

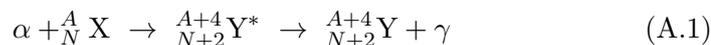
Appendice A

La scoperta del neutrone

Per una piena comprensione della storia della scoperta del neutrone riportata in quest'Appendice, è utile aver letto anche il primo e il quarto capitolo di queste dispense.

Nel 1930, W.Bothe ed H.Becker osservarono che se le particelle α emesse dal polonio con energie cinetiche dell'ordine dei 5 MeV¹, vengono fatte incidere su alcuni elementi leggeri quali ${}^9_4\text{Be}$, ${}^{11}_5\text{B}$ o ${}^7_3\text{Li}$, si osservava la produzione di una inusuale radiazione molto penetrante. Il berillio risultava il bersaglio più efficace in quanto, a parità di intensità di particelle α incidenti, forniva i fasci più intensi della nuova radiazione.

Questa non risultava poi sensibile all'azione di campi elettrici e per questo si pensò potesse trattarsi di radiazione γ , secondo uno schema di reazione



ma non si conoscevano radiazioni γ così penetranti, e vi erano inoltre dei dettagli dei risultati sperimentali di difficile interpretazione, supponendo si trattasse di raggi γ .

Due anni dopo I.Joliot-Curie e F.Joliot mostrarono che tale nuova radiazione era in grado di attraversare spessori di materiali pesanti quali il piombo, anche tre volte superiori a quanto potessero fare i raggi γ più energetici emessi dalle sorgenti radioattive note. Ponendo inoltre paraffina o altri bersagli idrogenati sul percorso della radiazione penetrante sconosciuta, questa estraeva da tali bersagli, protoni con energie cinetiche fino a ≈ 5.3 MeV.

Ciò poteva apparire non inconsistente con l'ipotesi di γ incidenti che diano luogo a diffusione Compton, ma le energie richieste a tali γ dovrebbero essere irrealisticamente grandi, dell'ordine di circa 50 MeV, per estrarre dai nuclei protoni con energie cinetiche fino a ≈ 5.3 MeV, ovvero con impulsi fino a ≈ 100 MeV/c. Ettore Majorana congetturò che il tipo di interazione

¹L'isotopo ${}^{208}\text{Po}$, con una vita media di 2.9 anni, emette α da 5.21 MeV; l'isotopo ${}^{209}\text{Po}$, con una vita media di 103 anni, emette α da 4.98 MeV; l'isotopo ${}^{210}\text{Po}$, con una vita media di 138.4 giorni, emette α da 5.41 MeV.

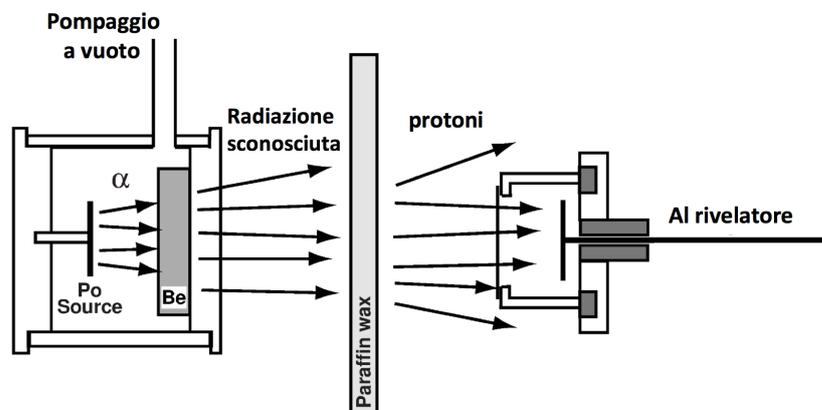


Figura A.1: Schema delle misure dei coniugi Joliot-Curie e di Chadwick.

che aveva luogo fra la nuova radiazione e i protoni, richiedeva che la prima fosse costituita da particelle neutre e non da γ .

Sulla scorta dei risultati ottenuti dai coniugi Joliot-Curie, J. Chadwick riprodusse le misure con paraffina e con altri bersagli idrogenati, quindi ricchi di protoni bersaglio, misurando il range dei protoni prodotti.

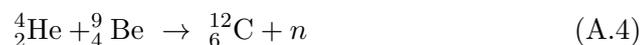
Egli osservò che l'ipotesi di avere γ da ≈ 50 MeV contrastava con l'applicazione della conservazione dell'energia alle reazioni coinvolte nelle misure sperimentali



in quanto

$$c^2 \left[M_\alpha + M({}^9_4\text{Be}) - M({}^{13}_6\text{C}) \right] \simeq 3727.4 + 8392.8 - 12109.6 \simeq 11 \text{ MeV} \quad (\text{A.3})$$

mentre invece le conservazioni di energia e impulso risultavano soddisfatte ipotizzando che nella reazione fosse prodotta una particella neutra di massa simile a quella del protone



per cui

$$\begin{aligned} c^2 \left[M_\alpha + M({}^9_4\text{Be}) - M({}^{12}_6\text{C}) - M_n \right] &\simeq \\ &\simeq 3727.4 + 8392.8 - 11175.0 - M_n c^2 \simeq (945.2 - M_n c^2) \text{ MeV} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

da cui si ottiene che se $M_n = M_p$ allora l'energia cinetica massima della particella neutra n prodotta è pari a $\simeq 6$ MeV.

Chadwick provò così che i risultati ottenuti non erano consistenti col fatto che la nuova radiazione fosse costituita da raggi γ , in quanto ciò avrebbe

comportato la violazione della conservazione di energia e impulso, mentre erano invece consistenti con l'avvenuta produzione di particelle di massa sostanzialmente equivalente a quella dei protoni, ma elettricamente neutre, come congetturato da Majorana, ovvero i neutroni.

Appendice B

Momenti elettrici dei nuclei

Si deducono ora i momenti elettrici di una distribuzione classica di carica che simuli quella possibile per un nucleo, assumendo come direzione di riferimento z quella di un opportuno campo elettrico esterno.

Il potenziale elettrostatico nel punto P, posto a distanza s dal centro di massa O del nucleo e dovuto a un protone situato a distanza r da O è, come desumibile dalla figura B.1

$$V(r, \vartheta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{L(r, \vartheta)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} e (s^2 + r^2 - 2rs \cos\vartheta)^{-1/2} \quad (\text{B.1})$$

Sviluppando il termine $\frac{1}{L(r, \vartheta)}$ nell'ipotesi che sia $r/s \ll 1$, si ha

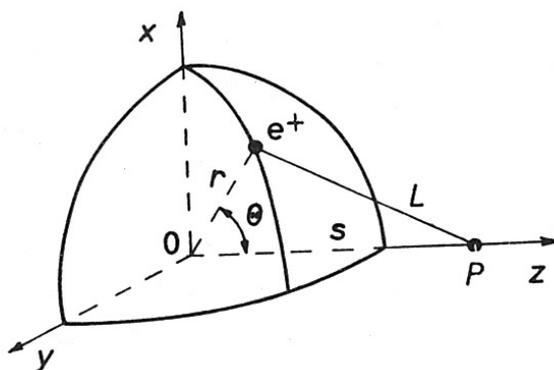


Figura B.1: Configurazione geometrica per il calcolo del multipolo elettrico.

$$\frac{1}{L(r, \vartheta)} = \frac{1}{s} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2r}{s} \cos\vartheta - \frac{r^2}{s^2} \right) + \dots \right] \quad (\text{B.2})$$

e raccogliendo opportunamente, la B.1 diventa

$$V(r, \vartheta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e r^n}{s^{n+1}} P_n(\cos\vartheta) \quad (\text{B.3})$$

dove $P_n(\cos\vartheta)$ sono i polinomi di Legendre, come in 8.16 Per $n = 0$, $V(r, \vartheta)$ si riduce al potenziale coulombiano nel punto P dovuto alla carica protonica $+e$ posta nell'origine O . Ogni termine corrispondente ad $n \neq 0$ nella B.3 rappresenta il potenziale elettrostatico classico di 2^n -polo

$$V^{(n)}(r, \vartheta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e r^n}{s^{n+1}} P_n(\cos\vartheta) \quad (\text{B.4})$$

Dalla B.3 si ha dunque che il potenziale in P dovuto a una carica elettrica posta nel punto (r, ϑ) rispetto all'origine O , coincide con la somma del potenziale prodotto dalla stessa carica come se fosse in O con quello dovuto a un sistema di 2^n -poli. Il valor medio di $V(r, \vartheta)$ coincide col potenziale coulombiano $V_C(r) = e/4\pi\epsilon_0 s$, in quanto per $n \neq 0$, si ha

$$\langle V^{(n)} \rangle = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e r^n}{s^{n+1}} \int_0^\pi P_n(\cos\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta = 0 \quad (\text{B.5})$$

I momenti classici di dipolo ($n = 1$) e di quadrupolo ($n = 2$) dovuti a una singola carica elettrica sono definiti come

$$\begin{aligned} d(r, \vartheta) &= er P_1(\cos\vartheta) = ez \\ q(r, \vartheta) &= e2r^2 P_2(\cos\vartheta) = e(3z^2 - r^2) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Nel caso della distribuzione $\rho_Z(\vec{r})$ di carica di un nucleo con Z protoni normalizzata in modo che

$$\int \rho_Z(\vec{r}) d\vec{r} = Ze \quad (\text{B.7})$$

si ha, per i relativi momenti di dipolo e quadrupolo,

$$\begin{aligned} D &= \int z' \rho_Z(\vec{r}') d\vec{r}' \\ Q &= \int (3z'^2 - r'^2) \rho_Z(\vec{r}') d\vec{r}' \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

dove l'apice indica che le variabili coprono il volume strettamente occupato dalla carica. Quindi il momento di dipolo elettrico è una quantità omogenea a una lunghezza, tipicamente espresso in fermi (fm), e quello di quadrupolo è omogeneo a una superficie, tipicamente espresso in barn.

Si veda ora "classicamente" la relazione esistente tra la forma della distribuzione di carica del nucleo e il suo momento elettrico. Si supponga a tale scopo, sempre classicamente che lo spin \vec{J} del nucleo sia completamente orientato nella direzione dell'asse z e che per il moto di rotazione la forma del nucleo, diversa da quella sferica, sia riconducibile almeno in prima approssimazione, a quella di un ellissoide di rotazione di equazione

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (\text{B.9})$$

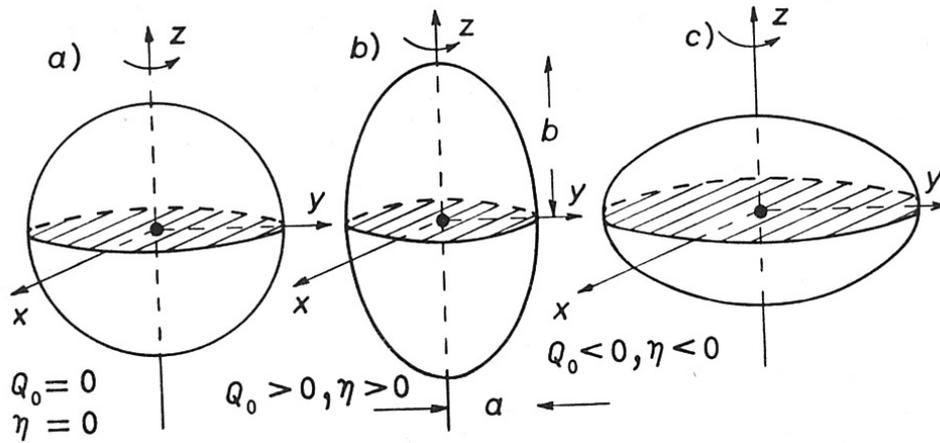


Figura B.2: Possibili deformazioni per una distribuzione di carica.

come illustrato in figura B.2. Si supponga anche che la carica elettrica del nucleo sia uniformemente distribuita nel volume $V = 4\pi a^2 b/3$ dell'ellissoide di rotazione, per cui la densità si esprime classicamente come

$$\begin{cases} \rho_Z(\vec{r}) = \frac{Ze}{V} = \frac{3Ze}{4\pi a^2 b} & , \text{ per } -a \leq x \leq a \quad -a \leq y \leq a \quad -b \leq z \leq b \\ \rho_Z(\vec{r}) = 0 & , \text{ per } x > a \quad y > a \quad z > b \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

e sostituendo per i momenti di dipolo e quadrupolo si ottiene

$$\begin{aligned} D_c &= \frac{3Ze}{4\pi a^2 b} \int z' d\vec{r}' = 0 \\ Q_c &= \frac{3Ze}{4\pi a^2 b} \int (3z'^2 - r'^2) d\vec{r}' = \frac{2}{5} Ze (b^2 - a^2) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

dove il pedice "c" sottolinea che i risultati sono in ambito classico. Ponendo

$$R = \frac{1}{2}(b+a) \quad , \quad \eta = \frac{1}{2}(b-a)$$

si riscrive il momento di quadrupolo come

$$Q_c = \frac{8}{5} Ze\eta R \quad (\text{B.12})$$

da cui: se $\eta = 0$ allora $a = b$, il nucleo ha simmetria sferica e possiede momento di quadrupolo nullo; se $\eta > 0$ allora $b > a$, il momento di quadrupolo è positivo e il nucleo ha la forma di un ellissoide allungato secondo l'asse di rotazione; se $\eta < 0$ allora $b < a$, il momento di quadrupolo è negativo e il nucleo ha la forma di un ellissoide schiacciato rispetto all'asse di rotazione, come mostrato nelle figure B.2 a), b) e c).

Quanto indicato dalla prima delle B.11, ovvero che sia nullo il momento di dipolo elettrico per una distribuzione di carica, e quindi per un nucleo, con simmetria sferica rispetto al piano equatoriale $z = 0$, è classicamente ovvio, dato che la densità di carica è una funzione pari della posizione $\rho_Z(\vec{r}) = \rho_Z(-\vec{r})$, mentre z è dispari su tutto lo spazio in cui si integra per il calcolo di D .

I risultati sperimentali non contraddicono quanto trovato con l'approccio classico, ma ve ne sono che non trovano una spiegazione classica, in particolare si trova che il livello fondamentale di un nucleo può avere momento di quadrupolo elettrico nullo anche se la sua distribuzione di carica non ha simmetria sferica, ovvero se il suo momento angolare totale \vec{J} non è nullo. Si trova infatti che è nullo il momento di quadrupolo elettrico anche per i nuclei con $J = 1/2$.

Per una corretta trattazione quantistica da cui discenda anche questo risultato si definisca il valore del multipolo elettrico di un nucleo come il valor medio dell'operatore di multipolo elettrico, calcolato sullo stato che possiede il massimo valore possibile della proiezione J_z del momento angolare totale lungo la direzione z del campo esterno di riferimento.

Classicamente si è trovato che momenti di dipolo o di quadrupolo diversi da zero implicano una simmetria non sferica per la distribuzione di carica, ovvero richiedono $\vec{J} \neq 0$. Quantisticamente i diversi momenti di multipolo elettrico di un nucleo sono proporzionali a

$$Ze \int \psi_J^{*m}(\vec{r}') r'^\ell P_\ell(\cos\vartheta') \psi_J^m(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (\text{B.13})$$

con $\psi_J^m(\vec{r})$ autofunzione del momento angolare sul valore massimo possibile $m = J$. Se dunque le forze nucleari conservano la parità, un nucleo con stato fondamentale non degenere¹ deve avere momento di dipolo elettrico nullo, come si era visto anche classicamente.

Da quanto detto è anche chiaro che un nucleo con $\vec{J} = 0$ non può avere neppure momento di quadrupolo elettrostatico, infatti in questo caso $\ell = 2$ ed $m = 0$, e di conseguenza $|\psi_0^0|^2$ ha simmetria sferica, per cui

$$\begin{aligned} Q &\propto Ze \int |\psi_0^0|^2 r'^2 P_2(\cos\vartheta') d\vec{r}' = \\ &= Ze \int_0^\infty r'^4 |\psi_0^0|^2 \int P_2(\cos\vartheta') d\Omega' dr' = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

e anche questo combacia col risultato classico.

Si ricordi che per $\ell \neq 0$ si ha anche $\int P_\ell(\cos\vartheta') d\Omega' = 0$.

¹La funzione d'onda di uno stato degenere è esprimibile come combinazione lineare di autovettori differenti e linearmente indipendenti, quindi di fatto mescola stati diversi.

Quantisticamente si può però verificare che il momento di quadrupolo elettrico di un nucleo sia nullo anche nel caso in cui $J = 1/2$, risultato classicamente non prevedibile. Lo si può capire intuitivamente immaginando di cercare di fare in modo che l'integrale in $d\Omega'$ risulti $\neq 0$. L'integrando contiene $P_2(\cos\vartheta')$, che corrisponde al momento angolare orbitale $\ell = 2$. Per rendere non nullo l'integrale in $d\Omega'$ bisogna riuscire a costruire uno scalare, ovvero un invariante per rotazioni, utilizzando $\vec{\ell}$ e i momenti angolari totali delle funzioni d'onda iniziale e finale, che valgono entrambi \vec{J} , bisogna cioè che possa essere

$$\vec{\ell} + \vec{J} + \vec{J} = 0 \quad (\text{B.15})$$

Poichè però $\ell = 2$ e $J = 1/2$, $2J$ può al massimo valere 1, e di conseguenza $1 \leq (\ell + 2J) \leq 3$, escludendo la possibilità che sia $L + 2J = 0$. Quindi i nuclei pari-pari ($J = 0$), assieme ai pari-dispari e ai dispari-pari con $J = 1/2$, hanno momento di quadrupolo elettrico nullo, anche se ciò non significa necessariamente che i nuclei con $J = 1/2$ abbiano una distribuzione di carica a simmetria perfettamente sferica, ma semplicemente che è nulla la massima componente osservabile del loro momento di quadrupolo Q .

Quindi un nucleo mostra momenti di quadrupolo elettrici non nulli solo per valori $J \geq 1$.

Quanto qui discusso vale per i cosiddetti momenti "statici" dei nuclei, quelli cioè che caratterizzano un nucleo nel suo stato fondamentale. Quando diversamente si considerano i casi di nuclei in condizioni eccitate che effettuano transizioni radiative fra diversi livelli energetici, non valgono le stesse condizioni restrittive.