

## Capitolo 6

# Statistica dei decadimenti radioattivi

Tre anni dopo il 1896, anno in cui Becquerel scoprì la radioattività, si osservò che il rateo di decadimento di una sostanza radioattiva pura decresce, col passare del tempo, in accordo con un andamento esponenziale decrescente. Ci vollero altri anni per assodare che la radioattività è un fenomeno che coinvolge ogni singolo atomo di una certa sostanza, e non il campione di sostanza radioattiva in quanto tale nella sua interezza.

Un'ulteriore paio d'anni furono quindi necessari per convincersi che il decadimento radioattivo di un atomo è un processo intrinsecamente statistico, e che sostanzialmente gli atomi di una sostanza, anche radioattivi, "non invecchiano". È quindi impossibile predire quando uno specifico atomo deva decadere e ciò conduce naturalmente alla legge di tipo esponenziale decrescente col tempo.

Considerando processi che coinvolgono grandi numeri di atomi li si può trattare alla stregua di variabili continue e supposto un sistema costituito da un gran numero di atomi radioattivi, la legge di decadimento fornisce il numero medio di atomi del sistema ad un qualsiasi istante successivo.

I primi a formulare e applicare coerentemente la legge che descrive il decadimento di sostanze radioattive furono Rutherford e Soddy nel 1902.

### 6.1 Decadimento radioattivo di una sola sostanza

Dato un qualsiasi atomo, la probabilità che esso decada nell'intervallo di tempo  $dt$  è proporzionale a  $dt$  moltiplicato per una costante  $\lambda$ , detta *costante o probabilità di decadimento*, le cui dimensioni sono l'inverso di un tempo, che risulta indipendente dall'età dell'atomo ed è caratteristica della sostanza e del tipo di decadimento.

Questa legge si applica indifferentemente a ogni tipo di decadimento radioattivo:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , cattura elettronica, fissione spontanea.

Supposto di avere inizialmente un numero molto grande  $N(0)$  di atomi di una singola sostanza radioattiva, che ogni singolo decadimento radioattivo sia indipendente da tutti gli altri e considerando il numero residuo  $N(t)$  di atomi di tale sostanza ad un istante successivo  $t$  alla stregua di una variabile continua, dalla legge del decadimento si ha che la diminuzione  $-dN$  di atomi nell'intervallo di tempo  $dt$  sarà data da

$$-dN(t) = \lambda N(t)dt \quad (6.1)$$

Integrando quest'equazione tenendo conto del numero  $N(0)$  di atomi presenti all'istante iniziale, si ha

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t} \quad (6.2)$$

L'inverso della costante di decadimento,  $\tau = 1/\lambda$  è detto *vita media* in quanto costituisce effettivamente il tempo medio  $\langle t \rangle$  di vita degli atomi. Si osservi infatti che se

$$\frac{\lambda N(t)}{N(0)} = \frac{\lambda N(0)e^{-\lambda t}}{N(0)} = \lambda e^{-\lambda t} \quad (6.3)$$

rappresenta la funzione di distribuzione statistica dei tempi di vita di ogni atomo della sostanza radioattiva, si ha, per il loro tempo medio  $\langle t \rangle$  di vita

$$\langle t \rangle = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} = \tau \quad (6.4)$$

Si utilizza spesso anche il cosiddetto *tempo di dimezzamento* della sostanza radioattiva, definito come il tempo  $T_{1/2}$  necessario a far ridurre alla metà il numero di atomi rispetto a quelli presenti inizialmente

$$N(T_{1/2}) = N(0)e^{-T_{1/2}/\tau} = \frac{N(0)}{2} \quad \text{da cui}$$

$$\frac{T_{1/2}}{\tau} = \lambda T_{1/2} = \ln 2 \quad \implies \quad T_{1/2} = \tau \ln 2 \simeq 0.693147 \cdot \tau \quad (6.5)$$

Il numero o *rateo* di decadimenti nell'unità di tempo, detto anche *attività*  $\mathcal{A}(t)$  della sostanza radioattiva, si ottiene dalle 6.1 e 6.2:

$$\mathcal{A}(t) = \left| \frac{dN(t)}{dt} \right| = \lambda N(t) = \lambda N(0)e^{-\lambda t} \quad (6.6)$$

ed è chiaramente anch'esso una funzione decrescente col tempo, dato che al suo trascorrere il numero di atomi non ancora decaduti e che possono quindi decadere, cala.

L'unità di misura internazionale dell'attività è il Becquerel (Bq)<sup>1</sup>, corrispondente a 1 disintegrazione al secondo. È ancora molto usato anche il Curie (Ci), corrispondente a  $3.7 \cdot 10^{10}$  Bq.

<sup>1</sup>Antoine Henri Becquerel condivise con Pierre e Maria Curie il Nobel per la fisica nel 1903 "in riconoscimento degli straordinari servizi che ha reso con la sua scoperta della radioattività spontanea".

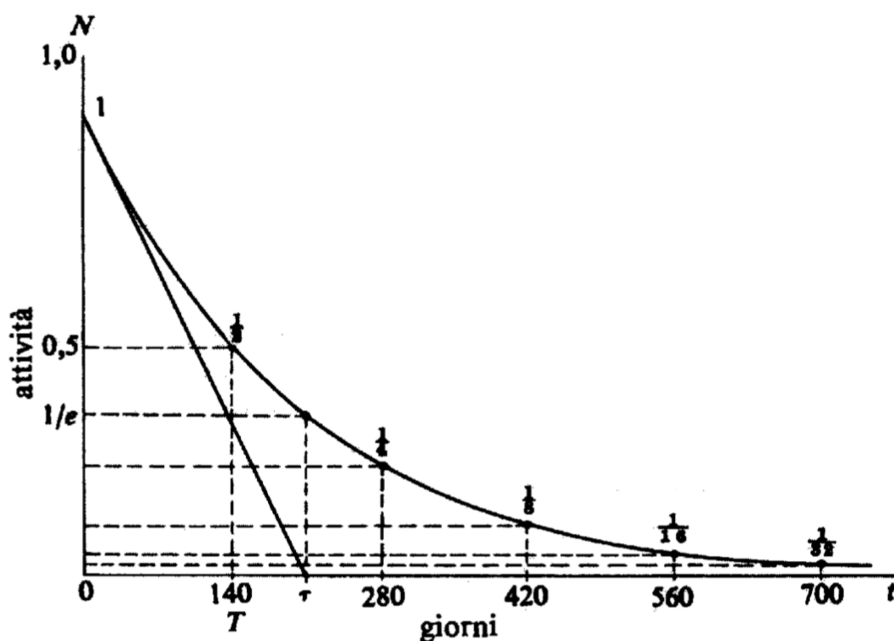


Figura 6.1: Decadimento d'una sostanza radioattiva con tempo di dimezzamento  $T_{1/2} = 140$  giorni. La tangente a  $N(t)$  nel punto d'ascissa  $t = 0$ , interseca l'asse  $t$  nel punto di valore  $\tau$ .

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ Bq}$$

Una certa sostanza radioattiva può mostrare diversi meccanismi indipendenti e competitivi di decadimento, detti anche *canali di decadimento*, ognuno caratterizzato da una ben definita costante  $\lambda_i$ , originando così diverse sostanze figlie. Esempi ne sono le catene di disintegrazioni radioattive naturali e quelle di decadimenti beta successivi che caratterizzano alcuni frammenti di fissione, come mostrato ad esempio in figura 6.2. Supposto che per una sostanza vi siano  $n$  diversi e indipendenti canali di decadimento, la sua probabilità totale  $\lambda_{tot}$  di decadimento, essendo additive le probabilità di eventi fra loro indipendenti, è data da

$$\lambda_{tot} = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tau_i} = \frac{1}{\tau_{tot}} \quad (6.7)$$

Un processo di decadimento con  $n > 1$  viene anche detto *diramazione*, e il rapporto fra le quantità di due diversi tipi  $i$  e  $j$  di prodotti di decadimento associati a due diversi canali, in un certo intervallo di tempo, è detto *rapporto di diramazione (branching ratio) relativo* e coincide col rapporto fra le rispettive costanti di decadimento,  $\lambda_i/\lambda_j$ .

## 6.2 Decadimento radioattivo di più sostanze

Una sostanza radioattiva può come detto decadere in un'altra anch'essa radioattiva e in tal caso le due si dicono in relazione genetica, con la prima chiamata *genitore* e la seconda *figlia*. Ciò può estendersi a molte "generazioni".

Si supponga di avere al tempo  $t = 0$ ,  $N_1(0)$  ed  $N_2(0)$  atomi delle sostanze radioattive (1) e (2), in relazione genetica. Se ne vogliono trovare le quantità  $N_1(t)$  ed  $N_2(t)$  presenti nel generico istante  $t$  successivo. La sostanza

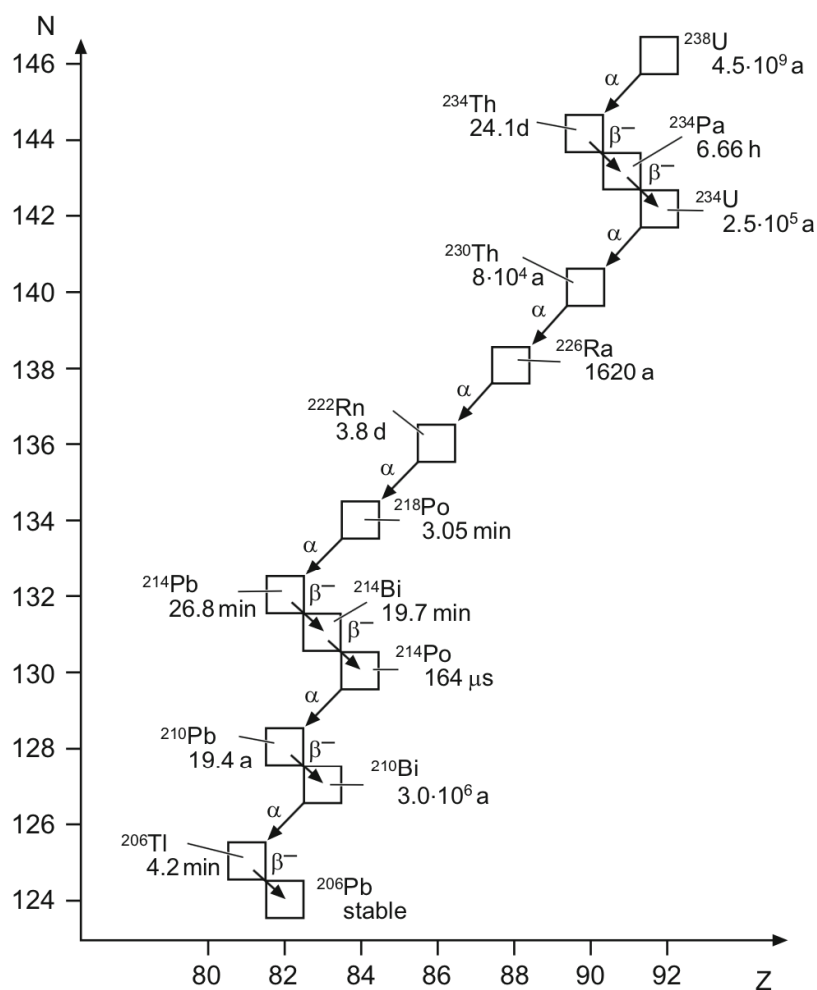


Figura 6.2: Famiglia radioattiva naturale dell' $U^{238}$ .

(1) decade secondo la legge

$$dN_1 = -N_1 \lambda_1 dt \quad (6.8)$$

e per ogni suo atomo decaduto se ne forma uno della sostanza (2). Il numero di atomi della sostanza (2) quindi varia per due ragioni: da un lato diminuisce per i decadimenti spontanei degli atomi della sostanza (2), dall'altro cresce per effetto della formazione di atomi della sostanza (2) come prodotto del decadimento di atomi della sostanza (1). La variazione totale risultante è quindi:

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \quad (6.9)$$

con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  le costanti di decadimento delle due sostanze.

Per una terza sostanza derivante dal decadimento di (2) si ha, in modo analogo:

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3 \quad (6.10)$$

e così via.

Considerando  $k$  diverse generazioni in cascata si ha un sistema di  $k$  equazioni differenziali che può essere risolto ponendo:

$$\begin{cases} N_1 = a_{11}e^{-\lambda_1 t} \\ N_2 = a_{21}e^{-\lambda_1 t} + a_{22}e^{-\lambda_2 t} \\ \dots \\ N_k = a_{k1}e^{-\lambda_1 t} + a_{k2}e^{-\lambda_2 t} + \dots + a_{kk}e^{-\lambda_k t} \end{cases} \quad (6.11)$$

Le costanti  $a_{ij}$  vanno determinate in modo che le 6.11 soddisfino le equazioni differenziali e le condizioni iniziali  $N_i(0)$ . Sostituendo le 6.11 in 6.8, 6.9, 6.10, ecc. si ottiene la seguente formula di ricorrenza, valida per i coefficienti  $a_{ij}$  con indici  $i \neq j$

$$a_{ij} = a_{i-1,j} \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}}{(\lambda_1 - \lambda_j)(\lambda_2 - \lambda_j) \dots (\lambda_{i-1} - \lambda_j)} a_{11} \quad (6.12)$$

I coefficienti con indici uguali si ricavano dalla condizione

$$N_i(0) = a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{ik} \quad (6.13)$$

Nel caso vi siano costanti di disintegrazione  $\lambda$  fra loro uguali, la 6.11 va modificata sostituendo, agli esponenziali con ugual valore di  $\lambda$ , termini della forma  $te^{-\lambda t}$ ,  $t^2 e^{-\lambda t}$ , ... .

Ogni espressione della 6.11 contiene una somma d'esponenziali in cui compaiono le costanti di disintegrazione di tutte le sostanze che precedono quella considerata.

Alcuni casi specifici di condizioni iniziali hanno notevole importanza pratica. Si consideri il caso in cui all'inizio è presente la sola sostanza 1 con  $N_1(0)$

atomi. Applicando direttamente le 6.11, 6.12 e 6.13 si ha, procedendo fino alla terza generazione

$$\begin{cases} N_1(t) = N_1(0)e^{-\lambda_1 t} \\ N_2(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \\ N_3(t) = N_1(0) \lambda_1 \lambda_2 \left( \frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right) \end{cases} \quad (6.14)$$

Si consideri ora l'andamento col tempo delle attività di due sostanze radioattive, un genitore (1) e una sostanza figlia (2), di una stessa catena radioattiva  $N_1(t) \xrightarrow{\lambda_1} N_2(t)$  e si determini l'istante  $t_{1,2}^*$  in cui le due attività combaciano.

Ciò implica, in base alla 6.6

$$\lambda_1 N_1(t) = \lambda_2 N_2(t) \quad (6.15)$$

e sostituendo dalla 6.14

$$\lambda_1 N_1(0) e^{-\lambda_1 t} = \lambda_2 N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

da cui

$$t_{1,2}^* = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \quad (6.16)$$

L'istante in cui l'entità della sostanza figlia ha il suo massimo si ottiene uguagliando a zero la variazione temporale della quantità di sostanza figlia

$$dN_2(t)/dt = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}) = 0$$

da cui infine

$$t_{max} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \quad (6.17)$$

Quindi ne deriva l'interessante risultato che nel caso sia presente ad un istante iniziale una sola sostanza radioattiva, la sostanza figlia raggiunge il massimo della sua entità allo stesso istante in cui la sua attività coincide con quella della sostanza genitore,  $t_{max} = t_{1,2}^*$ .

Si consideri ora la catena radioattiva  $N_1(t) \xrightarrow{\lambda_1} N_2(t) \xrightarrow{\lambda_2} N_3(t)$  e si faccia sempre riferimento ai risultati presentati nelle 6.14, supponendo però che la sostanza di terza generazione sia stabile, ovvero  $\lambda_3 = 0$ . In tal caso

$$N_3(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} - \frac{1 - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2} \right) \quad (6.18)$$

Si vedano ora quattro casi notevoli.

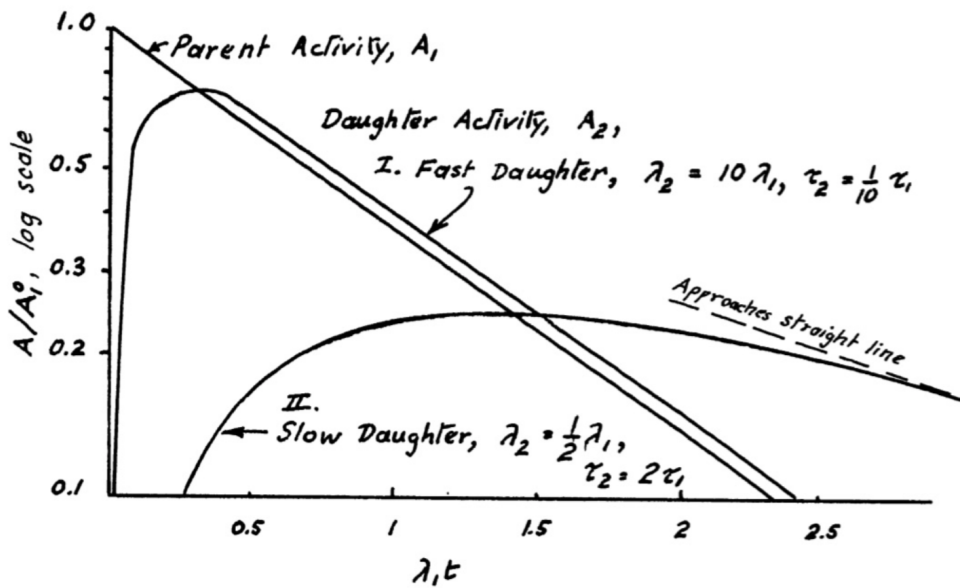


Figura 6.3: Ratei di decadimento di particelle figlie con probabilità di decadimento minore o maggiore di quella di uno stesso genitore.

1. Supponendo dapprima  $\lambda_1 > \lambda_2$ , si ha che dopo un tempo  $t$  abbastanza lungo, per cui  $t \gg 1/\lambda_1$ , si può trascurare il primo esponenziale in parentesi per  $N_2(t)$  dalle 6.14, ottenendo

$$N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \quad (6.19)$$

il che mostra come in questo caso, per tempi  $t > t_{max}$ , la sostanza figlia (2) proceda decadendo sostanzialmente secondo la propria costante di decadimento  $\lambda_2$ , quindi secondo la propria vita media  $\tau_2$ .

2. Se invece si suppone  $\lambda_1 < \lambda_2$ , si ha che dopo un tempo  $t$  abbastanza lungo, per cui  $t \gg 1/\lambda_2$  e quindi anche  $t > t_{max}$ , si può trascurare il secondo esponenziale in parentesi per  $N_2(t)$  dalle 6.14, ottenendo

$$N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \quad (6.20)$$

che mostra come in questo caso la sostanza figlia (2) proceda decadendo sostanzialmente secondo la costante di decadimento  $\lambda_1$  della sostanza genitore, quindi secondo la vita media  $\tau_1$ .

Ciò risulta comprensibile riflettendo sul fatto che essendo lento il rateo di decadimento della sostanza (1) rispetto a quello della sostanza (2), lo è anche quello di formazione della sostanza (2), che però decade poi rapidamente subito dopo essersi formata.

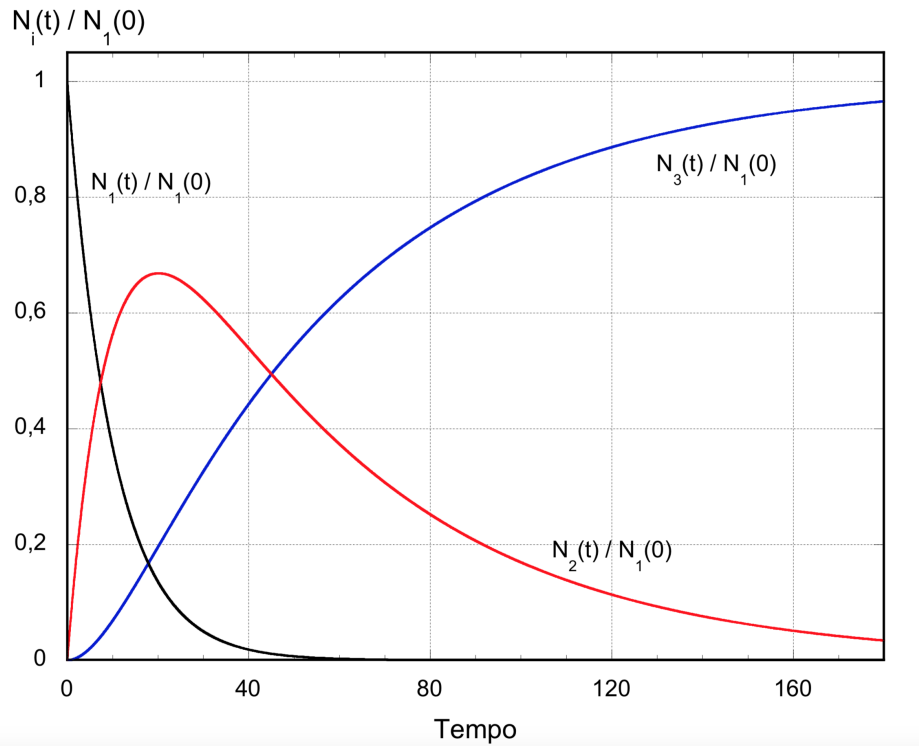


Figura 6.4: Esempio di una serie radioattiva con tre membri, di cui all'inizio è presente solo il genitore, l'ultimo è stabile e quello intermedio ha una vita media cinque volte superiore a quella del genitore

Moltiplicando per  $\lambda_2$  i due termini della 6.20 si ottiene, per il rateo di decadimenti della sostanza (2), ovvero per la sua attività  $\mathcal{A}_2(t)$

$$\mathcal{A}_2(t) = \lambda_2 N_2(t) \cong \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \mathcal{A}_1(t) \quad (6.21)$$

3. Supponendo ora  $\lambda_1 \ll \lambda_2$ , dalla 6.21 e sempre per tempi  $t > t_{max}$ , si ha  $\mathcal{A}_2(t) \cong \mathcal{A}_1(t)$ , individuando quello che viene detto un *equilibrio transiente* fra le attività degli elementi (1) e (2), con un rapporto sostanzialmente costante fra esse:  $\mathcal{A}_2/\mathcal{A}_1 \cong \lambda_2/(\lambda_2 - \lambda_1) \cong 1$ .
4. Se ora, oltre a considerare  $\lambda_1 \ll \lambda_2$  si suppone anche  $\lambda_1 \cong 0$ , e si considerano tempi  $t$  tali che  $1/\lambda_1 \gg t \gg 1/\lambda_2$ , allora

$$\begin{cases} N_1(t) \cong N_1(0) \\ N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 t}) \end{cases} \quad (6.22)$$



da cui:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_1(t) \cong \mathcal{A}_1(0) \\ \mathcal{A}_2(t) \cong \mathcal{A}_1(0) (1 - e^{-\lambda_2 t}) \end{cases} \quad (6.23)$$

Si è quindi in presenza di un'attività molto piccola e quasi costante  $\mathcal{A}_1(t)$ . L'attività  $\mathcal{A}_2(t)$  tende all'equilibrio per tempi  $t \gg \lambda_2^{-1}$ , quando  $e^{-\lambda_2 t} \rightarrow 0$  e  $\mathcal{A}_2(t) \rightarrow \mathcal{A}_1(0)$ , quindi in regime di quasi saturazione, ovvero di quasi equilibrio (Figura 6.5).

L'effettivo equilibrio richiederebbe d'altronde  $dN_1(t)/dt = 0$ , e riestendendo anche al caso di una generica catena radioattiva con  $k$  decadimenti successivi, ciò implicherebbe l'uguaglianza di tutte le attività

$$\mathcal{A}_1(t) = \mathcal{A}_2(t) = \mathcal{A}_3(t) = \dots = \mathcal{A}_k(t) \quad (6.24)$$

Questa condizione non può però essere effettivamente raggiunta in quanto l'aver  $dN_1(t)/dt = 0$  significherebbe che la sostanza genitore è stabile, con  $\lambda_1 = 0$  e  $\tau_1 = \infty$ . È d'altronde possibile conseguire una condizione tanto più prossima a quella dell'effettivo equilibrio quanto più lentamente decade la sostanza genitore rispetto ad ogni sostanza figlia della catena radioattiva. In tal caso, col crescere del tempo  $t$ , si tende alla condizione

$$N_1(t)\lambda_1 = N_2(t)\lambda_2 = N_3(t)\lambda_3 = \dots = N_k(t)\lambda_k \quad (6.25)$$

detta di *equilibrio secolare*. Essa risulta infatti applicabile soltanto quando un materiale, contenente tutti i prodotti di decadimento provenienti da una sostanza genitore, è stato lasciato indisturbato per un tempo sufficientemente lungo da permettere il conseguimento della suddetta condizione di equilibrio.

L'equilibrio può essere raggiunto anche nel caso in cui la sostanza genitore venga prodotta nel tempo con un rateo di produzione  $Q$  uguale al suo rateo di decadimento  $\lambda N(t)$ . Un caso del genere si può avere ad esempio bombardando un campione di sostanza i cui nuclei siano stabili, con un fascio di particelle che inducano un numero di trasmutazioni su  $Q$  atomi/s verso un elemento radioattivo che poi decada con una costante  $\lambda$ . Questo procedimento è in pratica utilizzato per produrre elementi radioattivi sfruttando ad esempio neutroni provenienti da reattori o fasci di particelle prodotti in acceleratori.

La variazione del numero  $N(t)$  di nuclei radioattivi presenti si ottiene dal bilanciamento fra il rateo  $Q$  di formazione e il rateo  $-\lambda N(t)$  di decadimento:

$$\frac{dN(t)}{dt} = Q - \lambda N(t) \quad (6.26)$$

che se  $Q = \text{cost.}$ , si può riscrivere ridefinendo e quindi separando le variabili:

$$\frac{d[Q - \lambda N(t)]}{Q - \lambda N(t)} = -\lambda dt \quad (6.27)$$

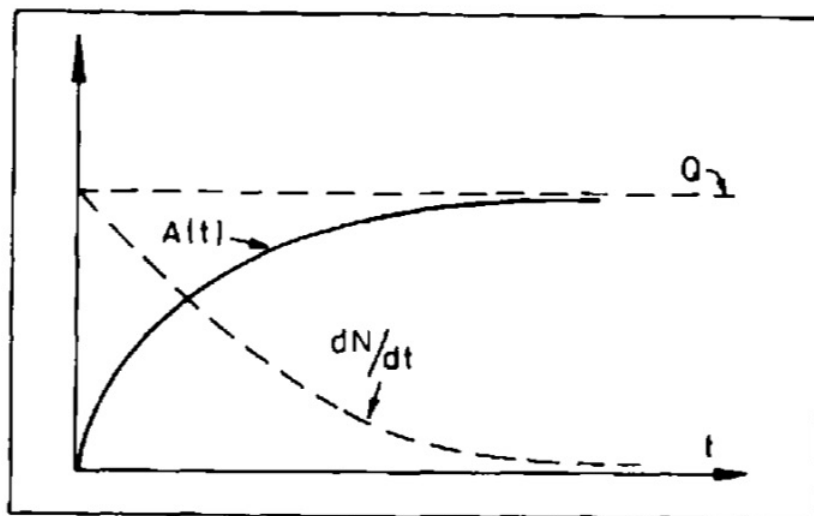


Figura 6.5: Equilibri asintotici fra ratei di produzione e attività.

Integrandola, nell'ipotesi che all'istante iniziale  $t = 0$  si abbiano  $N(0) = 0$  nuclei, si ottiene

$$Q - \lambda N(t) = [Q - \lambda N(0)] e^{-\lambda t} \implies N(t) = \frac{Q}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \quad (6.28)$$

che rappresenta un andamento a saturazione, tipico dei casi in cui formazione e decadimento sono in competizione. In figura 1.9 sono schematicamente illustrati l'attività  $\mathcal{A}(t) \equiv \lambda N(t)$ , o rateo di decadimento radioattivo, e la variazione temporale del numero di nuclei genitori  $dN(t)/dt$  per un sistema con un rateo di formazione di  $Q$  atomi/s.<sup>2</sup>

### 6.3 Tecniche radioattive di datazione

Le tecniche di datazione basate sui decadimenti radioattivi permettono di ottenere le informazioni più attendibili in merito alle valutazioni dei tempi assoluti delle epoche geologiche. Le sostanze comunemente utilizzate per questi scopi sono l'uranio e i suoi isotopi, il torio, il potassio e il rubidio. La storia iniziale del pianeta Terra non è nota, ma ad un certo punto le rocce raggiunsero la loro composizione attuale, cristallizzandosi e differenziando i loro diversi componenti minerali. Un processo di metamorfosi, seppur lento, è tutt'ora in atto. La datazione radioattiva si riferisce sostanzialmente alla possibilità di determinare il tempo di formazione dei minerali, ovvero la loro

<sup>2</sup>Per una trattazione completa delle equazioni che descrivono le trasmutazioni nucleari si può vedere ad esempio: Jerzi Cetnar, General solution of Bateman equations for nuclear transmutations, Annals of Nuclear Energy, 33 (2006) 640-645.

età. Una roccia che al momento della sua formazione contenesse ad esempio una certa quantità di uranio, ha accumulato nel tempo trascorso, elio prodotto dal decadimento dell'uranio. Ogni atomo di  $^{238}\text{U}$  che si trasforma in  $^{206}\text{Pb}$  emette infatti otto particelle  $\alpha$ , ovvero otto nuclei di elio, che se non sfuggono dalla roccia permettono di datare quest'ultima dalla valutazione fra l'uranio ancora presente e l'elio nel frattempo accumulato. Anche il torio permette di attuare un procedimento simile.

Particolare attenzione va posta nel verificare che l'elio e l'uranio non siano sfuggiti dai campioni in analisi durante la storia della roccia, cosa peraltro frequente per quanto concerne l'elio. Il rapporto uranio/piombo è anche utilizzabile e risente meno dei problemi che caratterizzano l'elio<sup>3</sup>, dovuti a diffusione o fuga dalle rocce. Si utilizzano inoltre anche i rapporti  $^{206}\text{Pb}/^{207}\text{Pb}$ ,  $\text{K}/\text{Ar}$  e  $^{87}\text{Rb}/^{87}\text{Sr}$ .

Si veda ora come implementare questa tecnica, considerando che la si vuole applicare a decadimenti che si sviluppano su tempi geologici ( $\sim 10^9$  y) per i quali non si è in grado di misurare direttamente l'attività in funzione del tempo. Quanto si fa in tali casi è utilizzare i numeri relativi di nuclei genitori e figli osservati al tempo  $t_1$  (oggi) in un campione di materiale, confrontandoli con i numeri relativi al tempo  $t_0$ , quando il materiale in studio si è cristallizzato a costituire la roccia (minerale) intrappolando i nuclei genitori nella loro "posizione" attuale.

Dato il decadimento dell'isotopo (nucleo/atomo) genitore G nell'isotopo (nucleo/atomo) figlio F, bisogna semplicemente *contare*, ad esempio con metodi chimici, gli attuali numeri di atomi G ed F,  $N_G(t_1)$  e  $N_F(t_1)$ ; se null'altro tranne il decadimento radioattivo ha agito a partire dal tempo  $t_0$  nel modificare  $N_G(t)$  ed  $N_F(t)$ , allora supposto che al tempo  $t_0$  della formazione non vi fosse ancora presenza di nuclei figli, cioè  $N_F(t_0) = 0$ , si ha

$$N_F(t_1) + N_G(t_1) = N_G(t_0) \quad (6.29)$$

e ancora

$$N_G(t_1) = N_G(t_0) e^{-\lambda(t_1-t_0)} \quad (6.30)$$

da cui

$$\Delta t \equiv t_1 - t_0 = \frac{1}{\lambda} \ln \left[ \frac{N_G(t_0)}{N_G(t_1)} \right] = \frac{1}{\lambda} \ln \left[ 1 + \frac{N_F(t_1)}{N_G(t_1)} \right] \quad (6.31)$$

Noti quindi la costante di decadimento  $\lambda$  del nucleo genitore, misurabile in laboratorio, e il rapporto attuale fra abbondanza di nuclei genitori e figli, si ottiene l'età del campione in studio con una precisione dipendente da quella

---

<sup>3</sup>La molecola di elio è monoatomica ed è sostanzialmente la più piccola fra tutte le molecole, quindi, unitamente alla piccola massa, questo spiega la maggior facilità per l'elio di sfuggire da materiali in cui sia presente o sia stato assorbito, sfruttando i micro-difetti strutturali dei materiali stessi.

con cui è nota  $\lambda$  e dalla statistica di conteggio per  $N_G$  ed  $N_F$ .

Nelle relazioni 6.29 e 6.30 sono implicite delle assunzioni che devono essere accuratamente verificate prima di applicare la relazione 6.31 alla determinazione dell'età di un campione. La 6.29 assume infatti, come detto, che  $N_F(t_0) = 0$ , e anche che nel tempo intercorso dalla formazione del campione fino ad oggi non si siano verificati fenomeni che hanno portato a modificare il numero totale di atomi presenti, variando il rapporto genitori/figli, se non per quanto dovuto al processo di decadimento radioattivo.

La 6.30 assume che la variazione di  $N_G$  dipenda soltanto dal decadimento e che quindi, non vengano introdotti ulteriori atomi genitori né da altri, diversi e concomitanti, fenomeni di decadimento né da reazioni nucleari, come ad esempio quelle inducibili da raggi cosmici.

Si veda ora come modificare la procedura per l'ottenimento di  $\Delta t$  tenendo conto anche dell'eventuale numero di nuclei/atomi figli  $F$  già presenti nel campione all'istante  $t_0$  della sua formazione, anche se al momento  $t_1$  dell'analisi del campione non si può dire quali atomi figli siano derivati dal decadimento durante il tempo  $\Delta t$  e quali ci fossero fin dall'inizio.

Si supponga che al tempo  $t_0$  siano già presenti  $N_F(t_0)$  nuclei figli, ad esempio formati da decadimenti del genitore in tempi precedenti  $t_0$  o comunque inglobati nel campione al momento  $t_0$  della sua formazione. La 6.29 diventa in questo caso

$$N_F(t_1) + N_G(t_1) = N_F(t_0) + N_G(t_0) \quad (6.32)$$

La quantità  $N_F(t_0)$  non è però nota e questo non permette quindi di ottenere  $\Delta t$ . Se tuttavia nel campione è presente anche un diverso isotopo  $F'$  della specie figlia, che sia stabile e non proveniente dal decadimento di un genitore con lunga vita media, si può comunque risalire all'età del campione. Indicata con  $N_{F'}$  la popolazione dell'isotopo  $F'$ , il fatto che esso sia stabile implica  $N_{F'}(t_1) = N_{F'}(t_0)$ , da cui

$$\frac{N_F(t_1) + N_G(t_1)}{N_{F'}(t_1)} = \frac{N_F(t_0) + N_G(t_0)}{N_{F'}(t_0)} \quad (6.33)$$

che diventa

$$\frac{N_F(t_1)}{N_{F'}(t_1)} = \frac{N_G(t_1)}{N_{F'}(t_1)} \left[ e^{\lambda(t_1-t_0)} - 1 \right] + \frac{N_F(t_0)}{N_{F'}(t_0)} \quad (6.34)$$

I rapporti  $N_F(t_1)/N_{F'}(t_1)$  e  $N_G(t_1)/N_{F'}(t_1)$  possono essere misurati in laboratorio ma resta sempre incognito il rapporto isotopico  $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$ . Avviene che minerali che cristallizzano secondo una comune origine dovrebbero mostrare uguali età e anche uguali rapporti isotopici  $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$ , anche se in essi il numero  $N_G(t_0)$  degli stessi atomi genitori può essere molto diverso, ad esempio per la diversa composizione chimica.

Supponendo corretta quest'ipotesi ci si attende al momento della misura, ovvero al tempo  $t_1$ , di osservare minerali con diversi rapporti  $N_F(t_1)/N_{F'}(t_1)$  e  $N_G(t_1)/N_{F'}(t_1)$ , corrispondenti ad una medesima coppia di valori  $\Delta t$  e  $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$ .

Questa ipotesi può essere analizzata graficando  $N_F(t_1)/N_{F'}(t_1)$  rispetto a  $N_G(t_1)/N_{F'}(t_1)$ : per svariati minerali la 6.34 mostra infatti una dipendenza lineare fra i rapporti, con pendenza data da  $[e^{\lambda(t_1-t_0)} - 1]$  e intercetta  $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$ .

Un esempio, relativo al decadimento  $^{87}\text{Rb} \rightarrow ^{87}\text{Sr}$  ( $T_{1/2} = 4.8 \times 10^{10}$  y), confrontato con l'isotopo stabile  $^{86}\text{Sr}$ , è illustrato in figura 6.6. La buona

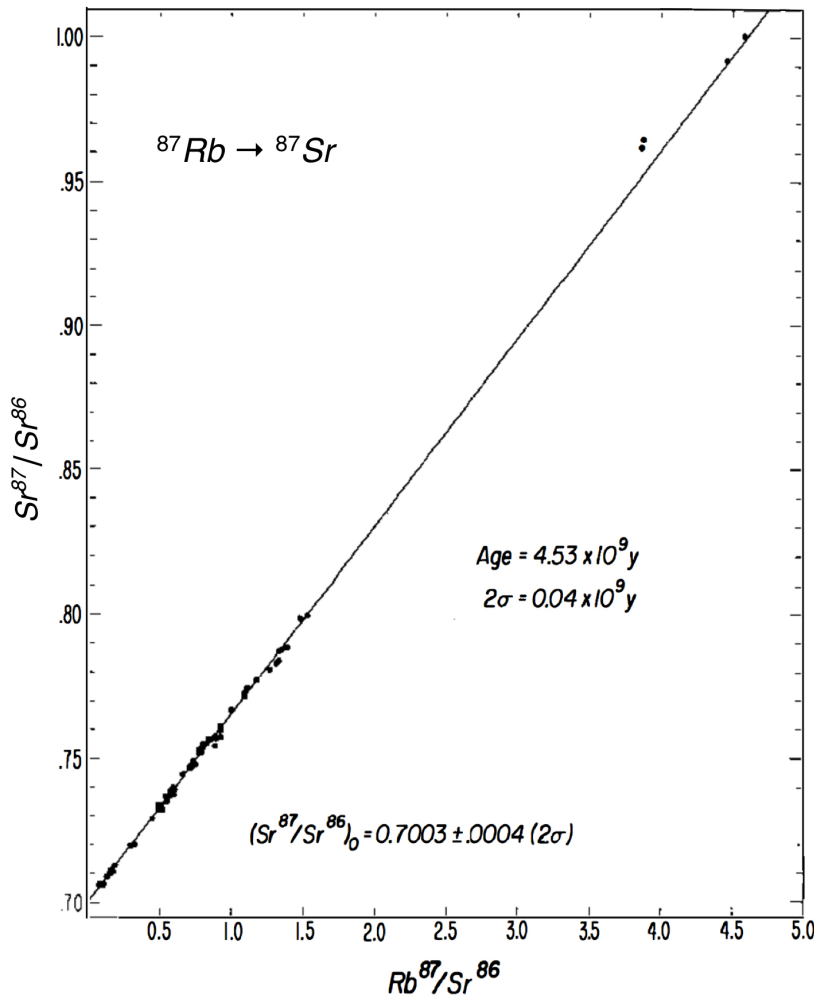


Figura 6.6: Tecnica di datazione Rb-Sr, tratto da G.W. Wertherill, Ann. Rev. Nucl. Sci. 25 (1975) 283.

linearità della regressione sui punti sperimentali suffraga l'ipotesi che non vi

siano state perdite di nuclei genitori o figli.

Le rocce terrestri superficiali più vecchie datate con tali metodi hanno un'età di  $4.374 \times 10^9 \pm 0.006 \cdot 10^9$  anni e sono costituite da granuli di zircone scoperti in Australia, nella regione di Jack Hills, nel 2013. Il risultato, compatibile con l'età dei frammenti di meteoriti più antichi analizzati, suggerisce che la crosta terrestre si sia formata circa 100 milioni di anni dopo il gigantesco impatto che potrebbe aver dato origine alla Luna.

Per datazioni di campioni più giovani, come quelli di materiali di tipo organico, il metodo che fa uso dell'isotopo radioattivo  $^{14}\text{C}$  del Carbonio è il più utilizzato.

Una struttura organica vivente assorbe anidride carbonica,  $\text{CO}_2$ , e il contenuto in carbonio di quest'ultima è costituito quasi interamente da  $^{12}\text{C}$  (98.89%), mescolato ad una piccola percentuale di  $^{13}\text{C}$  (1.11%).

Il  $^{14}\text{C}$  radioattivo, che decade  $\beta^-$  in  $^{14}\text{N}$  con una vita media  $\tau = 8267$  anni, è continuamente formato negli strati alti dell'atmosfera per effetto della cattura, da parte dell'azoto atmosferico, dei neutroni termici quali prodotti secondari del bombardamento dei raggi cosmici. L'equilibrio dinamico che si instaura fra produzione e decadimento, supposti stabili la struttura chimica e in densità media dell'atmosfera, oltrechè il flusso di raggi cosmici che la investe, mantiene costante la concentrazione di  $^{14}\text{C}$  nell'atmosfera stessa.

Il  $^{14}\text{C}$  così prodotto con un rateo  $Q(^{14}\text{C})$ , reagisce con l'ossigeno per dare anidride carbonica  $^{14}\text{CO}_2$  che viene riutilizzata dalle piante durante la fotosintesi clorofilliana.

Con questo meccanismo il  $^{14}\text{C}$  si trasferisce quindi nei composti organici e attraverso la catena alimentare è presente in ogni struttura vivente secondo un preciso rapporto (abbondanza isotopica), pari a circa 1.3 atomi di  $^{14}\text{C}$  ogni  $10^{12}$  atomi di  $^{12}\text{C}$ . Tutta la materia vivente è dunque leggermente radioattiva in funzione del suo contenuto di  $^{14}\text{C}$ .

Supposto che il rateo di produzione di  $^{14}\text{C}$  da parte dei raggi cosmici si mantenga relativamente costante<sup>4</sup>, ne consegue che la materia organica, se vive sufficientemente a lungo, raggiunge l'equilibrio del suo contenuto di  $^{14}\text{C}$  con quello dell'atmosfera

$$\frac{dN(^{14}\text{C})}{dt} = 0 \quad \implies \quad Q(^{14}\text{C}) = \lambda(^{14}\text{C}) N(^{14}\text{C}) \quad (6.35)$$

e tramite il metabolismo lo mantiene sino alla morte, momento a partire dal quale smette di assumere  $^{14}\text{C}$  e quindi di essere in equilibrio, per il suo

---

<sup>4</sup>Nella realtà il livello di  $^{14}\text{C}$  in atmosfera è variato significativamente nel tempo, sia per motivi naturali che "umani", come ad esempio nel secolo scorso a causa soprattutto degli esperimenti con ordigni nucleari. Questo rende necessario ricorrere a metodi complementari, che affiancano e complementano quello del radiocarbonio, per ottenere affidabili datazioni (M.J.Aitken, "Science-based dating in archaeology" - Longman, 1990; Aitken al., "Chronometric Dating in Archaeology" - Springer US, 1997)

contenuto, con il  $^{14}\text{C}$  atmosferico. Dal momento della morte dell'organismo il suo contenuto di  $^{14}\text{C}$  decresce quindi secondo la legge del decadimento radioattivo.

Si può dunque determinare l'età di un campione organico a partire dal momento della morte dell'organismo cui esso è appartenuto, misurando l'attività per grammo di carbonio in esso contenuto, detta *attività specifica* ( $A_{sp}$ ), e confrontandola con l'attività specifica del carbonio atmosferico, pari a circa  $0.23 \text{ Bq/g}$ , ovvero  $13.8$  disintegrazioni/g al minuto.

Detto  $t_0$  il tempo della morte dell'organismo, e  $t_1$  il tempo della misura, si ha, per l'età  $\Delta t = (t_1 - t_0)$  del campione

$$A_{sp} (^{14}\text{C}, t_1) = A_{sp} (^{14}\text{C}, t_0) e^{-\lambda(t_1-t_0)} \quad (6.36)$$

da cui:

$$\Delta t \equiv (t_1 - t_0) = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{A_{sp} (^{14}\text{C}, t_0)}{A_{sp} (^{14}\text{C}, t_1)} \quad (6.37)$$

I metodi di datazione che sfruttano l'attività danno affidamento fino a tempi sostanzialmente non superiori a  $7 \times \tau$ , quindi con il  $^{14}\text{C}$  si possono ottenere datazioni di una certa attendibilità fino a tempi inferiori a circa  $6 \times 10^4 \text{ y}$ . Si può fare ancor meglio utilizzando la tecnica della spettrometria di massa

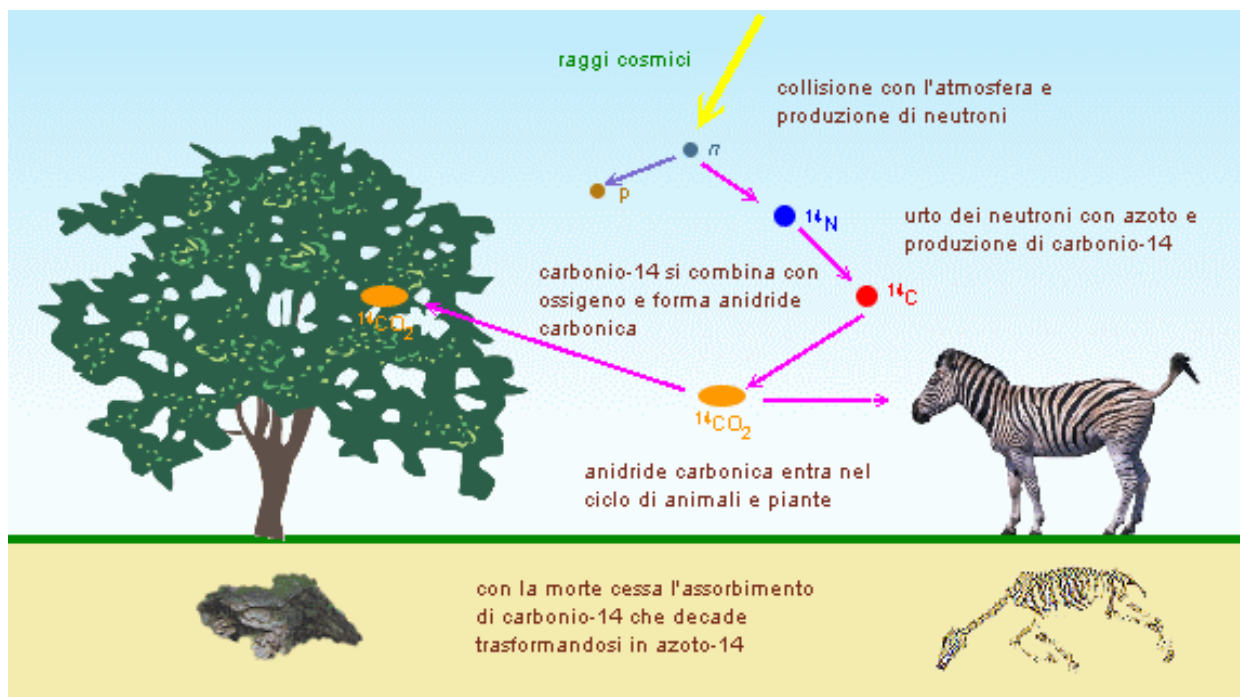


Figura 6.7: Schematizzazione del ciclo del  $^{14}\text{C}$ .

con acceleratore (AMS) che permette di contare direttamente il numero di atomi sia di  $^{14}\text{C}$  che anche di altri isotopi, presenti in un campione.





### 27.5.2 Esercizio 6 - 2: Radon in una ambiente chiuso

Una sala teatrale con pavimento e soffitto quadrati di 10 m di lato e pareti alte 4 m, non è stata aerata per molti giorni. Misurando in essa l'attività per unità di volume del  $^{222}\text{Rn}$  si trova il valore di  $100 \text{ Bq/m}^3$ .

- a) Si esprima l'attività del  $^{222}\text{Rn}$  emesso dal calcestruzzo di pareti, pavimento e soffitto, in funzione delle vite medie del Radon stesso e del capostipite ( $^{238}\text{U}$ ) della catena di decadimenti da cui esso proviene.
- b) Si calcoli la concentrazione di  $^{238}\text{U}$  nel calcestruzzo tenendo conto che lo spessore attraverso il quale il prodotto di decadimento  $^{222}\text{Rn}$  può effettivamente diffondere entro l'ambiente è di 1.5 cm.

#### Soluzione:

a) Osservando la famiglia radioattiva dell' $^{238}\text{U}$ , riportata in figura 6.2 assieme all'indicazione delle vite medie dei vari nuclidi figli, si nota che la vita media  $\tau_1$  del capostipite  $^{238}\text{U}$  è molto maggiore di quelle di tutti i prodotti intermedi fino al  $^{222}\text{Rn}$  compreso. Supponendo altresì che l' $^{238}\text{U}$  sia presente nei minerali del calcestruzzo da tempi maggiori a quelli caratteristici delle vite medie dei prodotti intermedi, si può considerare di essere nella condizione di "equilibrio secolare" per cui la quantità di  $^{222}\text{Rn}$  presente ad un certo istante  $t$  è legata a quella del capostipite  $^{238}\text{U}$  nello stesso istante dalla relazione

$$N_1(t) \lambda_1 = N_2(t) \lambda_2$$

dove l'indice "1" rappresenta  $^{238}\text{U}$  e l'indice "2" il  $^{222}\text{Rn}$ , con  $\lambda_1^{-1} = \tau_1 \simeq 4.5 \times 10^9 \text{ y}$  (pari a circa  $1.41912 \times 10^{17} \text{ s}$ ), e  $\lambda_2^{-1} = \tau_2 \simeq 3.8 \text{ d}$ . Ricordando poi che l'attività  $\mathcal{A}_2(t)$  del  $^{222}\text{Rn}$  è definita come

$$\mathcal{A}_2(t) = \lambda_2 N_2(t)$$

si ha immediatamente

$$\mathcal{A}_2(t) = \lambda_1 N_1(t) = \lambda_1 N_1(0) e^{-\lambda_1 t}$$

b) Il volume di calcestruzzo efficace nell'emettere per diffusione  $^{222}\text{Rn}$  nella sala è pari a  $V_0 = (2 \times 10 \times 10 + 4 \times 4 \times 10) \times 0.015 = 5.40 \text{ m}^3$ . Il volume della sala è invece  $V_1 = 10 \times 10 \times 4 = 400 \text{ m}^3$ , per cui l'attività del  $^{222}\text{Rn}$  in essa è pari ad  $\mathcal{A}_2 = 100 \times 400 = 4 \times 10^4 \text{ Bq}$ , che per la condizione di equilibrio secolare deve coincidere con quella dell' $^{238}\text{U}$  presente nel calcestruzzo di pareti, pavimento e soffitto. La sua concentrazione nel calcestruzzo sarà quindi data da

$$\rho_{238\text{U}} = \frac{N_1(t)}{5.4} = \frac{\mathcal{A}_2(t)}{5.4 \times \lambda_1} \simeq \frac{4 \times 10^4}{5.4 \times 7.04662 \times 10^{-18}} \text{ atomi/m}^3$$

cioè  $\rho_{238\text{U}} \simeq 1.0512 \times 10^{21}$  atomi/m<sup>3</sup>, che essendo pari a 238.05 g la massa di una mole di <sup>238</sup>U, equivale a circa 0.42 g/m<sup>3</sup>.

#### 27.5.4 Esercizio 6 - 4:

Si ha un preparato costituito da una miscela di due diverse sostanze radioattive completamente indipendenti l'una dall'altra e si misura sperimentalmente la distribuzione dei tempi d'attesa fra la rivelazione di due suoi successivi prodotti di decadimento. Si suppone che la misura sia stata eseguita con un sistema di rivelazione molto efficiente ma non in grado di riconoscere i prodotti di decadimento di una sostanza da quelli dell'altra.

Si delinei nell'ambito di quali ipotesi e come si potrebbe in pratica cercare di risalire ai valori delle vite medie  $\tau_1$  e  $\tau_2$  e delle abbondanze iniziali  $N_1(0)$  e  $N_2(0)$  delle due diverse sostanze radioattive che compongono la miscela che costituisce il preparato.

#### Soluzione:

Detto  $N_*(t) = N_1(t) + N_2(t)$  il numero totale di nuclei radioattivi del preparato non ancora decaduti ad un qualunque istante  $t > 0$ , con

$$N_1(t) = N_1(0) e^{-t/\tau_1} \quad \text{ed} \quad N_2(t) = N_2(0) e^{-t/\tau_2}$$

si ha:

$$N_*(0) = N_1(0) + N_2(0) \quad \text{ed} \quad N_*(t) = N_1(0) e^{-t/\tau_1} + N_2(0) e^{-t/\tau_2}$$

Si considerino tre casi estremi:

$$\tau_1 \ll \tau_2 \quad ; \quad \tau_1 \simeq \tau_2 \simeq \tau \quad ; \quad \tau_1 \gg \tau_2$$

Si indichi con  $N_*^{(sp)}(t_i)$  il numero di eventi raccolti nell' $i$ -mo canale dell'istogramma sperimentale, compreso tra gli istanti  $t_i$  e  $t_i + \Delta t$ .

- Si cominci con l'analizzare il secondo caso:  $\tau_1 \simeq \tau_2 \simeq \tau$  e si consideri il logaritmo naturale di  $N_*(t)$

$$\begin{aligned}
\ln N_*(t) &= \ln \left[ N_1(0) e^{-t/\tau_1} + N_2(0) e^{-t/\tau_2} \right] \\
&\simeq \ln \left[ N_1(0) e^{-t/\tau} + N_2(0) e^{-t/\tau} \right] \\
&= \ln \{ e^{t/\tau} [N_1(0) + N_2(0)] \} \\
&= -\frac{t}{\tau} + \ln [N_1(0) + N_2(0)]
\end{aligned} \tag{27.8}$$

che mostra una dipendenza quasi lineare di  $\ln N_*(t)$  da  $t$ .

Ponendo in scala semilogaritmica  $N_*^{(sp)}(t_i)$  si nota che il suo profilo dovrebbe poter essere approssimato da un andamento rettilineo con pendenza  $-1/\tau$  e intercetta sull'asse delle ordinate pari a  $\ln [N_1(0) + N_2(0)]$ .

Effettuando quindi un "fit a retta" si riescono a stimare  $\tau \simeq \tau - 1 \simeq \tau_2$  e la somma  $[N_1(0) + N_2(0)]$  delle abbondanze iniziali, ma non le singole abbondanze  $N_1(0)$  e  $N_2(0)$ .

- Si supponga ora che sia  $\tau_2 \gg \tau_1$ .

In tal caso ci si aspetta che per tempi  $t \gg \tau_1$  la legge di decadimento sia dominata dai prodotti di decadimento della sostanza 2, come si vede anche in figura ...

Se quindi si effettua un fit sui valori di  $\ln [N_*^{(sp)}(t_i)]$  per valori di  $t \gg \tau_1$ , ovvero per  $t \geq t'$  con  $t' \gg \tau_1$ , si dovrebbe ottenere una legge

$$N_2^{(fit)}(t) = N_2^{(fit)}(0) e^{-t/\tau_2^{(fit)}}$$

in grado di riprodurre la corretta legge di decadimento  $N_2(0) e^{-t/\tau_2}$  tanto meglio quanto più vale  $t' \gg \tau_1$ , ovviamente sempre che per  $t \geq t'$  ci siano a disposizione abbastanza valori sperimentali sui quali fare un fit affidabile.

In quest'ipotesi si può dunque sottrarre a  $N_*^{(sp)}(t_i)$  per ogni valore di  $t_i$ , quanto dato da  $N_2^{(fit)}(t_i)$ , e quanto resta,  $N_1^*(t_i)$ , dovrebbe essere compatibile con la distribuzione dovuta ai decadimenti della sola sostanza 1:

$$\left[ N_*^{(sp)}(t_i) - N_2^{(fit)}(t_i) \right] \propto N_1^*(t_i) \approx N_1(t_i)$$

Effettuando quindi un fit sui valori rappresentati da  $N_1^*(t_i)$  si ottengono stime anche per  $N_1(0)$  e per  $\tau_1$ .

- Il caso  $\tau_2 \ll \tau_1$  è chiaramente simmetrico a quello ora discusso.

Si osservi anche che un ulteriore fattore che influenza quanto bene la procedura indicata permetta di risalire a stime di  $N_1(0)$ ,  $N_2(0)$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  è il rapporto  $N_1/N_2$ , peraltro non conoscibile a priori.

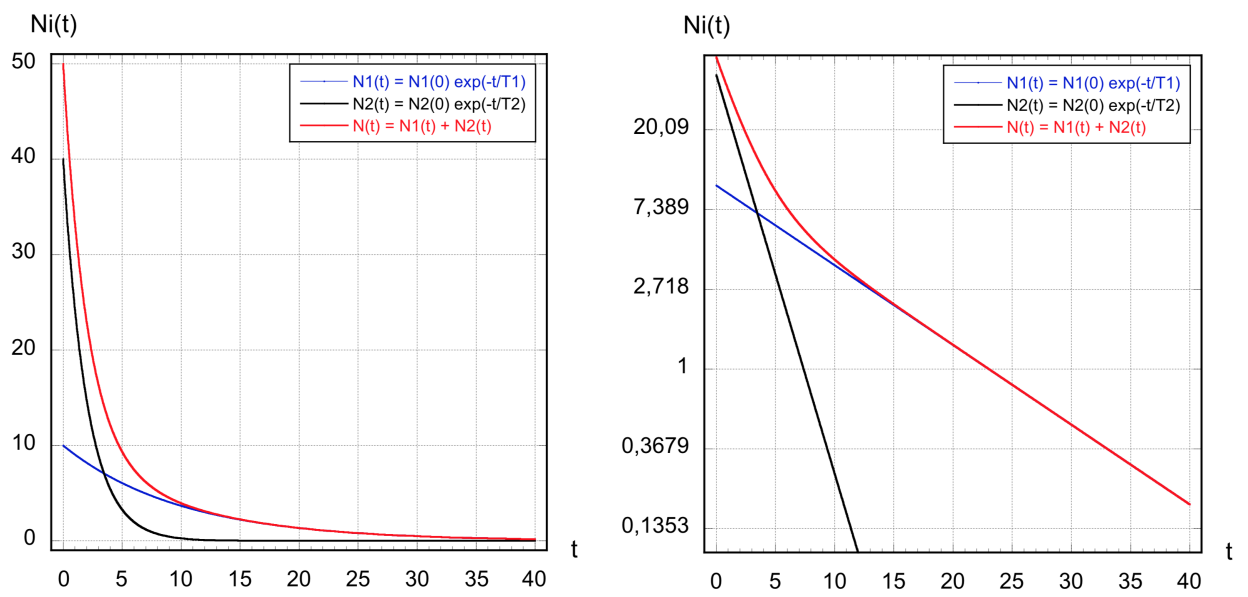


Figura 27.1: A sinistra, in scala lineare, gli andamenti di  $N_1(t)$ ,  $N_2(t)$  e la loro somma, nell'ipotesi che  $N_1(0) = 10$ ,  $N_2(0) = 40$ ,  $\tau_1 = 10$  e  $\tau_2 = 10$ ; a destra lo stesso in scala semi-logaritmica.