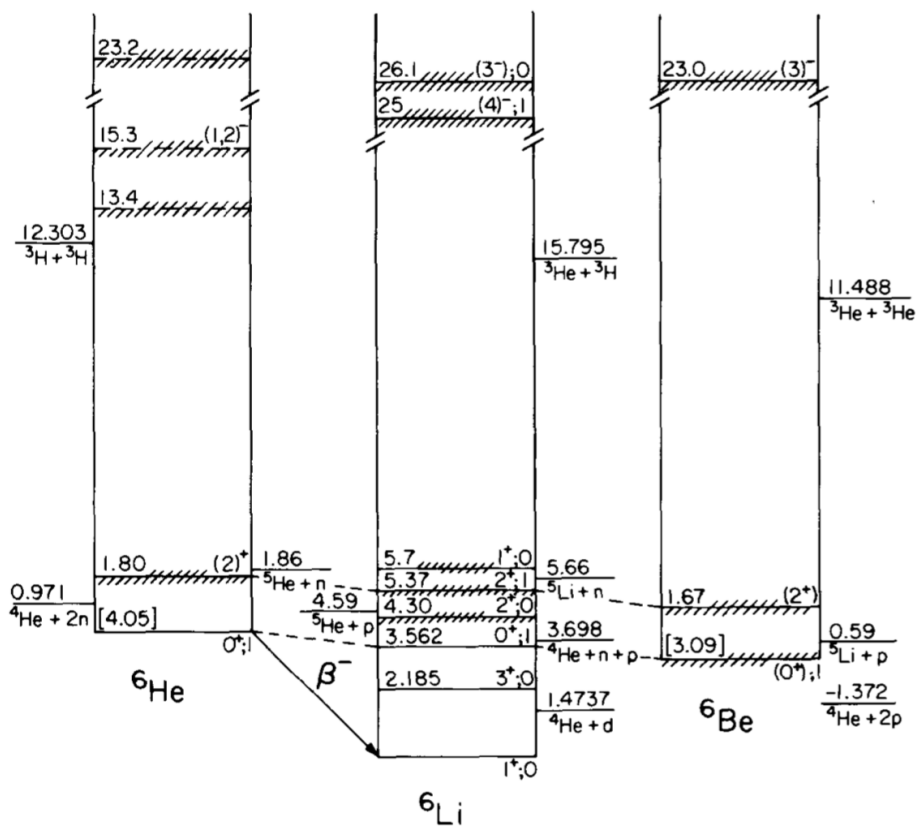


Figura 4.22: Livelli energetici dei nuclei  ${}^6\text{He}$ ,  ${}^6\text{Li}$ ,  ${}^6\text{Be}$ .

ferenze residue e la traslazione globale quasi rigida dei livelli di  ${}^{14}_8\text{O}_6$  a valori superiori rispetto a quelli di  ${}^{14}_6\text{C}_8$ , sono spiegabili con i diversi contributi coulombiani all'energia per i due nuclei.

Livelli energetici equivalenti a quelli di  ${}^{14}_6\text{C}_8$  e  ${}^{14}_8\text{O}_6$  sono presenti anche nell'isobaro  ${}^{14}_7\text{N}_7$ , che possiede però anche altri livelli che non trovano corrispondenza con quelli dei due nuclei adiacenti. Si può distinguere fra stati di *tripletto* e stati di *singoletto*.

Questi *multipletti* di stati mostrano una chiara analogia formale con i multipletti degli accoppiamenti di spin. Protoni e neutroni possono quindi, come suggerito da Heisenberg nel 1932, essere visti come due diversi stati di una medesima entità, il *nucleone*, e formano un doppietto di isospin ( $I = 1/2$ ), per le cui terze componenti si pone

$$\begin{cases} \text{protone:} & I_3 = +1/2 \\ \text{neutrone:} & I_3 = -1/2 \end{cases} \quad (4.75)$$

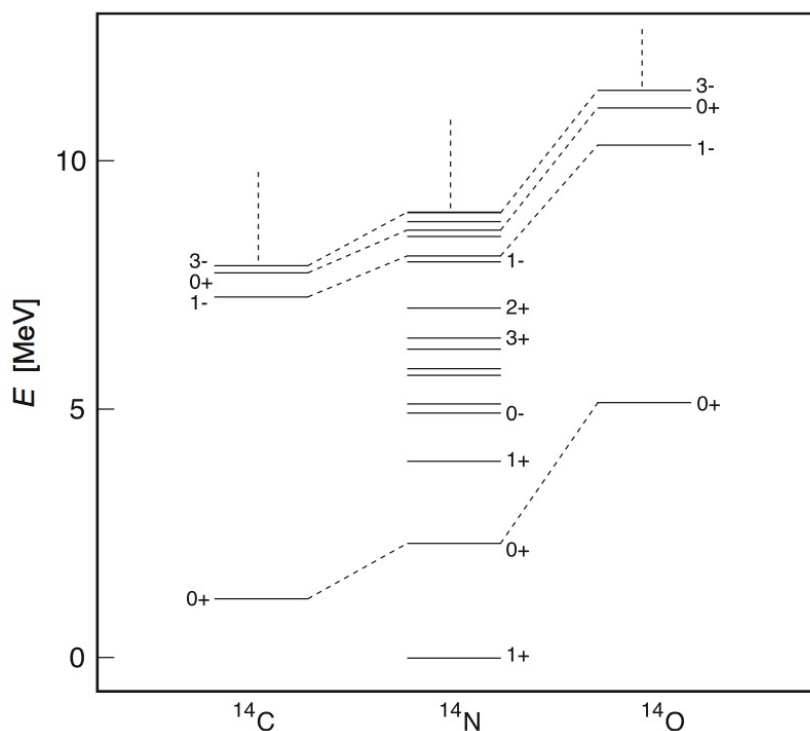


Figura 4.23: Livelli energetici dei nuclei speculari  ${}^{14}_6\text{C}_8$  e  ${}^{14}_8\text{O}_6$ .

Essi sono quindi autostati degli operatori  $I^2$  e  $I_3$

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

La sostanziale indipendenza dell'interazione nucleare dalla carica elettrica si traduce così in una legge di conservazione, ovvero una proprietà di simmetria per cui

- l'isospin si conserva nelle interazioni nucleari;
- l'hamiltoniana d'interazione nucleare commuta con l'operatore di isospin ed è invariante per le trasformazioni generate da  $\vec{I}$ , cioè le rotazioni nello spazio dell'isospin.

La carica elettrica  $q_N$  di un nucleone è legata alla sua terza componente dell'isospin dalla relazione

$$q_N = 1/2 + I_3 \quad (4.77)$$

per cui la conservazione della carica elettrica equivale alla conservazione della terza componente  $I_3$  dell'isospin.

La conservazione dell'isospin  $\vec{I}$ , ovvero l'indipendenza dalla carica elettrica, ha un valore più forte della semplice conservazione della carica elettrica.

Si ricordi comunque che l'isospin è un numero quantico *adimensionale*. La trattazione formale dell'isospin corrisponde così a quella del momento angolare per cui si può ad esempio avere il caso di una coppia protone-neutrone in uno stato di isospin totale pari ad 1 o a 0. La terza componente dell'isospin è additiva e per un nucleo si ha

$$I_3^{nucleo} = \sum I_3^{nucleoni} = \frac{Z - N}{2} \quad (4.78)$$

Questo aiuta nel descrivere gli stati simili che compaiono in figura 4.23 assegnando rispettivamente  $I_3 = -1$ , al nucleo  ${}^{14}_6\text{C}_8$ , e  $I_3 = +1$ , al nucleo  ${}^{14}_8\text{O}_6$ : il loro isospin non può quindi essere minore di  $I = 1$ , per cui gli stati in questi nuclei appartengono necessariamente a un tripletto di stati simili nei nuclei  ${}^{14}_6\text{C}_8$ ,  ${}^{14}_7\text{N}_7$  e  ${}^{14}_8\text{O}_6$ . Siccome però la terza componente  $I_3$  dell'isospin di  ${}^{14}_7\text{N}_7$  è pari a 0, ne deriva che questo nucleo può possedere stati addizionali con isospin  $I = 0$ .

L'azoto  ${}^{14}_7\text{N}_7$  è il più stabile isobaro con  $A = 14$  e quindi il suo stato fondamentale è necessariamente un singoletto di isospin, perchè se non fosse così  ${}^{14}_6\text{C}_8$  dovrebbe possedere uno stato analogo che però, per la minor repulsione coulombiana, dovrebbe essere a un'energia inferiore e quindi più stabile.

In figura 4.23 non sono mostrati stati con  $I = 2$ , che dovrebbero in linea di principio avere stati analoghi in  ${}^{14}_5\text{B}_9$  e  ${}^{14}_9\text{F}_5$ . Questi nuclei sono però molto instabili e i loro livelli stanno oltre il limite energetico mostrato in figura 4.23.

Gli isobari di  $A = 14$  sono nuclei in cui l'effetto dell'energia coulombiana non è particolarmente intenso. L'influenza dell'energia coulombiana cresce al crescere del numero atomico  $Z$ , perturbando sempre più le caratteristiche di simmetria di isospin.

L'isospin riveste un ruolo importante anche nella descrizione del comportamento delle particelle e delle strutture sub-nucleari, i quark che come si vedrà possono essere classificati in multipletti di isospin<sup>19</sup>.

L'isospin è inoltre un buon numero quantico per la descrizione dei processi dinamici coinvolgenti le interazioni forti, nel corso dei quali appunto, l'isospin del sistema si conserva.

### 4.3.12 Ricapitolando

Di solito a questo punto si passa alla presentazione e discussione dei modelli di struttura nucleare quali quello a gas di Fermi, o a shell, ..., per mostrare come essi ben spieghino molti risultati sperimentali degli studi a bassa e media energia sui nuclei.

Qui, con un approccio simile a quello seguito nel testo di Povh et al., e

<sup>19</sup>Si vedano i capp. ... e ...

sostanzialmente più coerente con le attuali conoscenze sulle caratteristiche dell'interazione forte e delle sue manifestazioni nucleari, si preferisce rimandare la discussione e presentazione di tali argomenti a dopo l'aver trattato quanto concerne la fisica delle particelle e in particolare le interazioni forti e la struttura dei nucleoni.

Del resto il concetto veramente importante che per ora è sufficiente ritenere, come risultato delle evidenze sperimentali sinora illustrate in merito ai nuclei atomici e alla loro struttura, è il fatto che essi costituiscono sistemi legati di nucleoni, carichi e neutri, gli uni di massa pressochè uguale a quella degli altri, che essendo fermioni ubbidiscono al principio di esclusione e interagiscono con una forza che presenta caratteristiche di brevissimo range manifestando saturazione.

Inoltre le regolarità individuate, come ad esempio quelle associabili all'emergere in diverse situazioni dei cosiddetti "numeri magici", fanno pensare che tali nucleoni siano organizzati nei vari nuclei su livelli energetici secondo uno schema in parte mutuabile da quello che spiega la struttura atomica, con la differenza che mentre nell'atomo il potenziale che determina la struttura dei livelli è quello dovuto alla carica elettrica dei protoni concentrata nel nucleo, nel caso del nucleo il potenziale è quello determinato dall'insieme degli stessi nucleoni del nucleo che si muovono dunque in esso soggetti al potenziale che essi stessi determinano.