

Figure 13: Determinazione del range a partire da una curva di trasmissione ( $I$  è il numero di particelle trasmesse per unità di tempo in funzione delle spessore  $t$  essendo  $I_0$  il numero di particelle entranti) di un fascio di particelle in funzione dello spessore  $x$  attraversato ( $R_m$  è il range medio,  $R_e$  è il range estrapolato).

fluttuazione puo' portarci ad avere una sovrapposizione della regione di risposta per le due particelle. Un esempio di tale problema si puo' vedere in fig. 12, ove, fissando l'attenzione, per un determinato valore di impulso (definito dalla barra verticale), sulla diversa risposta attesa dalle curve continue (Bethe-Bloch), si nota in realtà uno sparpagliamento della risposta attorno al valore atteso.

### 2.3 Percorso residuo (range)

Come appena discusso, dopo aver attraversato un assorbitore un fascio monocromatico risulterà degradato in energia, non sarà più monoenergetico e presenterà un angolo diffusione. Fino ad un certo spessore, essenzialmente tutte le particelle saranno trasmesse, ma al di là di questo alcune delle particelle non emergeranno più. Ad uno spessore  $R$ , chiamato *range* medio, metà delle particelle verrà fermata e infine, con uno spessore sufficientemente grande, nessuna particella emergerà. Il comportamento del numero di particelle trasmesse rispetto allo spessore dell'assorbitore è mostrato in figura 13.

Se si conosce il potere ionizzante è possibile calcolare il percorso(medio) residuo (*range*) di una particella in un dato mezzo, essendo questo definito come il cammino che la stessa puo' compiere prima di perdere tutta la sua energia.

$$R(E) = \int_0^R dx = \int_{E_0}^0 \frac{dE}{dE/dx} \quad (10)$$

Per una particella di carica  $z$ , massa  $M$  ed energia  $E_0$ , nella regione non relativistica, ove, dalla 9, possiamo scrivere (trascurando il termine logaritmico)  $dE/dx \sim \frac{z^2}{v^2} \sim \frac{Mz^2}{E}$ ,

$$R = \int_0^{E_0} -\frac{dE}{dE/dx} \approx \frac{K}{Mz^2} \int_{E_0}^0 E dE = \frac{K}{Mz^2} E_0^2 \quad (11)$$

In figura 14 è possibile osservare la dipendenza del range dall'energia per particelle di massa diversa.

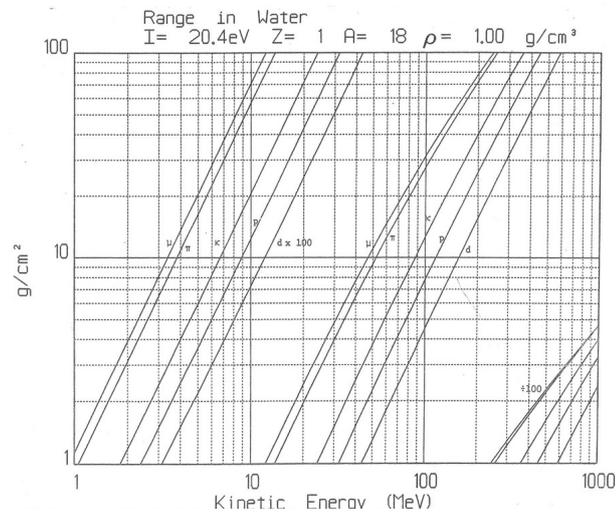


Figure 14: Range di muoni, pioni, kaoni, protoni e deutoni in acqua

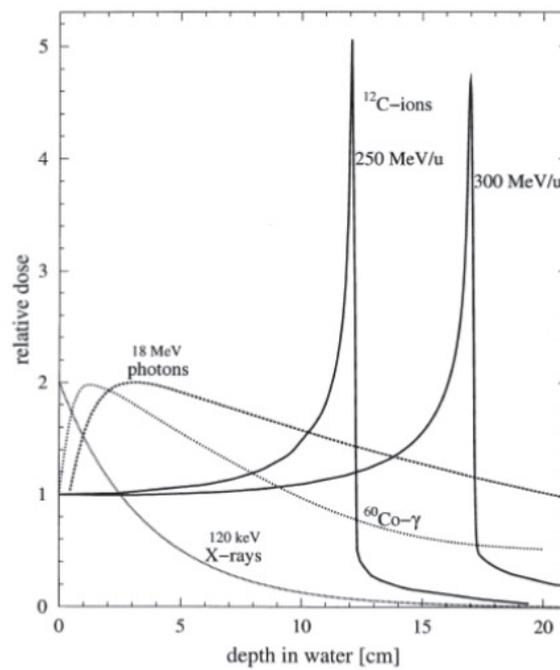


Figure 15: Energia (dose) depositata in funzione della profondità di penetrazione da protoni un materiale. Si possono osservare i picchi di Bragg

Le considerazioni fatte sul carattere stocastico e la conseguente fluttuazione della perdita di energia hanno ovviamente una conseguenza anche sul range, e sono la causa (assieme alla possibile presenza di piccole deviazioni angolari per urti con i nuclei atomici) delle fluttuazioni dello stesso (*range straggling*). Ovviamente tali considerazioni hanno senso fino a che l'interazione coulombiana è l'unica interazione presente (e quindi la formula di B.-B. è applicabile).

### Osservazioni

- Come visibile nella figura 14 a parità di energia cinetica il range di particelle di massa diversa ha una rilevante dipendenza da quest'ultima (nella regione non relativistica) per cui potrà essere utilizzato sperimentalmente per determinare la massa della particella una volta nota la sua energia o impulso.
- il calcolo del range di una particella carica è di particolare rilievo in ambito medico ove adroni ionizzanti sono utilizzati a scopi terapeutici. La dipendenza da  $1/v^2 (\sim 1/E)$  della perdita di energia per unità di cammino comporta che l'energia si depositi massimamente nell'ultima parte del cammino, nel cosiddetto *picco di Bragg* (si veda in fig. 15 un esempio dell'andamento della perdita di energia in funzione della profondità di penetrazione). Con un buon controllo dell'energia e del conseguente range degli adroni è possibile concentrare il rilascio di energia nella regione da trattare.

## 2.4 Perdita di energia per irraggiamento degli elettroni

Come abbiamo visto una particella carica di massa  $M \gg m$  perde energia secondo quanto previsto dalla formula di Bethe-Bloch. Nel caso di elettroni e positroni, la perdita di energia per ionizzazione differisce da quella di particelle pesanti, sia perché la massa del proiettile è pari a quella del bersaglio sia perché (nel caso dell'elettrone) abbiamo un urto tra particelle identiche. C'è però un'altra grande differenza tra elettroni (positroni) e particelle pesanti ed è la possibilità di perdere energia per irraggiamento, che nel caso degli elettroni risulta essere una componente importante al crescere dell'energia. Quando una particella carica passa nelle vicinanze di un nucleo ne viene accelerata dal campo coulombiano che ne deflette la traiettoria e provoca l'emissione di radiazione; per le particelle pesanti questo effetto è tipicamente trascurabile (a meno di andare ad energia elevatissima), ma essendo l'accelerazione inversamente proporzionale alla massa della particella incidente (e la potenza emessa proporzionale al quadrato della massa) nel caso degli elettroni quest'effetto diventa presto competitivo con la perdita di energia per ionizzazione e ad alte energie diventa dominante. La radiazione emessa viene chiamata radiazione di frenamento (o *Bremsstrahlung*).

I processi dominanti sono dati dall'interazione con i nuclei ( $e + (Z, A) \rightarrow e + \gamma + (Z, A)$ ) e sono rappresentati in figura 16. Esiste tuttavia anche un contributo, meno importante, dovuto al frenamento nel campo degli elettroni atomici. La teoria di questo processo, dovuta a Bethe e Heitler (1934) ci dà la seguente formula per la perdita di energia per frenamento di una particella di energia  $E_0$  che entra in un mezzo di numero atomico  $Z$ , densità  $\rho$ , massa atomica  $A$ :

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = \frac{E}{L_R} \quad (12)$$

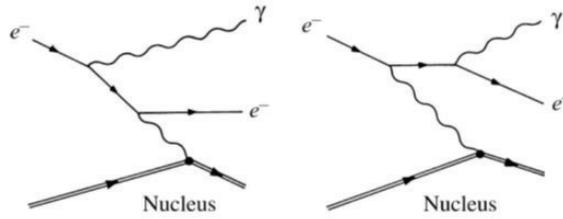


Figure 4.9 Dominant Feynman diagrams for the bremsstrahlung process  $e^- + (Z, A) \rightarrow e^- + \gamma + (Z, A)$

Figure 16: Meccanismi alla base della radiazione di frenamento

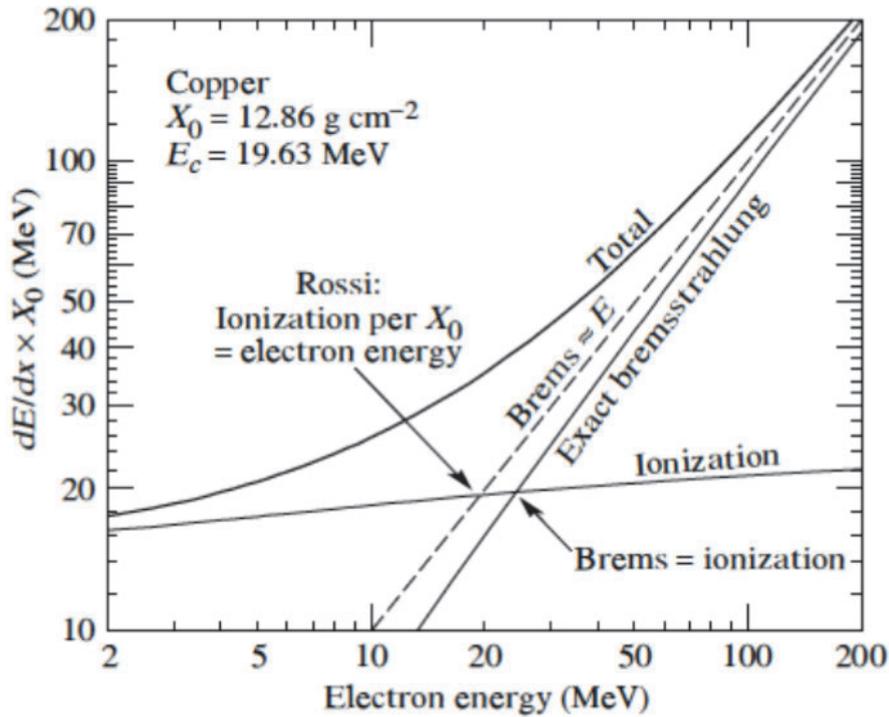


Figure 17: Perdita di energia percentuale di elettroni e positroni per unita' di lunghezza di radiazione in rame.

ovvero

$$E(x) = E_0 e^{-\frac{x}{L_R}}$$

essendo

$$L_R^{-1} = \ln \left( \frac{183}{Z^{\frac{1}{3}}} \right) \frac{4r_0^2 N_A^2 Z^2 \alpha \rho}{A}$$

con  $\alpha$  la costante di struttura fine, tutti gli altri simboli già definiti in precedenza e  $L_R$  denominata **lunghezza di radiazione**, la distanza dopo la quale l'energia dell'elettrone si riduce mediamente a  $1/e$  di quella iniziale.

Lo spettro di energia dei fotoni emessi va da 0 a  $E_0$ , con  $\langle \theta \rangle \simeq mc^2/E_0$ , indipendente dall'energia del fotone emesso.

A scopo informativo si considerino i seguenti valori di  $L_R$  per alcuni materiali:  $L_R = 36$  cm ( $H_2O$ ), 9 cm ( $Al$ ), 1.7 cm ( $Fe$ ), 0.56 cm ( $Pb$ ).

### 2.4.1 Osservazioni

1. La perdita di energia per Bremsstrahlung ha un andamento esponenziale e porta quindi ad una dissipazione dell'energia molto piu' veloce di quella per ionizzazione
2. La perdita di energia per unità di cammino per Bremsstrahlung è lineare con  $E$  e quindi vi sarà un'energia al di là della quale

$$\left(\frac{dE}{dX}\right)_{rad} > \left(\frac{dE}{dX}\right)_{ion}$$

(ricordiamo che la perdita di energia per ionizzazione tende all'incirca a saturare alle alte energie). Il valore di energia alla quale

$$\left(\frac{dE}{dX}\right)_{rad} = \left(\frac{dE}{dX}\right)_{ion}$$

è detto energia critica  $E_c$ . Risulta che  $E_c \sim 600/Z$  MeV, per cui  $E_c$  varia da circa una decina a centinaia di MeV lungo la tavola periodica.

3.  $L_R$  ha una forte dipendenza dallo  $Z$  del mezzo ( $\sim Z^{-2}$ ).
4.  $\left(\frac{dE}{dX}\right)_{rad} \propto 1/m_e^2$  nel caso dell'elettrone, per cui risulta, nel caso di una particella di massa  $M$ :  $\left(\frac{dE}{dX}\right)_{rad} \propto 1/M^2$ . Ne viene che la perdita di energia per radiazione nel caso di una particella di massa  $M$  è  $\frac{m_e^2}{M^2}$  volte piu' piccola che per gli elettroni; ad esempio, nel caso d un protone si ha  $\left(\frac{dE}{dX}\right)_{rad}^{prot} \simeq 10^{-6} \left(\frac{dE}{dX}\right)_{rad}^{el}$ .

Se ne deduce facilmente che la radiazione di frenamento è un fenomeno di rilievo solo per elettroni e positroni a meno di essere interessati ad energie molto elevate.