

## Capitolo 5

# La stabilità dei nuclei

Le specie nucleari oggi note sono circa 3300 <sup>1</sup>: 254 sono i nuclidi naturali stabili, 85 quelli naturali instabili, i restanti sono radionuclidi prodotti artificialmente. Degli 85 nuclidi naturali instabili 32 sono ritenuti *primordiali*, mentre gli altri si sono formati attraverso reazioni e decadimenti nucleari spontanei nel corso dei miliardi di anni di vita dell'universo.

L'uranio  ${}_{92}^{238}\text{U}$  è il nucleo con i valori maggiori di  $A$  e  $Z$  spontaneamente presente in natura. I nuclidi con  $Z > 92$ , detti *transuranici*, sono tutti prodotti artificialmente.

Tutti gli elementi transuranici e una parte di quelli *suburanici* sono naturalmente instabili rispetto all'emissione di nuclei di elio  ${}^4_2\text{He}$  (radioattività  $\alpha$ ), rispetto all'emissione di elettroni  $e^-$  o positroni  $e^+$  (radioattività  $\beta$ ), e all'emissione di radiazione elettromagnetica (radioattività  $\gamma$ ).

A questi tre tipi di decadimento si aggiunge la *fissione spontanea* dell'isotopo  ${}_{92}^{238}\text{U}$ , scoperta da K.Petrzhak e G.Flerov nel 1940, che consiste nella scissione del nucleo di uranio in due frammenti nucleari di massa confrontabile.

La radioattività naturale fu casualmente scoperta da H.Bequerel nel 1896 con l'osservazione di *raggi fortemente penetranti*, spontaneamente emessi dal minerale di uraninite picea (pechblenda), individuati per l'impressione da essi prodotta in lastre fotografiche, tramite l'eccitazione per fluorescenza di gas, oltre che per la ionizzazione dell'aria che provocavano <sup>2</sup>.

Utilizzando come indicatore il potere ionizzante <sup>3</sup>, si individuarono tre diversi tipi di radiazioni, fino ad allora sconosciute e molto diverse fra loro, che furono contraddistinte dalle lettere  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .

I nuclei stabili sono raccolti in una banda piuttosto stretta sul piano  $(Z; N)$  del grafico della tabella dei nuclidi, come mostrato in figura 5.1.

---

<sup>1</sup>Paragrafo 4.2, Tabella dei nuclidi.

<sup>2</sup>Si vedano le prime tecniche di misura della radioattività con elettroscopi ed elettrometri, che hanno anche permesso l'individuazione dei raggi cosmici ... .

<sup>3</sup>Il potere ionizzante di una radiazione è legato al numero di coppie elettrone-ione che tale radiazione produce interagendo con gli atomi del materiale che attraversa.

Il decadimento radioattivo spontaneo è un fenomeno sostanzialmente indipendente dal tipo di emissione che produce. Nel caso di un decadimento in due corpi esso consiste nella disintegrazione spontanea del nucleo di un atomo, detto *genitore* che si trasforma in un più stabile nucleo *figlio*, più un residuo.

Se anche il nucleo figlio ed eventualmente anche il residuo sono radioattivi il processo continua con decadimenti a catena fino all'ottenimento di prodotti stabili.

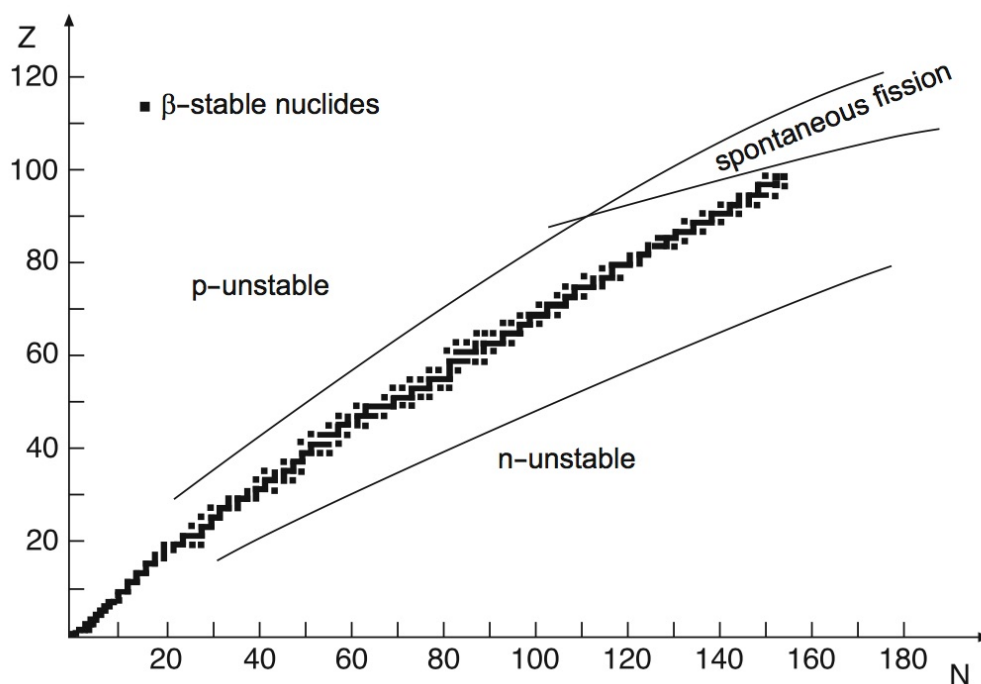


Figura 5.1: Carta dei nuclidi: i quadrati neri nel piano  $(Z, N)$  indicano i nuclei della "valle di stabilità".

Ogni nucleo instabile possiede una determinata probabilità  $\lambda$  di decadere in un qualsiasi istante di tempo e la sua *vita media*  $\tau$  è il reciproco della probabilità di decadimento:  $\tau = 1/\lambda$ .

Nel capitolo 6 si vedrà come si possano descrivere, prescindendo dalle cause dirette che li determinano, i fenomeni legati ai decadimenti nucleari e come possano essere utilmente sfruttati in molti ambiti.

Nel seguito di questo capitolo si approfondiranno le caratteristiche e i meccanismi dei decadimenti  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e della fissione dei nuclei, mostrando anche come si possano predire stime attendibili delle vite medie da confrontare poi con i risultati sperimentali.

In un capitolo successivo si tratterà anche della fusione accennando al suo ruolo nel "funzionamento" di una stella.

## 5.1 Generalità sulla radioattività, ovvero sui decadimenti nucleari

Un nucleo  ${}^A_ZX$  si dice *stabile* rispetto al decadimento

$${}^A_ZX \longrightarrow {}^{A-A'}_{Z-Z'}X + \sum_{i=1}^n {}^{A^i}_{Z^i}b \quad (5.1)$$

con  $\sum_{i=1}^n A^i = A'$  e  $\sum_{i=1}^n Z^i = Z'$ , se risulta negativa la differenza fra le masse

$$\Delta M_b(A, Z) = M_X(A, Z) - M_X(A - A', Z - Z') - \sum_{i=1}^n M_b(A^i, Z^i) \quad (5.2)$$

Se invece  $\Delta M_b > 0$ , il processo 5.1 ha luogo spontaneamente, a meno di vincoli legati al rispetto di leggi di conservazione.

Questo presuppone che gli  $n + 1$  prodotti del decadimento vengano emessi contemporaneamente. Non è però sempre così, soprattutto per  $n > 2$ . In quei casi ci si può trovare di fronte a catene di decadimenti sequenziali che partendo dai prodotti di un iniziale decadimento binario o ternario, ne coinvolgono poi alcuni in decadimenti successivi per cui, alla fine di tutto il processo, si possono avere molti prodotti come risultato del decadimento iniziale di un solo nucleo o particella, ma non tutti saranno stati emessi contemporaneamente. Lo studio di questi casi si può ricondurre a quello di decadimenti indipendenti, se si è in grado di risolvere la sequenza temporale con cui si manifestano.

Nel seguito di questo capitolo si considereranno decadimenti binari o ternari. Per decadimenti binari la quantità

$$E_b(A, Z) = \Delta M_b(A, Z)c^2 < 0 \quad (5.3)$$

è detta energia di legame di  ${}^{A'}_{Z'}b$  nel nucleo  ${}^A_ZX$ . L'opposto di  $E_b(A, Z)$ , detta energia di separazione, rappresenta l'energia minima che deve essere fornita al nucleo  ${}^A_ZX$  affinché esso emetta  ${}^{A'}_{Z'}b$ .

Quindi, equivalentemente a quanto visto sopra, se  $E_b(A, Z) > 0$ , il processo avviene spontaneamente, e i termini a destra della freccia nella 5.1 sono detti *prodotti del decadimento*.

La quantità totale di energia rilasciata in un decadimento è anche detta  $Q$ -valore del decadimento, e si ha quindi che un decadimento può aver luogo spontaneamente solo se  $Q > 0$ .

Dall'analisi dei valori sperimentali delle masse dei nuclidi naturali e di molti artificiali si trova, nel caso in cui  ${}^{A'}_{Z'}b$  sia un protone  $p$ , un neutrone  $n$  o un deutone  $d \equiv {}^2_1\text{H}$ , che vale sempre  $E_b(A, Z) < 0$ , ovvero il decadimento spontaneo 5.1 non può aver luogo, quindi le radioattività naturali *protonica*, *neutronica* e *deutonica* sono energeticamente proibite.

In alcuni casi si osserva la cosiddetta *emissione ritardata* di neutroni o di protoni, che hanno però luogo sempre immediatamente a ridosso dell'emissione di un elettrone, o di un positrone (o di una cattura K), conseguenti a un decadimento  $\beta$ .

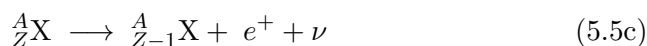
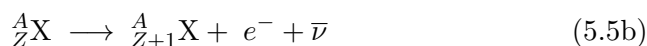
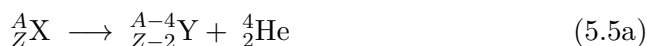
Per alcuni nuclei pesanti si ha  $E_\alpha(A, Z) > 0$ , ed è quindi energeticamente possibile l'emissione spontanea di particelle  $\alpha$  da parte di quei nuclei pesanti. La grande energia di legame del nucleo di elio, pari a circa 28.3 MeV, rende inoltre la sua emissione da un nucleo pesante particolarmente favorevole, da un punto di vista energetico, rispetto a quella di altri frammenti nucleari leggeri.

Calcolando le energie di legame di protoni e neutroni, tramite la 5.3 si evidenzia che i nuclei con numero  $N^*$  di neutroni pari a

$$N^* = 2, 8, 20, 50, 82, 126 \quad (5.4)$$

sono eccezionalmente stabili, in quanto le energie di legame per i loro protoni e neutroni sono maggiori di quelle calcolate per i nuclei con valori adiacenti di  $N$ . Si noti la sistematica ricorrenza della sequenza 5.4, già individuata nel paragrafo 4.2.

Gli schemi di decadimento nucleare  $\alpha$  e  $\beta$  sono rispettivamente



Analizzando il diagramma  $Z - N$  si trova che il punto rappresentativo di un nucleo  $\beta$ -instabile si sposta lungo una linea isobarica verso il basso oppure verso l'alto, a seconda che venga emesso un positrone  $e^+$  o un elettrone  $e^-$ ; il punto rappresentativo di un nucleo  $\alpha$ -instabile si sposta invece nel punto di coordinate  $(N - 2; Z - 2)$ . Questa legge dello spostamento radioattivo fu formulata nel 1913, indipendentemente da F. Soddy e K. Fajans.

Si trova sperimentalmente che tutti i nuclei con  $Z > 82$  hanno almeno un nuclide  $\alpha$ -instabile. Fra i pochi nuclei  $\alpha$ -instabili con  $Z < 82$  ci sono il neodimio ( ${}^{144}_{60}\text{Nd}$ ), il samario ( ${}^{146}_{62}\text{Sm}$  e  ${}^{147}_{62}\text{Sm}$ ), il gadolinio ( ${}^{148}_{64}\text{Gd}$  e  ${}^{149}_{64}\text{Gd}$ ), il terbio ( ${}^{149}_{65}\text{Tb}$  e  ${}^{150}_{65}\text{Tb}$ ), l'afnio ( ${}^{174}_{72}\text{Hf}$ ), il platino ( ${}^{190}_{78}\text{Pt}$ ).

I nuclei  $\alpha$ -instabili  ${}^{238}_{92}\text{U}$ ,  ${}^{235}_{92}\text{U}$  e  ${}^{232}_{90}\text{Th}$  sono i capostipiti di tre serie radioattive ognuna delle quali, tramite una successione di decadimenti a catena  $\alpha$  e  $\beta$ , termina con un isotopo stabile del piombo.

Nel capitolo 6 si tratterà matematicamente anche la descrizione di una successione di decadimenti a catena.

Per quanto concerne l'interpretazione del processo di decadimento  $\alpha$ , formulata nel 1928 da G.Gamow, R.Gurney e F.Condon, essa rappresenta

una brillante applicazione della meccanica quantistica, come si vedrà nei paragrafi 5.2, 5.2.2 e in Appendice C.

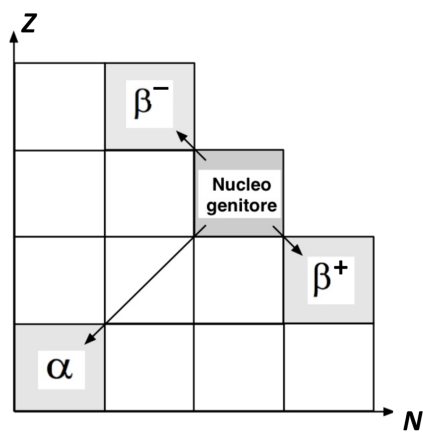


Figura 5.2: Illustrazione della legge dello spostamento radioattivo di Soddy-Fajans.

## 5.2 Radioattività $\alpha$

Fu Rutherford nel 1909 a scoprire che la radiazione  $\alpha$  è costituita da nuclei di elio: egli fece decadere sotto vuoto una sostanza radioattiva che emetteva particelle  $\alpha$  e analizzando poi il contenuto dell'ambiente originariamente vuoto trovò presenza di elio.

Il decadimento  $\alpha$  rappresenta quindi la disintegrazione di un nucleo genitore in un nucleo figlio e un nucleo di elio



e può essere considerato come una fissione spontanea del nucleo genitore (si veda il paragrafo 5.7) in due nuclei figli con masse fortemente asimmetriche. Esso è sostanzialmente dovuto all'azione concomitante delle forze nucleari e di quelle elettromagnetiche.

La sua importanza cresce al crescere del numero di massa  $A$ , in quanto la repulsione coulombiana, dipendendo da  $Z^2$ , cresce più rapidamente della forza di legame nucleare che dipende approssimativamente da  $A$  solo per nuclei leggeri per poi saturare al crescere di  $A$ .

Il motivo per cui un nucleo scelga il decadimento  $\alpha$  per liberarsi *spontaneamente* di carica elettrica va ricercato nel fatto che la particella  $\alpha$  è una struttura molto stabile e fortemente legata, ha quindi un'energia di massa equivalente sensibilmente inferiore alla somma delle energie di massa dei suoi componenti presi singolarmente. Se quindi si definisce spontaneo un processo di decadimento che porti una struttura a una riduzione della propria massa con la maggior possibile trasformazione di questa in energia cinetica, e si desidera nel contempo che il prodotto emesso nel decadimento sia il più leggero possibile, allora la particella  $\alpha$  è un ottimo candidato.

Per alcuni nuclei molto pesanti c'è la possibilità energetica dell'emissione spontanea anche di altri nuclei leggeri, quali  ${}^8\text{Be}$  o  ${}^{12}\text{C}$ , ma la probabilità è così bassa da rendere sperimentalmente non rilevabile il processo.

Per studiare l'energetica del processo si supponga il nucleo genitore inizialmente a riposo rispetto a un osservatore inerziale solidale col sistema del laboratorio (SL), che in questo caso coincide con quello del centro di massa (CM), la conservazione dell'energia si esprime come

$$M_X c^2 = M_Y c^2 + E_{k,Y} + M_\alpha c^2 + E_{k,\alpha} \quad (5.7)$$

con  $M_X$ ,  $M_Y$  ed  $M_\alpha$  le masse rispettivamente del nucleo genitore, di quello figlio e della particella  $\alpha$ ,  $E_{k,Y}$  ed  $E_{k,\alpha}$  le energie cinetiche del nucleo figlio e della particella  $\alpha$ .

Dalla 5.7 si ha

$$E_{k,Y} + E_{k,\alpha} = (M_X - M_Y - M_\alpha) c^2 = \Delta M c^2 \equiv Q \quad (5.8)$$

che viene detto  $Q$ -valore del decadimento e coincide con l'energia a disposizione della disintegrazione. Le energie in gioco sono tali da permettere, con buona approssimazione, l'utilizzo delle formule non relativistiche; le energie cinetiche del nucleo figlio e della particella  $\alpha$  sono quindi

$$E_{k,Y} = \frac{1}{2} M_Y v_Y^2 \quad , \quad E_{k,\alpha} = \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 \quad (5.9)$$

con  $\vec{v}_Y$  e  $\vec{v}_\alpha$  le velocità del nucleo figlio e della particella  $\alpha$ . Avendo supposto il nucleo genitore a riposo, la conservazione dell'impulso implica che nucleo figlio e particella  $\alpha$  si muovano secondo due versi opposti

$$M_Y \vec{v}_Y = -M_\alpha \vec{v}_\alpha \quad \text{da cui,} \quad v_Y = \frac{M_\alpha}{M_Y} v_\alpha \quad (5.10)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} E_{k,Y} + E_{k,\alpha} &= \frac{1}{2} M_Y v_Y^2 + \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2} M_Y \left( \frac{M_\alpha}{M_Y} v_\alpha \right)^2 + \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 = \\ &= \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 \left( \frac{M_\alpha}{M_Y} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\text{da cui,} \quad E_{k,Y} + E_{k,\alpha} = E_{k,\alpha} \left( \frac{M_\alpha}{M_Y} + 1 \right) = Q_\alpha \quad (5.11)$$

e ancora

$$E_{k,\alpha} = \frac{M_Y}{M_\alpha + M_Y} Q_\alpha \quad \text{ed} \quad E_{k,Y} = \frac{M_\alpha}{M_Y} E_{k,\alpha} \quad (5.12)$$

Non potendo essere negativa l'energia cinetica della particella  $\alpha$  emessa nel decadimento, ne deriva come prevedibile che questo, per aver luogo, deve necessariamente essere un processo esotermico, ovvero

$$\Delta M \geq 0 \quad \text{e} \quad Q_\alpha \geq 0 \quad (5.13)$$

Nel caso di nuclei pesanti, con  $A \gg 1$ , la gran parte dell'energia liberata dal decadimento diventa energia cinetica della particella  $\alpha$ . Dalla seconda delle 5.12 si ottiene infatti

$$E_{k,Y} = \frac{M_\alpha}{M_Y} E_{k,\alpha} \ll E_{k,\alpha} \quad (5.14)$$

Ponendo poi  $(M_\alpha/M_Y) \simeq 4/(A-4)$  si ha

$$E_{k,\alpha} \approx \frac{A-4}{A} Q_\alpha \quad , \quad E_{k,Y} \approx \frac{4}{A} Q_\alpha \quad (5.15)$$

che permettono una rapida stima dell'energia rilasciata nel decadimento, nota che sia  $Q_\alpha$ .

Trattandosi di un decadimento in due corpi osservato nel sistema del centro di massa del nucleo genitore, l'energia cinetica espressa dalla prima delle 5.12 e il modulo della velocità della particella  $\alpha$  emessa nel decadimento, dovrebbero assumere entrambi un unico valore.

Accurate misure in proposito hanno tuttavia evidenziato una struttura fine negli spettri energetici delle particelle  $\alpha$  emesse da materiali radioattivi per diversi possibili  $Q$ -valori. Le particelle  $\alpha$  più energetiche sono prodotte da sole, mentre quelle meno energetiche sono sempre accompagnate dalla concomitante emissione di fotoni. Questo concorre a suggerire la presenza nei nuclei di livelli energetici e di una sottostante struttura di stati discreti. In tal caso quindi un nucleo genitore, decadendo  $\alpha$ , può trasformarsi nello stato fondamentale di un nucleo figlio emettendo una particella  $\alpha$  di energia corrispondente all'intero  $Q$ -valore disponibile, o può prima decadere in uno stato eccitato  ${}_{Z-2}^{A-4}Y^*$  del nucleo figlio emettendo una particella  $\alpha$  di energia inferiore all'intero  $Q$ -valore. Il nucleo figlio eccitato risultante potrà

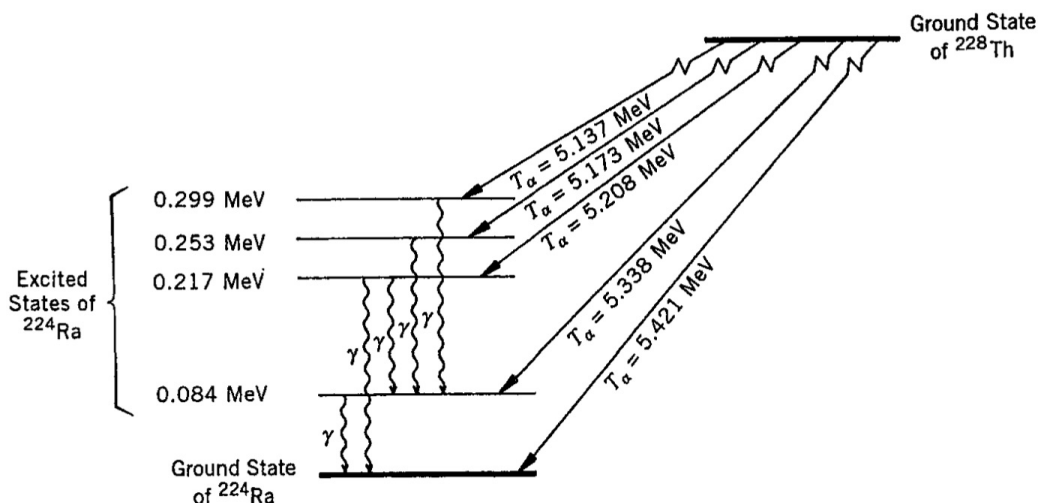
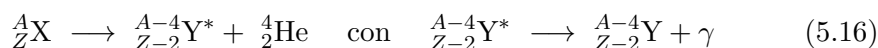


Figura 5.3: Struttura dello spettro di emissione  $\alpha$  del torio  ${}^{228}\text{Th}$ .

quindi decadere al proprio livello fondamentale emettendo fotoni  $\gamma$ , come ad esempio nel caso del torio  ${}^{228}\text{Th}$  che decade  $\alpha$  nel radio  ${}^{224}\text{Ra}$ , illustrato nelle figure 5.3 e 5.4.



Questo tipo di processo avviene raramente nei nuclei pari-pari, dato il loro ridotto  $Q$ -valore. Nei nuclei pari-dispari e dispari-dispari invece, è meno probabile che il nucleone spaiato prenda parte al processo di formazione della particella  $\alpha$ , per cui ha una maggior probabilità di trovarsi in un livello eccitato del nucleo figlio Y, dopo il decadimento  $\alpha$ .



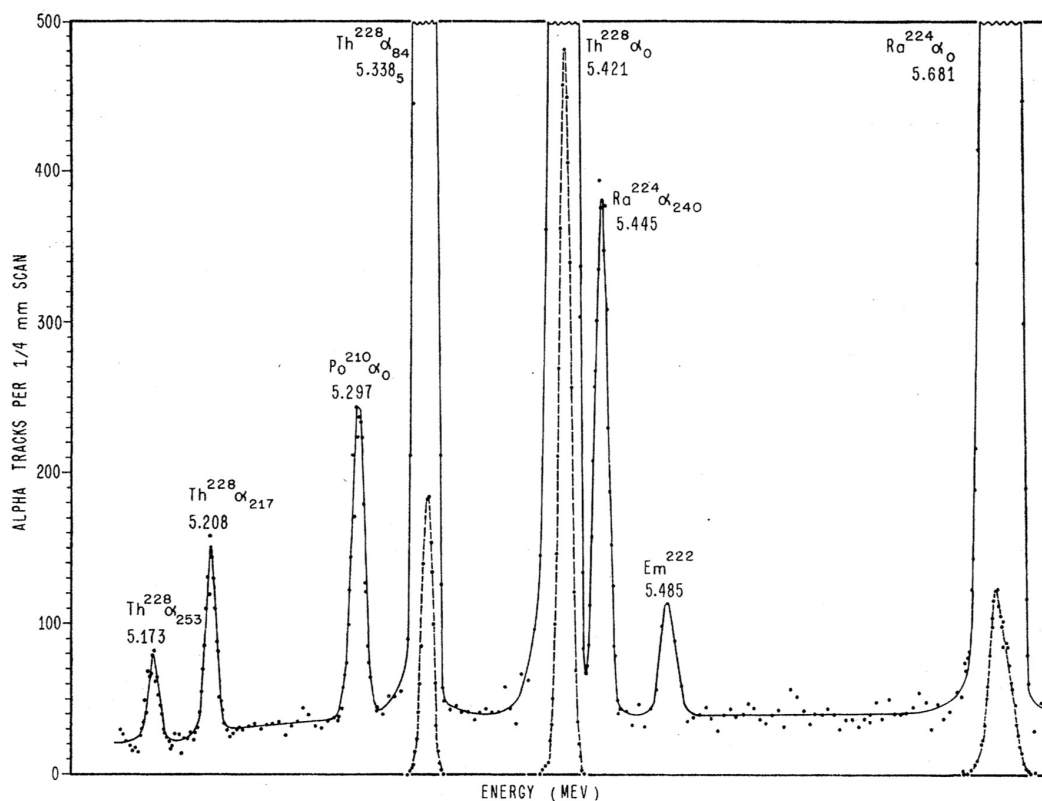


Figura 5.4: Spettro  $\alpha$  del torio  $^{228}\text{Th}$  [Asaro & al., Phys. Rev. 92 (1953) 1495]. L'area di ogni picco è proporzionale al rateo di decadimento per l'energia ad esso associata.

La struttura fine dello spettro può essere determinata dalla misura delle energie cinetiche delle diverse particelle  $\alpha$  osservate in un particolare decadimento, confrontata con il corrispondente  $Q$ -valore disponibile.

$$Q_\alpha \approx E_{k,\alpha} + E_\gamma \quad (5.17)$$

La misura diretta delle energie dei fotoni  $\gamma$  associati conferma quindi l'esistenza nel nucleo di una struttura a stati energetici discreti.

Talvolta si osserva l'emissione di particelle  $\alpha$  con energie maggiori di quelle corrispondenti alla transizione tra i due livelli fondamentali dei nuclei genitore e figlio, ed è dovuta a decadimenti che avvengono a partire da livelli eccitati del nucleo genitore.

L'analisi sistematica dei risultati sperimentali provenienti da decadimenti  $\alpha$  mostra che la vita media  $\tau_\alpha = 1/\lambda_\alpha$  dei nuclei  $\alpha$ -instabili varia su un'intervallo amplissimo di valori, da un massimo di circa  $10^{10}$  anni fino a circa  $10^{-7}$  secondi, per oltre 24 ordini di grandezza; le corrispondenti energie  $E_\alpha$  delle particelle emesse variano da alcuni MeV fino a circa 10 MeV. I nuclidi a vita

media più breve emettono quindi particelle  $\alpha$  più energetiche, e viceversa. Sempre dai dati sperimentali si deduce che la probabilità di decadimento  $\alpha$

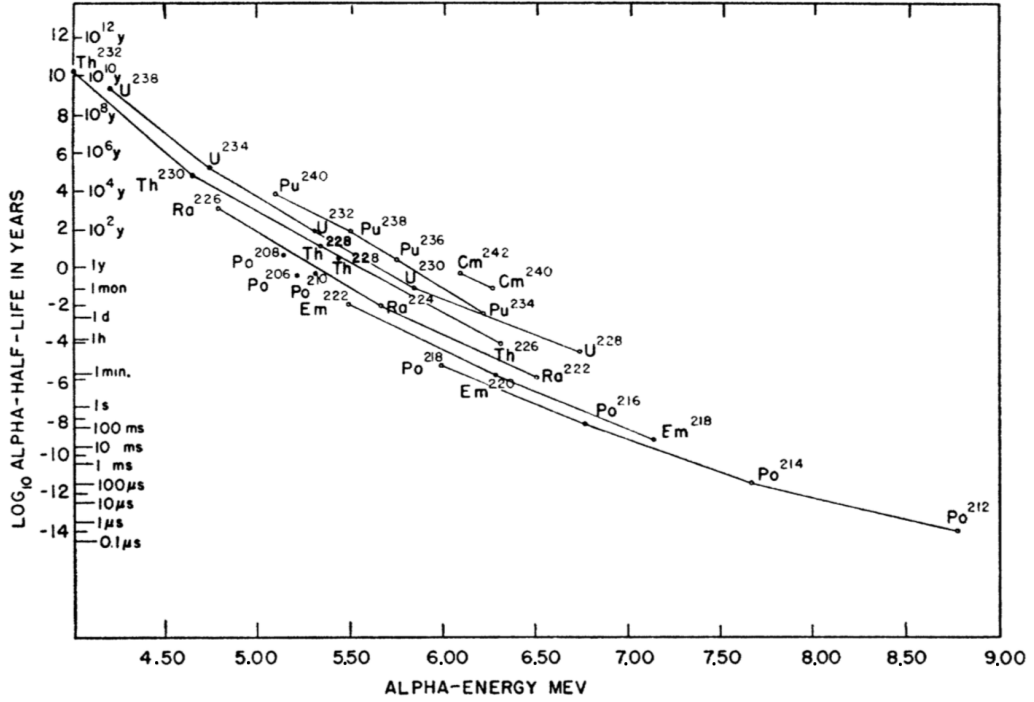


Figura 5.5: Vita media verso l'energia per  $\alpha$  emesse da nuclei pari-pari [I.Permann, A.Ghiorso, G.T.Seaborg, Phys. Rev. 75 (1949) 1096].

del nucleo genitore è una funzione rapidamente crescente dell'energia  $E_{k,\alpha}$ , ovvero di  $Q_\alpha$ , e dunque la riga più intensa dello spettro è quella dal livello fondamentale del nucleo genitore al livello fondamentale del nucleo figlio. Per riorganizzare la comprensione di questi dati sperimentali e prima della formulazione di una teoria da parte di Gamow et al., Geiger e Nuttall suggerirono, nel 1911<sup>4</sup>, una relazione empirica che collega la probabilità di decadimento  $\lambda_\alpha$  e l'energia totale, ovvero il  $Q$ -valore a disposizione del decadimento, per ogni catena isotopica

$$\log \lambda_\alpha = A(Z) Q_\alpha^{-1/2} + B(Z) \quad (5.18)$$

con  $A(Z)$  e  $B(Z)$  coefficienti che vanno determinati tramite fit sui dati sperimentali.

Prendendo l'esponente ad ogni membro della 5.18 si può anche scrivere

$$\lambda_\alpha(Q_\alpha) \propto e^{D(Z) Q_\alpha^{-1/2}} \quad (5.19)$$

<sup>4</sup>H.Geiger, J.M.Nuttall, "The ranges of the  $\alpha$  particles from various radioactive substances and a relation between range and period of transformation" - Philos. Mag. 22 (1911) 613-621

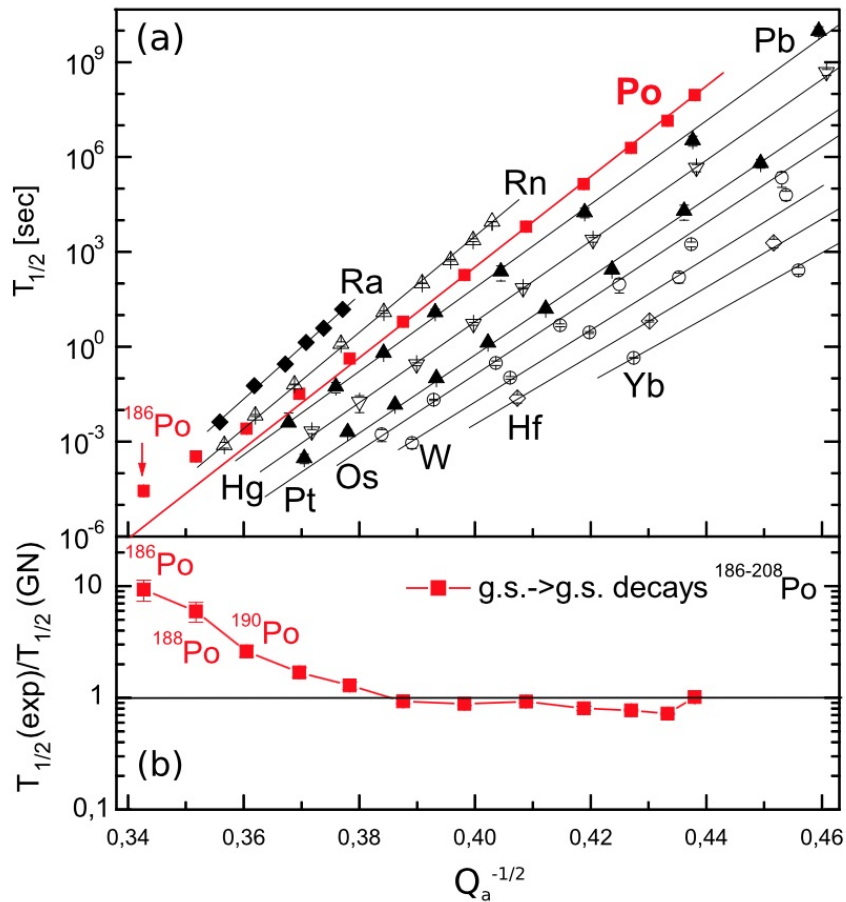


Figura 5.6: Dipendenza del tempo di dimezzamento  $T_{1/2}$  dall'inverso della radice quadrata del  $Q$ -valore, per i decadimenti  $\alpha$  di alcune catene isotopiche. Sono sovrapposte le previsioni secondo Geiger-Nuttal ed è in evidenza il comportamento del Po. (Andreyev et al., Phys. Lett. B 734 (2014) 203)

La relazione di Geiger e Nuttal descrive abbastanza bene i dati finché la dipendenza di  $\log \lambda_\alpha$  dal numero di neutroni si mantiene lineare.

Un risultato che senz'altro una teoria del decadimento alfa deve riprodurre, e la teoria di Gamow et al. entro opportune approssimazioni lo fa, è di riottenere la relazione di Geiger e Nuttal <sup>5</sup>.

In figura 5.6 è illustrato uno studio recente in cui, con la relazione di Geiger e Nuttal, si descrive la dipendenza da  $Q_\alpha^{-1/2}$  dei tempi di dimezzamento<sup>6</sup> per decadimento  $\alpha$  di un certo numero di catene isotopiche, evidenziando i problemi che insorgono nel caso degli isotopi leggeri del polonio "Po".

<sup>5</sup>Si veda l'Appendice C

<sup>6</sup>Il legame fra tempo di dimezzamento  $T_{1/2}$  e vita media  $\tau$  è dato nel paragrafo 6.1

### 5.2.1 Soglia di instabilità

Si vuole ora individuare per quali valori di  $A$  e  $Z$  il decadimento  $\alpha$  sia energeticamente possibile, tenendo conto del fatto che in ogni decadimento una parte dell'energia di massa del genitore è convertita in energia cinetica dei prodotti del decadimento.

Dato che la massa di un nucleo equivale alla somma delle masse dei nucleoni costituenti meno l'energia totale di legame divisa per  $c^2$ , e dato che nel decadimento  $\alpha$  i nucleoni non cambiano natura, si ha che il decadimento può aver luogo soltanto se accompagnato da un aumento dell'energia di legame per nucleone nei prodotti finali, rispetto al nucleo genitore.

Analizzando l'andamento dell'energia media di legame per nucleone  $\langle B \rangle \equiv |B/A|$  in funzione di  $A$ , come mostrata in figura 4.5, ed essendo il  $^{56}\text{Fe}$  il nuclide più stabile, ciò è possibile soltanto nella regione dove  $\partial\langle B \rangle/\partial A < 0$  e contemporaneamente  $A > 60$ .

Il  $Q$ -valore del decadimento  $\alpha$  espresso dalla 5.8 può essere scritto in termini delle energie medie di legame per nucleone  $\langle B \rangle_{X,Y,\alpha}$  dei nuclei coinvolti

$$\begin{aligned} Q &\equiv [M(A, Z) - M(A - 4, Z - 2) - M_\alpha] c^2 = \\ &= A(\langle B_Y \rangle - \langle B_X \rangle) - 4(\langle B_Y \rangle - \langle B_\alpha \rangle) > 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Essendo l'energia media di legame di un nucleone nella particella  $\alpha$ :  $\langle B_\alpha \rangle \simeq 7.1$  MeV, quindi minore di quelle per i nuclei pesanti coinvolti nel decadimento, ne segue che il secondo termine della 5.20 è positivo, da cui si ha che la soglia di instabilità deve essere decisamente superiore ad  $A = 60$ .

Utilizzando la formula di Weizsäcker 4.55 a meno del termine d'accoppiamento, ponendo  $Z(Z - 1) \simeq Z^2$ , e sviluppando in serie troncando al primo membro, il calcolo del  $Q$ -valore dà

$$\begin{aligned} Q &= 4\langle B \rangle_\alpha - [A\langle B \rangle_X - (A - 4)\langle B \rangle_Y] = B_\alpha - (B_X - B_Y) \simeq \\ &\simeq B_\alpha + 4b_V + 4 \left[ \frac{2}{3}b_S + b_C Z \left( 1 - \frac{Z}{3A} \right) \right] A^{-1/3} - 4b_{sim} \left( 1 - \frac{2Z}{A} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Sostituendo ora i valori dei parametri  $b_k$  come riportati in 4.56, si ottengono nel piano  $(Z, A)$ , le linee per

$$Q = \text{costante}$$

(figura 5.7) che individuano le *soglie di instabilità* del decadimento per emissione di particelle  $\alpha$  con energia cinetica  $E_k, \simeq Q$ . Si noti che si ottiene:

$$\begin{aligned} Q = 0 \text{ MeV} &\rightarrow A \approx 140 \\ Q = 4 \text{ MeV} &\rightarrow A \approx 200 \\ Q = 8 \text{ MeV} &\rightarrow A \approx 240 \end{aligned}$$

Il decadimento  $\alpha$  è quindi energeticamente possibile anche per nuclei con  $A < 200$ , ma siccome i decadimenti  $\alpha$  con  $Q < 4$  MeV sono caratterizzati dall'aver vite medie così lunghe da renderli praticamente inosservabili, si può affermare che i nuclei con  $A < 200$  sono essenzialmente nuclei stabili rispetto all'emissione  $\alpha$ .

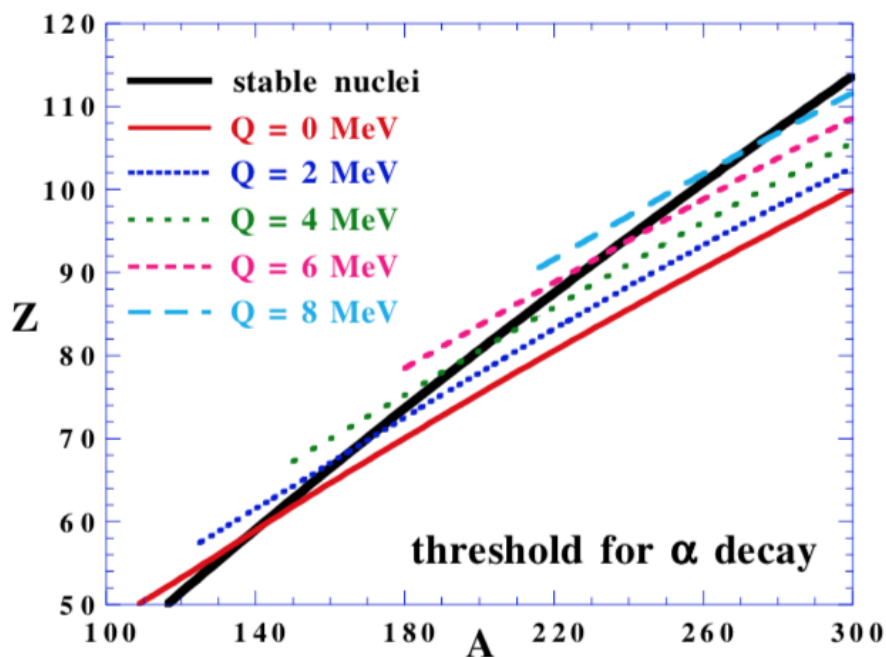


Figura 5.7: Linee di instabilità per il decadimento  $\alpha$ .

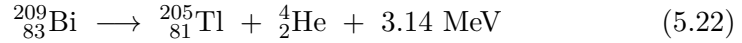
### 5.2.2 Teoria del decadimento $\alpha$

La teoria proposta nel 1928 da Gamow, e indipendentemente da Gurney e Condon per spiegare il decadimento  $\alpha$ , pur fornendo una descrizione quantitativa e predittiva del fenomeno è però basata su un approccio che si avvale di assunzioni e descrizioni fisiche approssimate. Se ne riportano qui le linee generali, mettendo in evidenza i risultati e la capacità di riprodurre la legge di Geiger-Nuttal, ma lasciando il calcolo completo di un caso semplificato all'Appendice C.

Le particelle  $\alpha$  emesse dai nuclei non esistono come tali nei nuclei prima del decadimento, ma si formano durante questo processo. Gamow formulò però la sua teoria ammettendo l'ipotesi base che almeno a sufficiente distanza dal centro di massa del sistema, il nucleo genitore possa essere descritto come un sistema costituito da "particella  $\alpha$  + nucleo figlio", in cui si assume quindi che la particella  $\alpha$  possieda una propria identità strutturale e si muova all'interno di una buca di potenziale.

L'energia potenziale del sistema nella sua interezza può allora essere rappresentata come l'energia del sistema "particella  $\alpha$  + nucleo figlio" considerati come due sottosistemi nucleari separati.

Ci si riferisca ad esempio al decadimento



energeticamente possibile ma che non viene in pratica osservato, data la sua lunghissima vita media pari a  $1.9 \times 10^{19}$  anni. In figura 5.8 è mostrata

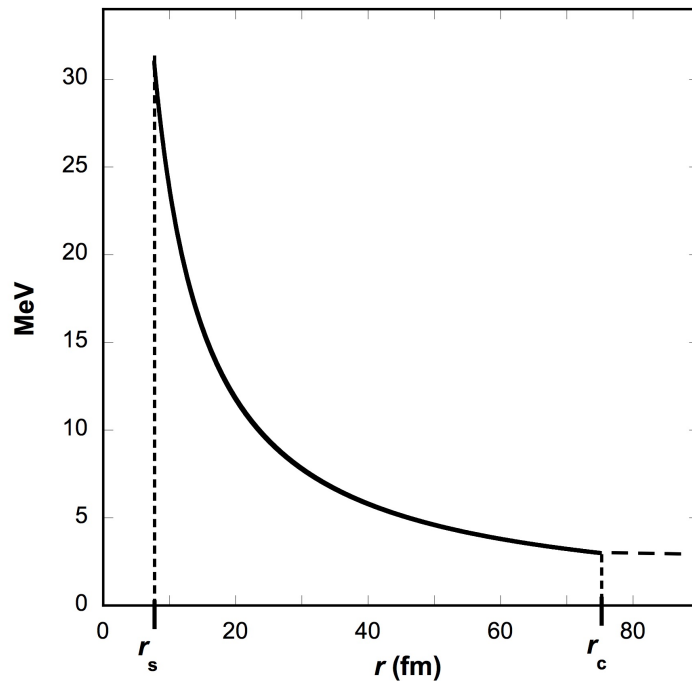


Figura 5.8: Energia potenziale elettrostatica di una particella  $\alpha$  rispetto a un nucleo di  ${}^{205}_{81}\text{Tl}$ .

l'energia potenziale elettrostatica  $V(r) \propto 2Ze^2/r$  della particella  $\alpha$  a una distanza  $r$  da un nucleo di tallio. È indicata anche la distanza  $r_s$  alla quale l'interazione nucleare comincia a diventare predominante. Immaginando i due nuclei come due sfere rigide di raggi dati dalla formula  $R_A = R_0 A^{1/3}$ , si può stimare  $r_s$  come

$$r_s \simeq R_0 [(A)^{1/3} + (4)^{1/3}] \sim 8.23 \text{ fm} \quad (5.23)$$

È circa a questa distanza, nella regione in prossimità della superficie del nucleo di bismuto (Bi), che si può considerare la particella  $\alpha$  come ormai formata.

In figura 5.8 è indicata anche la distanza  $r_c \simeq 75$  fm, che classicamente coincide con quella di massimo avvicinamento possibile al nucleo di tallio da parte di una particella  $\alpha$  di energia cinetica  $E_k = Q_\alpha$ , ovvero pari al  $Q$ -valore del decadimento analizzato, per cui

$$r_c = \frac{2Z_{Tl} e^2}{4\pi\epsilon_0 Q_\alpha} \quad (5.24)$$

Il parametro  $r_c$  viene anche detto *raggio esterno della barriera*.

Per quanto concerne il potenziale totale sentito dalla particella  $\alpha$ , all'esterno del nucleo si può assumere che coincida con quello coulombiano repulsivo che tende a 0 per  $r \rightarrow \infty$ .

All'interno del nucleo, per distanze inferiori ad  $r_s$ , la particella sentirà il potenziale attrattivo delle forze nucleari ma fino a un valore di  $r \approx \delta < r_s$ , al di sotto del quale perde significato l'ipotesi di immaginare la particella  $\alpha$  come una struttura dotata di una propria individualità entro il nucleo genitore.

Il potenziale globale potrà quindi essere descritto da un andamento come quello in figura 5.9, dove appare in grigio la zona in cui non ha più senso descrivere il fenomeno in termini di potenziale. Si modella quindi il processo di decadimento immaginando che la particella  $\alpha$  si trovi entro la buca di potenziale descritta e che per uscirne deva, avendo come energia a disposizione i 3.14 MeV del  $Q$ -valore, affrontare e "superare" la notevole barriera di potenziale coulombiano presente che alla distanza  $r = r_s$  vale, per il bismuto, circa 28.4 MeV.

Ciò è impossibile dal punto di vista classico, ma possibile ricorrendo all'effetto tunnel quantistico. Si immagina quindi che la particella  $\alpha$  si muova all'interno della buca di potenziale descritta e che per la gran parte del tempo venga riflessa dalle sue pareti che solo talvolta riesce ad attraversare per effetto tunnel.

La probabilità del decadimento può quindi essere espressa come il prodotto di due fattori in prima approssimazione indipendenti:

- la *frequenza* con la quale si può avere una particella  $\alpha$  con la propria individualità all'interno del nucleo;
- la *probabilità* che la particella  $\alpha$  superi la barriera di potenziale.

Si è in grado di dire qualcosa sul secondo fattore, la probabilità di superamento della barriera, il cui calcolo è svolto in modo approssimato nell'Appendice C per l'esempio del decadimento  $\alpha$  del bismuto qui considerato. Tale fattore è responsabile di quanto descritto dalla relazione di Geiger e Nuttal.

Dal calcolo si ottiene infatti, per la vita media e la probabilità di decadimento associata:

$$\tau_\alpha = \tau_0 e^G \quad \text{e,} \quad \lambda_\alpha = \frac{1}{\tau_0} e^{-G} = \lambda_0 e^{-G} \quad (5.25)$$

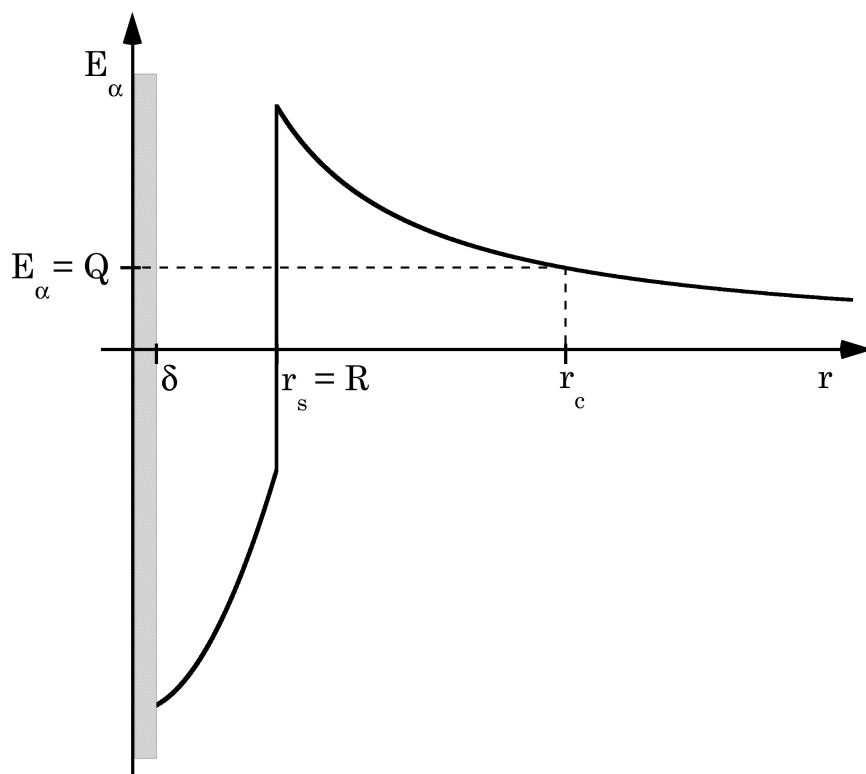


Figura 5.9: Schema dell'andamento del potenziale globale sentito da una particella  $\alpha$ .

dove  $G$ , detto fattore di Gamow vale, per energie non troppo alte

$$G \simeq \frac{Ze^2}{\epsilon_0 \hbar c \beta_\alpha} \sim (E_{k,\alpha})^{-1/2} \quad \text{con,} \quad \beta_\alpha = \frac{v_\alpha}{c} \quad (5.26)$$

essendo  $v_\alpha$  la velocità della particella  $\alpha$  fuori dalla barriera di potenziale, e  $\tau_0$  una funzione lentamente variabile, approssimabile ad una costante indipendente dal particolare nucleo considerato.

La grande estensione di possibili vite medie per decadimenti  $\alpha$  è quindi spiegata dalla presenza nell'esponente del fattore di Gamow che fa sì che piccole variazioni nell'energia delle particelle  $\alpha$  emesse determinino appunto grandi effetti sulle vite medie.

Assumendo ragionevolmente  $\tau_0 = 7.0 \cdot 10^{-23}$  s, si possono ad esempio calcolare i valori di  $\tau_\alpha$  riportati in tabella per alcune sequenze isotopiche, dove sono confrontati con i valori sperimentali corrispondenti.



	$Q_\alpha$ (MeV)	$r_s$ (fm)	$r_c$ (fm)	$G$	$\tau_{exp}$ (s)	$\tau_{th}$ (s)
${}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\text{Th}$	4.27	8.52	60.7	0.53	$2.0 \times 10^{17}$	$3.3 \times 10^{17}$
						( ${}^{234}_{90}\text{Th} \rightarrow {}^{234}_{91}\text{Pa} \rightarrow {}^{234}_{92}\text{U}$ )
${}^{234}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{230}_{90}\text{Th}$	4.86	8.49	53.3	0.51	$1.1 \times 10^{13}$	$1.1 \times 10^{13}$
${}^{230}_{90}\text{U} \rightarrow {}^{226}_{88}\text{Ra}$	4.77	8.45	53.1	0.51	$3.5 \times 10^{12}$	$3.9 \times 10^{12}$
${}^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn}$	4.87	8.41	50.9	0.50	$7.4 \times 10^{10}$	$7.4 \times 10^{10}$
${}^{222}_{86}\text{Rn} \rightarrow {}^{218}_{84}\text{Po}$	5.59	8.37	43.3	0.46	$4.8 \times 10^5$	$4.2 \times 10^5$
${}^{218}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{214}_{82}\text{Pb}$	6.11	8.33	38.7	0.43	$2.6 \times 10^2$	$1.6 \times 10^2$
						( ${}^{214}_{82}\text{Pb} \rightarrow {}^{214}_{83}\text{Bi} \rightarrow {}^{214}_{84}\text{Po}$ )
${}^{214}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{210}_{82}\text{Pb}$	7.84	8.28	30.1	0.36	$2.3 \times 10^{-4}$	$1.1 \times 10^{-4}$
						( ${}^{210}_{82}\text{Pb} \rightarrow {}^{210}_{83}\text{Bi} \rightarrow {}^{210}_{84}\text{Po}$ )
${}^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{206}_{82}\text{Th}$	5.41	8.24	43.7	0.47	$1.7 \times 10^7$	$5.8 \times 10^5$

È straordinario il livello con cui questa teoria semplice è in accordo con i risultati sperimentali, ricordando che copre scale temporali che vanno dall'età della Terra che è di circa  $1.45 \times 10^{17} s$ , fino a tempi dell'ordine di  $10^{-4} s$ . La discrepanza maggiore si ha nel caso del  ${}^{210}_{84}\text{Po}$ , che avendo un numero di neutroni magico (126) corrisponde a una shell chiusa.

Da quanto riportato in tabella si nota anche che un nucleo figlio di un decadimento  $\alpha$  può essere  $\beta$ -instabile.

### 5.3 Approccio perturbativo ai decadimenti

Il decadimento  $\alpha$  è quindi dovuto all'effetto tunnel attraverso la barriera coulombiana del nucleo e alle forze nucleari che permettono l'aggregazione stabile, entro la materia nucleare e per un sufficiente lasso di tempo, dei nucleoni che costituiscono una particella  $\alpha$ . Gli altri tipi di decadimenti nucleari possono invece essere visti come l'effetto di perturbazioni agenti sugli stati in cui si trovano le strutture che poi decadono, e se tali perturbazioni sono abbastanza piccole rispetto alle energie che caratterizzano gli stati di partenza, allora se ne può dare una trattazione abbastanza generale che ora verrà delineata, prima di passare alla trattazione dei decadimenti  $\beta$  e  $\gamma$ .

La soluzione dell'equazione di Schrödinger per un sistema fisico sottoposto a potenziali indipendenti dal tempo fornisce, per tale sistema, livelli energetici corrispondenti a *stati stazionari*.

Inoltre un sistema fisico quantistico originariamente in uno stato stazionario, permane indefinitamente in quello stato e non effettua transizioni (decadimenti) verso altri stati, a meno che non venga opportunamente perturbato. La possibilità che un sistema fisico quantistico sia trovato talvolta in uno stato e talvolta in un altro stato è descrivibile costruendo un'opportuna miscela di due o più stati, come ad esempio con la funzione d'onda  $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ , dalla quale discendono la probabilità  $|c_1|^2$  che il sistema da lei descritto sia trovato nello stato 1 e la probabilità  $|c_2|^2$  che sia trovato nello stato 2. Per potenziali indipendenti dal tempo anche  $c_1$  e  $c_2$  risultano indipendenti dal tempo, ma ciò non corrisponde ai risultati sperimentali che vengono dallo studio dei decadimenti, per i quali la probabilità di trovare un sistema in uno specifico stato dipende dal tempo.

Per affrontare il problema inerente ai decadimenti si adotta l'approccio secondo cui il potenziale agente ha una forma del tipo  $\Phi + \Phi'$ , dove  $\Phi$  è il potenziale nucleare responsabile degli stati stazionari, mentre  $\Phi'$  è un potenziale additivo e molto debole (perturbativo) che può determinare transizioni fra gli stati.

Trascurando in prima istanza  $\Phi'$ , si risolve l'equazione di Schrödinger per il potenziale  $\Phi$  ottenendo le funzioni d'onda *statiche* del nucleo. Si usano quindi quelle funzioni d'onda per calcolare le probabilità di transizione fra *stati stazionari* sotto l'influenza della perturbazione  $\Phi'$ .

Questa probabilità di transizione corrisponde alla costante  $\lambda$  di decadimento data dalla cosiddetta *seconda regola d'oro* di Fermi <sup>7</sup>

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \mathcal{M}'_{fi} \right|^2 \rho(E_f) \quad (5.27)$$

---

<sup>7</sup>Per la sua derivazione si veda ad esempio E. Gozzi, "Notes on Quantum Mechanics with Examples of Solved Problems" - Cap. 12)

con l'elemento di matrice dell'operatore di transizione  $\mathcal{M}'$  espresso da

$$\mathcal{M}'_{fi} = \langle \psi_f | \Phi' | \psi_i \rangle = \int \psi_f^* \Phi' \psi_i dV \quad (5.28)$$

dove l'integrale va esteso a tutto lo spazio.

Note le funzioni d'onda degli stati finale  $\psi_f$  e iniziale  $\psi_i$  si può dunque calcolare  $\mathcal{M}'_{fi}$ , da cui la probabilità di transizione  $\lambda$ , confrontabile con i risultati sperimentali non appena si conosca la densità degli stati finali accessibili dal sistema fisico,  $\rho(E_f) = dn_f/dE_f$ .

La probabilità di transizione cresce quindi al crescere del numero di stati finali accessibili col decadimento.

Si vedrà nel paragrafo 5.4.4 come Fermi abbia brillantemente utilizzato questo approccio per formulare la sua teoria sul decadimento  $\beta$ .

La densità degli stati finali dipende da due contributi, lo stato finale raggiunto dal nucleo dopo il decadimento e la "radiazione" emessa durante il decadimento. Si consideri dapprima lo stato finale del nucleo.

La soluzione dell'equazione di Schrödinger per il potenziale  $\Phi$  indipendente dal tempo fornisce gli stati stazionari del nucleo  $\psi_a(\vec{r})$ .

La funzione d'onda dipendente dal tempo per lo stato in questione è

$$\psi_a(\vec{r}, t) = \psi_a(\vec{r}) e^{-iE_a t/\hbar} \quad (5.29)$$

dove  $E_a$  rappresenta l'energia dello stato. La probabilità di trovare il sistema in questo stato è  $|\psi_a(\vec{r}, t)|^2$ , indipendente dal tempo, per uno stato stazionario. Per essere ora consistenti con la legge del decadimento radioattivo, la probabilità di trovare il sistema in decadimento sempre nello stesso stato dovrebbe diminuire col tempo come  $e^{-\lambda_a t} = e^{-t/\tau_a}$

$$|\psi_a(\vec{r}, t)|^2 = |\psi_a(\vec{r}, t = 0)|^2 e^{-t/\tau_a} \quad (5.30)$$

dove  $\tau_a = 1/\lambda_a$  è la vita media dello stato caratterizzato dalla costante di decadimento  $\lambda_a$ . Con ciò la 5.29 diventa

$$\psi_a(\vec{r}, t) = \psi_a(\vec{r}) e^{-iE_a t/\hbar} e^{-t/2\tau_a} \quad (5.31)$$

Il prezzo che si paga introducendo il termine esponenziale reale in  $\psi_a(\vec{r}, t)$  è la perdita della possibilità di determinare con esattezza l'energia dello stato, ovvero non si ha più uno stato stazionario.

Ricordando la relazione d'indeterminazione energia-tempo, se uno stato visse per sempre,  $\Delta t = \infty$  e l'energia ad esso associata potrebbe essere determinata con esattezza, poichè  $\Delta E = 0$ . Se invece lo stato vive per un tempo  $\tau$ , non si può determinare l'energia ad esso associata se non con un'incertezza  $\Delta E \cong \hbar/\tau$ .

Il problema può essere affrontato in modo rigoroso ottenendo la distribuzione dei livelli energetici dalla trasformata di Fourier di  $e^{-t/2\tau_a}$ <sup>8</sup>. Risulta in tal caso che la probabilità di osservare il sistema in un intorno energetico compreso fra  $E$  ed  $E + dE$ , in prossimità del valore energetico  $E_a$ , è data da

$$P(E)dE \propto \frac{dE}{(E - E_a)^2 + \Gamma_a^2/4} \quad (5.32)$$

dove  $\Gamma_a = \hbar/\tau_a$  è detta *larghezza* dello stato  $a$ . In pratica ciò si risolve nel

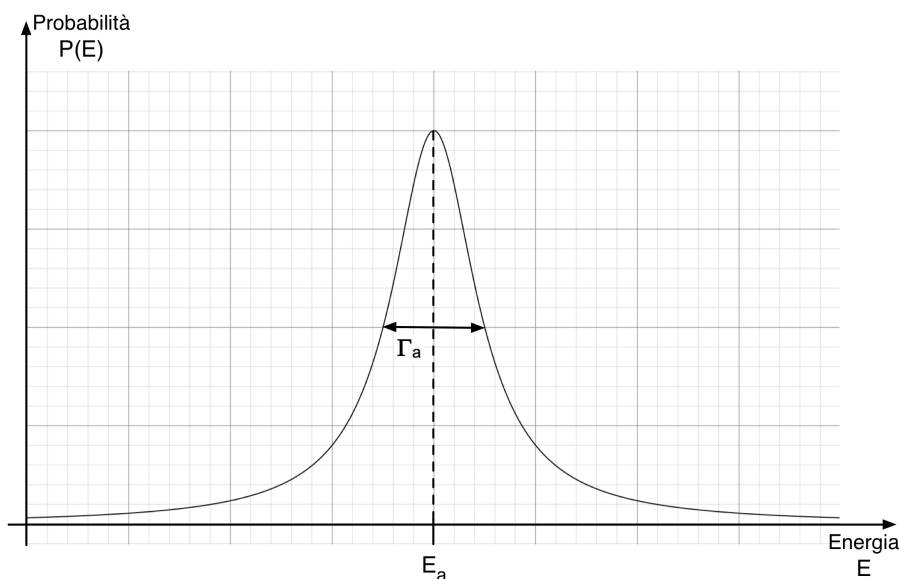


Figura 5.10: Densità di probabilità  $P(E)$ .

fatto che una qualunque misura dell'energia di un tale stato non è assolutamente detto che fornisca il valore  $E_a$ , anche se esso rappresenta il valor medio di più misure effettuate. La larghezza  $\Gamma_a$  quantifica l'impossibilità di determinare con precisione l'energia dello stato  $a$ , e ciò è intrinseco nella natura di tale fenomeno, non frutto di limitazioni tecniche nell'effettuazione della misura stessa. Si osservi che geometricamente  $\Gamma_a$  corrisponde alla larghezza a metà altezza della curva che rappresenta  $P(E)$ , come in figura 5.10  $P(E)$  è proporzionale a quella che vien detta detta funzione di distribuzione *Lorentziana* o di Cauchi, o ancora di Breit-Wigner, e si noti che ha la stessa forma analitica della funzione che descrive i fenomeni di risonanza.

Parlare di transizioni fra diversi stati per un sistema, anche se questi non sono caratterizzati da valori esatti e univocamente definiti di energia, è comunque possibile purchè le larghezze di tali stati siano piccole a confronto delle differenze fra i valori medi di energia che caratterizzano ognuno degli

<sup>8</sup>Si veda in Appendice ??

stati stessi.

Gli stati di interesse nucleare sono caratterizzati da vite medie  $\tau$  tipicamente superiori a  $10^{-12}$  s, corrispondenti a larghezze  $\Gamma < 10^{-10}$  MeV. Gli stati nucleari a breve vita media che vengono popolati durante gli ordinari processi di decadimento, e anche in molte reazioni nucleari, hanno separazioni energetiche dell'ordine di  $10^{-3}$  MeV o superiori. È dunque molto improbabile che determinando l'energia di uno stato nucleare finale raggiunto dopo un processo di decadimento tramite ad esempio la misura dell'energia delle radiazioni emesse, la sovrapposizione energetica fra le distribuzioni di due diversi stati finali  $a$  e  $b$  possa generare confusione nel riconoscere lo stato finale effettivamente raggiunto come risultato del decadimento.

È in tal caso ragionevole parlare di stati discreti *pseudo-stazionari* e con-

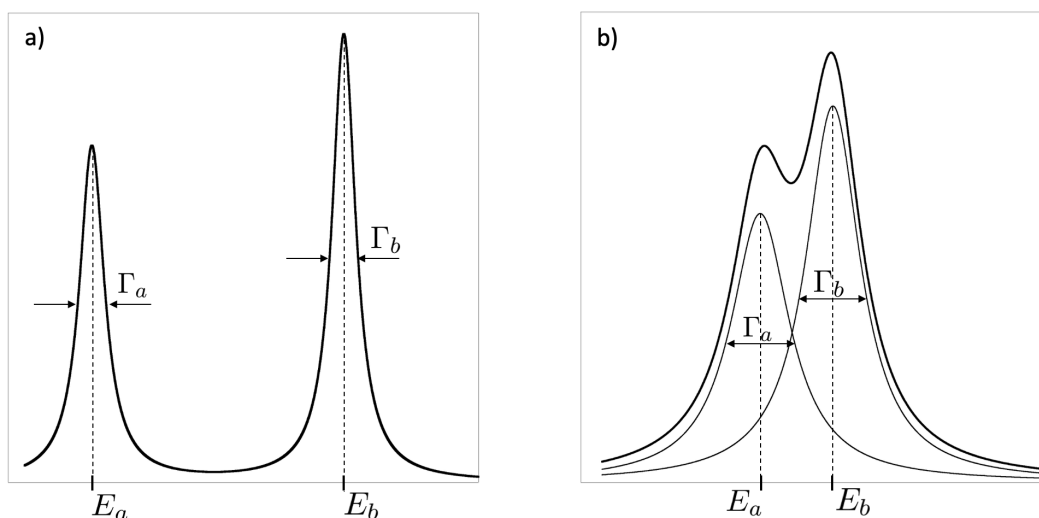


Figura 5.11: Se le larghezze di due stati instabili sono piccole rispetto alla loro separazione energetica, come in a), i due stati sono ben riconoscibili; se invece i due stati si sovrappongono e si mescolano come in b), allora non posseggono funzioni d'onda ben distinte l'una dall'altra.

cludere che essi non contribuiscono alla densità degli stati finali in quanto uno solo di essi può essere raggiunto in un ben determinato processo di decadimento. In tal caso le "radiazioni" emesse sono le sole a contribuire alla densità  $\rho(E_f)$  degli stati.

Senza entrare nello specifico del tipo di decadimento, in generale si vede che considerando soltanto la probabilità di formazione di uno stato nucleare di energia  $E_f$ , vanno prese in considerazione tutte le possibili radiazioni di energia  $E_i - E_f$ .

Tale radiazione può essere emessa in qualsiasi direzione e in qualsiasi stato di polarizzazione, e se consiste di particelle dotate di spin, allora questo può avere qualsiasi possibile orientazione.

Questo modo di contare gli stati finali accessibili permette di ottenere la densità degli stati.

Quando nel prossimo capitolo si affronterà l'equazione differenziale per la descrizione del decadimento radioattivo di una sostanza, si supporrà implicitamente che la probabilità di decadimento  $\lambda$  sia contemporaneamente piccola e indipendente dal tempo. Se  $\Phi'$  è indipendente dal tempo, allora il valore di  $\lambda$  calcolato tramite la regola d'oro di Fermi 5.27 è anche indipendente dal tempo.

Con queste condizioni l'effetto di  $\Phi'$  sugli stati stazionari  $a$  e  $b$  di  $\Phi$  dá la funzione d'onda perturbata

$$\psi_a \longrightarrow \psi_a + \frac{\Phi'_{ba}}{E_b - E_a} \psi_b \quad (5.33)$$

e il sistema inizialmente nello stato  $a$  ha una probabilità proporzionale a  $|\Phi'_{ba}|^2$  di trovarsi poi nello stato  $b$ . Si considera questo come un *decadimento* dallo stato  $a$  allo stato  $b$ .

La connessione fra l'effettiva probabilità di decadimento per un sistema costituito da un grande numero di nuclei e quanto sopra descritto per la probabilità (microscopica) di decadimento di un singolo nucleo, implica che ogni nucleo del sistema macroscopico decada emettendo radiazioni in modo assolutamente indipendente da tutti gli altri, compresi quelli a lui spazialmente più vicini. Quest'ipotesi è fondamentale per poter confrontare le costanti di decadimento misurate con quelle calcolate.

Parlando di particelle, solo una piccola parte di esse è stabile: l'elettrone, il protone, i neutrini e il fotone. Le particelle che decadono per effetto delle interazioni deboli, come si vedrà, sopravvivono abbastanza da poter percorrere, dopo essere state prodotte e con le energie cinetiche tipiche che le caratterizzano, tragitti sufficientemente lunghi (da significative frazioni del millimetro sino ad alcuni metri) da permetterne la misura del cosiddetto *tempo di volo*, o il tracciamento; le risonanze adroniche che invece decadono per effetto delle interazioni forti, hanno vite medie così brevi che anche se prodotte con notevoli energie cinetiche, non sono in grado di percorrere tragitti sufficienti a permetterne il tracciamento prima che decadano.

I concetti introdotti trovano ampio utilizzo in svariati ambiti della fisica e nel seguito, oltre che per i già citati fenomeni di decadimento, li si ritroverà in particolare a proposito della descrizione di sezioni d'urto e dell'individuazione di particelle fra i prodotti di reazioni.