

5.4 Radioattività β

I meccanismi che coinvolgono elettroni e nucleo di uno stesso atomo sono svariati e qui si accenna dapprima alla *conversione interna*, per poi soffermarsi più ampiamente sul *decadimento β* .

5.4.1 Conversione interna

In un atomo la sovrapposizione spaziale tra la funzione d'onda di un suo elettrone, particolarmente uno di quelli delle shell più interne, e quella del suo nucleo non è e mai nulla, c'è quindi una probabilità finita che un elettrone si trovi talvolta dentro il nucleo del proprio atomo. Quando questo si verifica l'elettrone ha la possibilità di accoppiarsi elettromagneticamente ad uno stato energetico eccitato del nucleo acquisendone direttamente l'energia associata, ovvero senza la preventiva produzione di un raggio γ . In tal caso l'elettrone viene emesso dall'atomo, non dal nucleo, con un'energia cinetica $E_{k,e}$ pari all'energia di transizione E^* dello stato eccitato del nucleo, equivalente alla differenza, moltiplicata per c^2 , fra la massa del nucleo eccitato e dello stesso non eccitato, meno l'energia atomica B_e di legame dell'elettrone

$$E_{k,e} = E^* - B_e \quad (5.34)$$

Il processo di conversione interna non determina quindi una variazione del numero atomico dell'atomo coinvolto, ma soltanto una sua "ionizzazione". La gran parte degli elettroni emessi per conversione interna provengono dal-

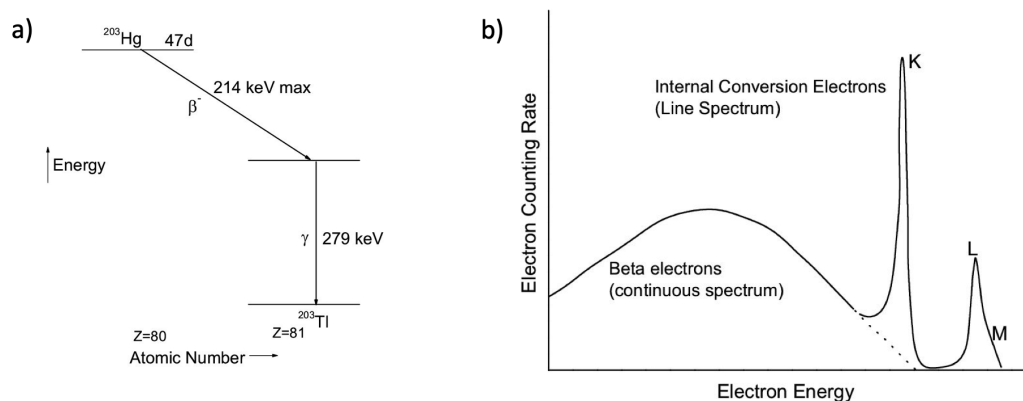


Figura 5.12: In a) lo schema di decadimento β del mercurio ^{203}Hg . In b) lo spettro d'emissione elettronica del ^{203}Hg , dove sono evidenti, oltre alla parte continua tipica dello spettro d'emissione β , anche i picchi dell'emissione atomica per conversione interna dalle shell K, L ed M.

le shell K, le più vicine ai nuclei. Può essere che l'energia d'eccitazione di uno stato nucleare non sia sufficiente ad espellere un elettrone atomico dalla

shell K, ma lo sia per elettroni delle shell L o M di quel nucleo.

Dopo l'emissione dell'elettrone per conversione interna avviene tipicamente che un elettrone di una shell meno legata dello stesso atomo cada a riempire la posizione lasciata libera nella shell più interna, con la concomitante emissione di un raggio X caratteristico del salto energetico effettuato.

In base a quanto descritto si desume che lo spettro d'emissione di elettroni per conversione interna deve essere "discreto".

5.4.2 Decadimento β

Un nucleo con sovrabbondanza o viceversa con scarsità di neutroni, in cui cioè il rapporto N/Z è maggiore o rispettivamente minore che non per i nuclei stabili, può trasformarsi in un nucleo più stabile emettendo un elettrone o rispettivamente un positrone. Questo processo è chiamato *decadimento β* e viene indicato come in 5.5b e in 5.5c, distinguendo in β^- , il primo ad essere osservato sperimentalmente da Rutherford nel 1900, e β^+ a seconda che si tratti dell'emissione di elettroni o positroni. Per la conservazione della carica elettrica in questi casi il numero di protoni del nucleo figlio è o maggiore o rispettivamente minore di un'unità rispetto al nucleo genitore, senza peraltro che ciò conduca a una variazione del numero complessivo di nucleoni, fra genitore e figlio.

In pratica ciò significa che all'interno del nucleo genitore si è avuta o la trasformazione di un neutrone in un protone, nel caso del decadimento β^- , o la trasformazione di un protone in un neutrone, nel caso del decadimento β^+ . Ricordando che i valori delle masse del protone, del neutrone e dell'elettrone (uguale a quella del positrone) sono rispettivamente $938.27 \text{ MeV}/c^2$, $939.56 \text{ MeV}/c^2$ e $0.511 \text{ MeV}/c^2$, si deduce che il decadimento β^- è energeticamente permesso anche per neutroni liberi che hanno una vita media $\tau_n = 881.5 \text{ s}$, mentre invece non lo è il decadimento β^+ per protoni liberi, che infatti risultano stabili con un limite inferiore per la vita media di $2.2 \cdot 10^{29}$ anni. La possibilità di decadimenti β^- e soprattutto β^+ , nei nuclei dipende dalle energie di legame relative degli isobari con diversi valori di Z ed N.

Un nucleo con un numero di neutroni inferiore rispetto a un corrispondente isobaro stabile, ovvero con un eccesso di protoni, può ridurre di un'unità la propria carica anche assorbendo un elettrone da un orbitale atomico del proprio atomo, tipicamente da un orbitale K. Questo processo è appunto detto *cattura K*.

In seguito a questa cattura, un elettrone da un orbitale più esterno casca nell'orbitale dell'elettrone catturato dal nucleo, con la conseguente emissione di uno o più raggi-X. Anche in questo caso il numero di nucleoni del nucleo resta comunque invariato.

Nelle misure sui decadimenti β le uniche particelle che venivano osservate come prodotti di decadimento erano elettroni o positroni assieme al corrispondente nucleo figlio; ciò aveva condotto inizialmente a pensare che si trattasse di un processo di disintegrazione in due corpi, come il decadimento α . In tal caso, applicando qui la corretta forma relativistica della conservazione dell'energia nel sistema del centro di massa del nucleo X genitore, per l'energia totale E_e dell'elettrone si dovrebbe avere, come mostrato nella relazione 5.68 del paragrafo 5.6

$$E_e = \frac{M_X^2 c^2 + m_e^2 c^2 - M_Y^2 c^2}{2M_X}$$

e di conseguenza, per l'energia cinetica $E_{k,e}$ dell'elettrone

$$E_{k,e} = \frac{M_X^2 c^2 + m_e^2 c^2 - M_Y^2 c^2}{2M_X} - m_e c^2$$

Ci si attendeva, in base a quest'ipotesi e come nel caso del decadimento α , che il prodotto piú leggero del decadimento, l'elettrone o il positrone, raccolta la gran parte dell'energia a disposizione del decadimento la mostrasse in uno spettro discreto con un unico valore, un picco ben definito centrato attorno ad $E_{k,e}$.

Gli spettri misurati di emissione β hanno invece un andamento continuo, a partire da un valore minimo, compatibile con zero, fino ad annullarsi in corrispondenza ad un valore massimo che entro le precisioni sperimentali, corrisponde ad $E_{max} \cong E_{k,e}$. Quando gli spettri β furono osservati per le prime volte ci fu anche la tentazione di mettere in discussione la validità di un principio che fino ad allora era apparso fermo e incrollabile, ovvero la conservazione dell'energia per un sistema fisico isolato⁹, e un nucleo durante il tempo necessario al suo decadimento β , può senz'altro essere considerato come un sistema fisico perfettamente isolato.

Se inoltre il decadimento β fosse proprio in due soli corpi nello stato finale, ciò implicherebbe che neppure il momento angolare totale del nucleo genitore sarebbe conservato nel decadimento. Siccome infatti il numero di nucleoni, fermioni con spin semi-intero pari ad $\hbar/2$, resta invariato fra nucleo genitore e figlio, indipendentemente da qualsiasi possibile variazione di momento angolare orbitale che deve oltretutto necessariamente essere pari ad un multiplo intero di \hbar , il fatto che nello stato finale ci sia un elettrone, che è anche un fermione con spin pari ad $\hbar/2$, implica che il momento angolare non si conserverebbe se il decadimento β avvenisse secondo le

$$\begin{aligned} \frac{A}{Z}X &\longrightarrow \frac{A}{Z+1}Y + e^- & , & & \frac{A}{Z}X &\longrightarrow \frac{A}{Z-1}Y + e^+ \\ & & & & \frac{A}{Z}X + e_K^- &\longrightarrow \frac{A}{Z-1}Y \end{aligned} \quad (5.35)$$

⁹Niels Bohr fu per un pó uno dei piú ferventi sostenitori di quest'ipotesi!

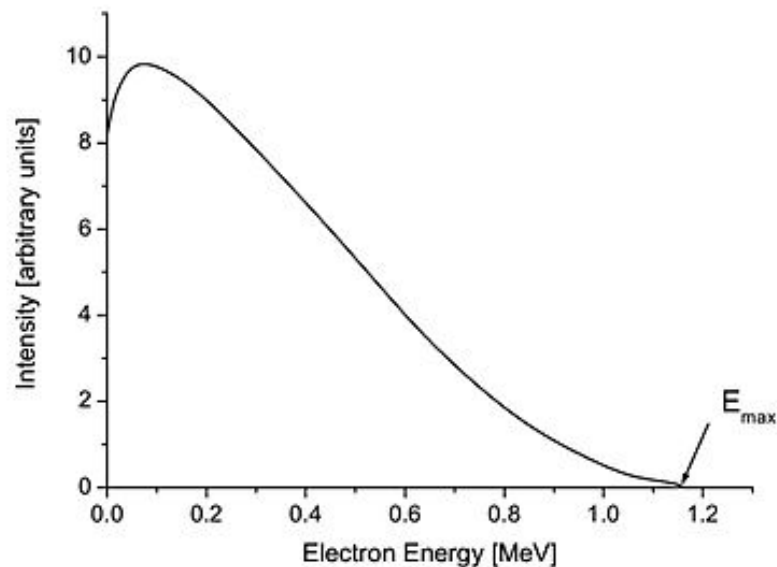


Figura 5.13: Spettro continuo dell'energia degli e^- emessi nel decadimento β^- del bismuto ($^{210}_{83}\text{Bi}$).

Ma tutto questo, in conseguenza di quanto affermato da un noto teorema di Emmy Noether¹⁰ sul legame esistente fra simmetrie di un sistema fisico e quantità conservate, avrebbe anche implicato che l'universo non è isotropo, e che inoltre ci devono essere un sistema di coordinate assoluto e una scala temporale assoluta, con le ovvie conseguenze

A *togliere le castagne dal fuoco* che avrebbe potuto *bruciare* gran parte della fisica esistente venne Wolfgang Pauli, che nel 1930 propose l'esistenza di un'ulteriore particella, di "molto difficile rivelazione"¹¹, che nel corso del decadimento β venisse emessa assieme all'elettrone/positrone e al nucleo figlio. Come è mostrato in Appendice ??, un decadimento in almeno tre corpi dá ragione dell'andamento continuo degli spettri energetici e non solo.

La conservazione della carica elettrica richiede che la particella proposta da Pauli sia neutra. Siccome inoltre le energie cinetiche massime degli elettroni/positroni emessi nei decadimenti β corrispondono sostanzialmente all'energia che avrebbero se il decadimento fosse in due soli corpi, se ne deduce che la massa di tale particella è molto piccola, sostanzialmente compatibile

¹⁰Vedi corso di Introduzione alla Fisica Teorica.

¹¹Per avere una prima conferma sperimentale diretta dell'esistenza del neutrino fu infatti necessario attendere ben 26 anni, quando nel 1956 Cowan e Reines riuscirono a rivelare inequivocabilmente antineutrini elettronici provenienti da un reattore nucleare, come descritto nel paragrafo 9.5.

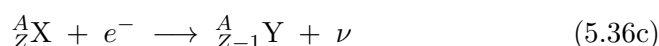
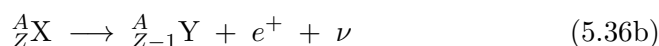
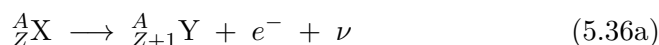
con *zero*.

Uno dei compiti di questa particella era anche di garantire la conservazione del momento angolare nel decadimento β , e da ciò consegue che deve essere un fermione con momento angolare di spin pari ad $\hbar/2$.

Le caratteristiche dedotte per questa particella, a meno della massa, la fanno in un certo qual modo assomigliare a un neutrone, ed è per questo che E. Fermi la chiamò *neutrino*, indicata dalla lettera ν . In capitoli successivi si riprenderà approfondendolo, il filo cronologico dalla formulazione dell'ipotesi dell'esistenza del neutrino, introducendo altre sue interessanti e importanti proprietà, e analizzandone soprattutto la connessione con quanto concerne l'interazione *debole*.

Qui di seguito si vedranno più specificamente alcuni fatti direttamente connessi con la fenomenologia del decadimento β nucleare.

Grazie all'introduzione del neutrino le 5.35 si possono intanto più correttamente scrivere come



che però, come si vedrà nel paragrafo 9.5, non è ancora la forma definitivamente corretta.

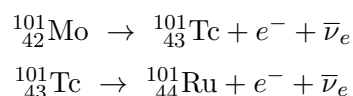
Sperimentalmente si trova che in una sequenza isobarica il nucleo con massa inferiore è stabile rispetto al decadimento β .

Considerando i nuclei con numero di massa A dispari si vedano come esempio gli isobari con $A = 101$. In tal caso l'isobaro di massa minima è il rutenio ${}^{101}_{44}\text{Ru}$, un nuclide pari-dispari che per quanto visto nei paragrafi 4.2 e 4.3.8, è in corrispondenza al minimo della parabola che descrive la sequenza isobarica. Isobari con più neutroni, quali ${}^{101}_{42}\text{Mo}$ e ${}^{101}_{43}\text{Tc}$, decadono convertendo un neutrone del nucleo in un protone secondo la



Il numero atomico di ogni nucleo figlio è quindi superiore di un'unità a quello del nucleo genitore. Nel resto di questo paragrafo si userà la simbologia completa e corretta per indicare i neutrini (e gli antineutrini) che sono parte dei decadimenti considerati, anche se il senso esatto di ciò apparirà chiaro nel paragrafo 9.5.

Si ha dunque



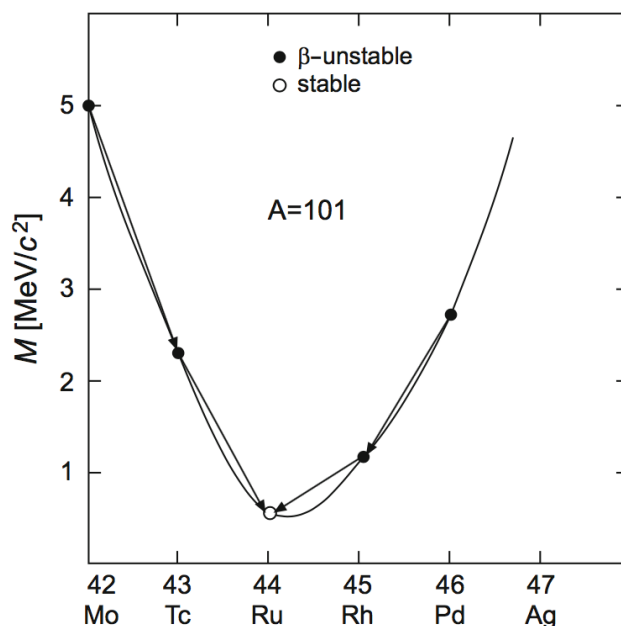
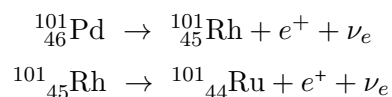


Figura 5.14: Sequenza isobarica del rutenio $^{101}_{44}\text{Ru}$

Gli isobari con un eccesso di protoni rispetto al $^{101}_{44}\text{Ru}$ decadono invece β^+ convertendo un protone interno al nucleo secondo la



In tal caso l'isobaro $^{101}_{44}\text{Ru}$ è prodotto dalla sequenza



Si ricordi che il principio di conservazione dell'energia vieta la 5.38 al di fuori dei nuclei, mentre invece la 5.37 è permessa. Il fatto che la 5.38 possa aver luogo all'interno di un nucleo implica che sia energeticamente permessa, ovvero che l'incremento in energia di legame del nucleo figlio derivante dal decadimento sia sufficiente, cioè $\geq (m_n + m_e + m_{\bar{\nu}_e} - m_p) c^2$.

Si considerino ora i nuclei con numero di massa A pari. Sempre per quanto visto nei paragrafi 4.2 e 4.3.8, in questo caso le sequenze isobariche si dispongono secondo due diversi andamenti parabolici, uno per i nuclei dispari-dispari e uno, separato del doppio dell'energia di accoppiamento $2|B_{ac}(A, Z)|$ nella formula di Weizsäcker, per i nuclei pari-pari.

Capita spesso che soprattutto per valori di $A > 70$ vi sia più di un isobaro β -stabile. Si considerino come esempio gli isobari con $A = 106$.

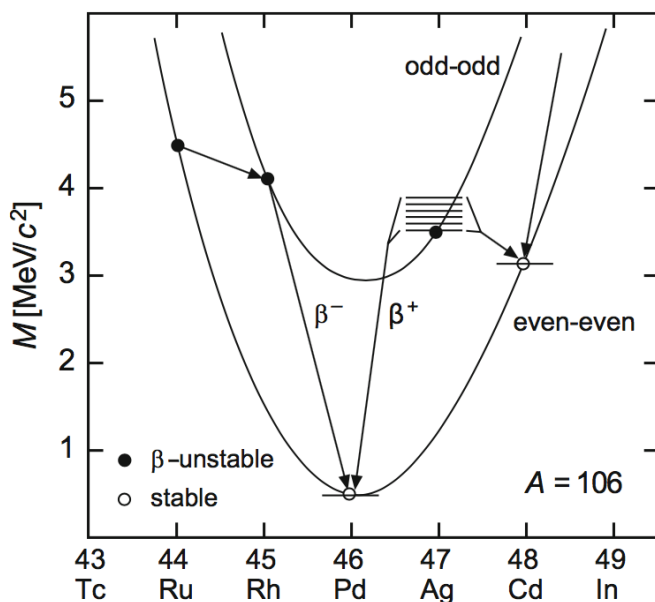
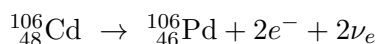


Figura 5.15: Sequenze isobariche del Palladio $^{106}_{46}\text{Pd}$

Gli isobari pari-pari $^{106}_{46}\text{Pd}$ e $^{106}_{48}\text{Cd}$ sono sulla parabola inferiore e $^{106}_{46}\text{Pd}$, il più stabile dei due, si trova in corrispondenza al minimo della parabola pari-pari. Il $^{106}_{48}\text{Cd}$ è β -stabile in quanto i due isobari dispari-dispari a lui più prossimi sono situati a livelli energetici superiori, come mostrato in figura 5.15. Il decadimento del $^{106}_{48}\text{Cd}$ in $^{106}_{46}\text{Pd}$ sarebbe possibile soltanto attraverso un cosiddetto *doppio decadimento β* ¹²



La probabilità di un simile processo è però così piccola che il $^{106}_{48}\text{Cd}$ può essere considerato praticamente stabile.

I nuclei dispari-dispari hanno sempre almeno un nucleo pari-pari loro prossimo più fortemente legato nella sequenza isobarica, e di conseguenza sono instabili. Le sole eccezioni a questa regola sono i nuclei leggeri ^2_1H , ^6_3Li , $^{10}_5\text{B}$ e $^{14}_7\text{N}$ che sono β -stabili in quanto l'aumento dell'energia di asimmetria nella formula di Weizsäcker supera in valore assoluto la diminuzione nell'energia d'accoppiamento.

Vi sono anche nuclei che possono decadere sia β^- che β^+ , come il potassio $^{40}_{19}\text{K}$ e il $^{64}_{29}\text{Cu}$.

Per quanto concerne la cattura elettronica o *cattura K* essa, come per la conversione interna, è dovuta alla probabilità non trascurabile che la funzione d'onda di un tale elettrone si sovrapponga spazialmente e in modo

¹²Del doppio decadimento β si tratterà nel [paragrafo ...](#)

consistente, alla funzione d'onda del nucleo, permettendo che un protone di questo e l'elettrone si combinino per formare un neutrone e un neutrino secondo la



Questa reazione si presenta prevalentemente in nuclei pesanti per i quali il raggio nucleare è maggiore e l'estensione radiale degli orbitali atomici è minore. Solitamente gli elettroni catturati provengono dall'orbitale più interno, K appunto, la cui funzione d'onda ha la massima sovrapposizione spaziale con la zona occupata dal nucleo. Similmente al processo di conversione interna, la cattura di un elettrone dall'orbitale K ingenera la successiva cascata, nella vacanza da lui lasciata, di un altro elettrone dell'atomo proveniente da orbitali più esterni, quindi a energie più elevate, con la conseguente emissione di caratteristici raggi-X.

Questo processo è energeticamente in competizione col decadimento β^+ , come si può vedere ad esempio nel caso del $^{40}_{19}\text{K}$, di cui in figura 5.16 è riportato lo schema dei livelli. Il $^{40}_{19}\text{K}$ è un isotopo naturale con abbondanza

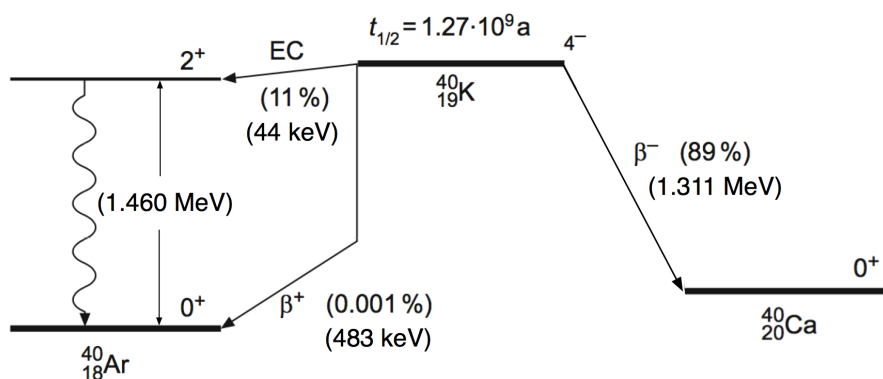


Figura 5.16: Decadimenti β e cattura K del $^{40}_{19}\text{K}$

dello 0.0117 % che può decadere β^- verso il livello fondamentale del $^{40}_{20}\text{Ca}$, con probabilità dell'89.25 % e un Q-valore di 1.311 MeV. Ma esso può anche, con probabilità del 10.55 %, dar luogo a una cattura K con successiva emissione di fotoni da 1.460 MeV verso il livello fondamentale di $^{40}_{18}\text{Ar}$. La residua probabilità di decadimento β^+ , sempre verso $^{40}_{18}\text{Ar}$, è pari a circa 0.001 % e l'energia di 483 keV a disposizione di positrone e neutrino tiene conto della frazione, pari a 1.022 MeV, necessaria a creare la coppia e^+e^- .

Per quanto concerne le vite medie caratteristiche dei decadimenti dei nuclei β -instabili, $\tau_\beta = 1/\lambda_\beta$, i loro valori spaziano fra circa 10^{16} anni e circa 10^{-3} secondi, con la massima energia d'emissione E_0 variabile da alcune frazioni di MeV fino a circa 7 MeV.

La costante di decadimento β va circa come la quinta potenza dell'energia

rilasciata (legge di Sargent)

$$\lambda_\beta = \frac{1}{\tau_\beta} \propto E^5 \quad (5.40)$$

e dipende sia dalle caratteristiche del nucleo genitore che da quelle del nucleo figlio.

Non vi sono casi di due isobari contigui che siano β -stabili, anche se talvolta uno dei due ha vita media così lunga da poter essere a tutti gli effetti considerato stabile. Un ben noto esempio è il ^{40}K che decadendo sia β^- che β^+ , si trasforma in altri isobari per i quali entra in competizione anche la cattura K. I prodotti stabili del decadimento del ^{40}K sono ^{40}Ar e ^{40}Ca , rappresentando un caso di due nuclei stabili con uguale numero di massa A , come si vede in figura 5.16.

La scelta del ^{40}K come esempio non è casuale, infatti esso contribuisce considerevolmente all'esposizione radioattiva di tutte le strutture biologiche: il potassio è un elemento essenziale nella trasmissione dei segnali nervosi e la sua concentrazione nel corpo umano è tale da far sì che esso costituisca circa il 16% della radiazione naturale cui siamo mediamente esposti.

I nuclidi β -instabili con emissione di positroni hanno tutti $Z < 80$.

5.4.3 Regole di Sargent

Con l'intento di cercare delle regolarità che permettessero di capire il meccanismo alla base dei decadimenti β , nel 1933 B.W. Sargent pubblicò un lavoro in cui mostrava che graficando il logaritmo della costante di decadimento λ_β verso il logaritmo della massima energia E_{max} degli elettroni emessi da nuclei β -emettitori, la gran parte dei punti trovati cadeva in prossimità di due curve quasi rettilinee, come mostrato in figura 5.17.

Il diagramma risultante, detto di Sargent, costituisce una regola empirica del tipo di quella di Geiger-Nuttal per il decadimento α .

In questo caso però le costanti di disintegrazione non cambiano molto velocemente con l'energia e le due curve non corrispondono ognuna a una diversa serie radioattiva. Per un definito valore di E_{max} la curva superiore fornisce un valore di λ_β circa 100 volte superiore a quello corrispondentemente fornito dalla curva inferiore per cui si può dire che fissata un'energia, un decadimento β prossimo alla curva inferiore è circa 100 volte meno probabile di quello corrispondente sulla curva superiore. Ciò ha portato a dire *transizioni permesse* quelle rappresentate dalla curva superiore e *transizioni proibite* quelle rappresentate dalla curva inferiore. Chiaramente i termini "permesse" e "proibite" vanno intesi come diversi valori di probabilità di decadimento spontaneo.

La descrizione della globalità dei dati sperimentali richiede di considerare separatamente curve di Sargent per nuclidi con numeri atomici piccoli, intermedi o grandi. In tutti i casi si ottengono più curve, una delle quali viene

identificata come rappresentante le transizioni permesse e le altre come rappresentanti diversi livelli di transizioni proibite. Una teoria del decadimento

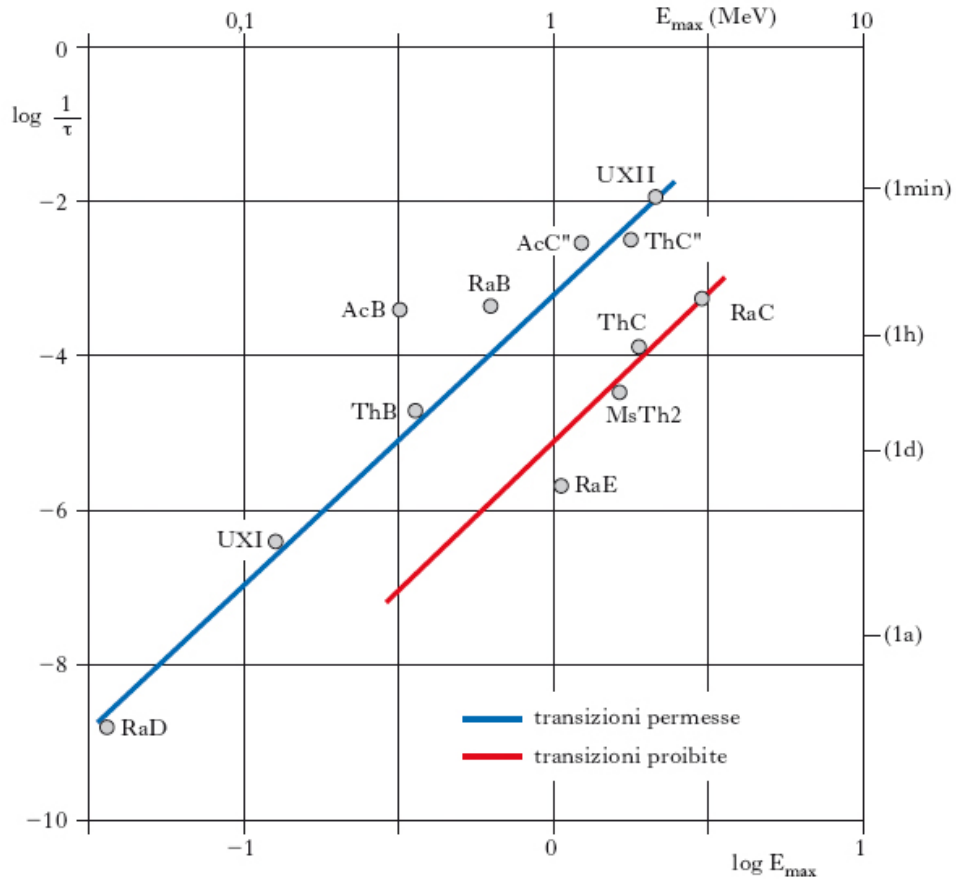


Figura 5.17: Tipico diagramma di Sargent.

β deve naturalmente essere in grado di riprodurre sia queste regolarità nei dati sperimentali che le caratteristiche degli spettri d'emissione β .

5.4.4 Teoria di Fermi del decadimento β

Le vite medie misurate τ_{β} associate ai decadimenti β sono molto maggiori dei tempi caratteristici coinvolti nelle interazioni nucleari ed elettromagnetiche: infatti la scala temporale tipica dei processi governati dall'interazione forte è dell'ordine dei 10^{-23} s o inferiore, mentre quella dei processi governati dall'interazione elettromagnetica è come si vedrà nel prossimo paragrafo 5.5, dell'ordine dei 10^{-16} s. Da ciò si desume che nonostante i decadimenti β siano chiaramente un fenomeno nucleare, essi non coinvolgono però né la forza nucleare né quella elettromagnetica, e data la piccolezza delle probabilità

$\lambda_\beta = 1/\tau_\beta$ di decadimento ad essi associate, l'interazione che li governa deve essere *debole*.

Questa conclusione condusse Fermi a postulare l'esistenza di una nuova forza che fosse responsabile dei decadimenti β . Essa è stata chiamata *forza debole* ed è a breve raggio d'azione, dato che è efficace soltanto all'interno dell'ambiente nucleare. La bassissima intensità di questa forza è quindi responsabile delle lunghe vite medie osservate nei decadimenti β . In termini di intensità relative, assunta come pari ad 1 quella della forza forte, si ha rispettivamente 10^{-2} per l'elettromagnetica, 10^{-5} per la debole e 10^{-39} per la gravitazionale.

Così come nel caso dell'interazione elettromagnetica, il ridotto valore dell'intensità d'accoppiamento della forza debole permette dunque di affrontare con tecniche perturbative la formulazione di una teoria del decadimento β . Si è visto che all'interno dei nuclei non vi possono essere, stabilmente presenti, elettroni (dimensioni nucleari, modello Rutherford, ecc. ecc.), e conseguentemente si deduce che gli elettroni emessi durante il decadimento β non possono provenire dal nucleo ma devono essere stati prodotti nel momento del decadimento. Questa sequenza è abbastanza analoga a quanto avviene nelle transizioni atomiche, in cui i fotoni non pre-esistono all'interno degli atomi ma sono prodotti al momento delle transizioni. Così come la transizione in un atomo può essere capita come indotta, ad esempio, da un'interazione di dipolo, e quindi calcolata utilizzando la teoria delle perturbazioni, similmente il decadimento β può essere capito come dovuto alla debole forza rappresentata dall'Hamiltoniano di interazione debole.

Il calcolo della probabilità λ_β di transizione per unità di tempo, e della forma dello spettro energetico delle particelle emesse nel processo, può quindi essere affrontato come fatto da Fermi¹³, con tecniche perturbative e utilizzando la Regola d'Oro n. 2. Anche se i risultati ottenuti da Fermi sono poi stati superati da sviluppi successivi e infine dalla *teoria elettrodebole*¹⁴ di S. Glashow, A. Salam e S. Weinberg, è molto istruttivo riproporlo qui in una forma semplificata utilizzata dallo stesso Fermi in "Nuclear Physics" - The University of Chicago Press (1950).

La teoria di Fermi dell'interazione debole è sostanzialmente una teoria di campo in cui l'Hamiltoniano d'interazione è un operatore agente sui campi fermionici tramite assorbimento o emissione di fermioni.

Si riprende dunque l'osservazione che in un decadimento β l'elettrone e il neutrino vengono formati al momento del decadimento e della loro emissione dall'atomo. Siano ψ_e e ψ_ν le funzioni d'onda che descrivono gli stati nei quali sono state create le due particelle e si assuma che siano rappresentabili da

¹³E. Fermi, Tentativo di una teoria dei raggi β , Nuovo Cimento 11 (1934) 1-19.

¹⁴Citare il paragrafo dove ne parlerò ...

due onde piane di impulsi rispettivamente \vec{p}_e e \vec{p}_ν

$$\psi_e = N_e e^{i\vec{p}_e \cdot \vec{r}/\hbar} \quad , \quad \psi_\nu = N_\nu e^{i\vec{p}_\nu \cdot \vec{r}/\hbar} \quad (5.41)$$

dove N rappresenta un fattore di normalizzazione. ψ_e è in realtà più complicata di quanto detto in quanto sente l'influenza della carica nucleare Ze . Considerarla un'onda piana è una buona approssimazione se l'energia dell'elettrone è molto maggiore dell'energia media di legame degli elettroni del nucleo di numero atomico Z . Per elettroni di bassa energia, dell'ordine ad esempio di 200 KeV, e in prossimità di un nucleo con alto valore di Z , risulta che ψ_e è fortemente perturbata.

Fermi assunse che la probabilità d'emissione dipenda dalla probabilità per l'elettrone e il neutrino di essere "creati" contemporaneamente e nello stesso punto¹⁵, coincidente con le coordinate del centro di massa O del nucleo, che si considera anche come origine del sistema di riferimento. La probabilità d'emissione dipende quindi dal prodotto $|\psi_e(O)|^2 |\psi_\nu(O)|^2$, ma anche da altri fattori "la cui natura è incerta".

Un fattore è il modulo quadro dell'elemento di matrice \mathcal{M} fra gli stati iniziali e finale del nucleo. Questo elemento di matrice è analogo a quello usato nella descrizione dell'emissione di fotoni per la quale, nel caso di radiazione da dipolo, si ha

$$\mathcal{M} = \int \psi_{fin}^* (\text{mom. el.}) \psi_{in} d\tau$$

Nel caso dell'interazione β , \mathcal{M} non è noto esattamente. Per la trasformazione $n \rightarrow p$, la forma più semplice da scegliere, se si assume che nel processo sia coinvolto un solo nucleone del nucleo, è

$$\mathcal{M} = \int \psi_p^* \psi_n d\tau \quad (5.42)$$

dove ψ_n e ψ_p rappresentano rispettivamente lo stato iniziale e finale del nucleone coinvolto. Se si tiene anche conto dei possibili stati di spin, allora \mathcal{M} diventa un vettore la cui generica componente è

$$\mathcal{M}_i = \int \psi_p^* \sigma_i \psi_n d\tau \quad (5.43)$$

dove σ_i è l' i -ma componente di un operatore relativistico di spin, per cui

$$|\mathcal{M}|^2 = \sum_{i=1}^3 |\mathcal{M}_i|^2 \quad (5.44)$$

Si può mostrare come la scelta di \mathcal{M} determini delle regole di selezione per i decadimenti β (paragrafo ??).

¹⁵Con questa assunzione Fermi ipotizzò sostanzialmente che non vi fosse necessità di particella mediatrice per questo processo, essendo puntuale, e come si vedrà più avanti parlando delle interazioni deboli, questa assunzione è una approssimazione valida purché le energie in gioco non siano troppo alte.

L'espressione per la probabilità d'emissione include anche un fattore "costante" g^2 che rappresenta l'intensità dell'accoppiamento che dà luogo all'emissione e gioca il ruolo di una costante universale per la quale si trova sperimentalmente

$$10^{-48} \text{ g m}^3\text{s}^{-2} \lesssim g \lesssim 10^{-49} \text{ g m}^3\text{s}^{-2} \quad (5.45)$$

Tenendo quindi conto di tutto quanto detto e usando la Regola d'Oro n.2 si ha, per la probabilità d'emissione

$$\frac{2\pi}{\hbar} (|\psi_e(O)| |\psi_\nu(O)| |\mathcal{M}| g)^2 \frac{dn}{dE} \quad (5.46)$$

con dn/dE la densità energetica degli stati finali e O che come detto, indica il "punto in cui avviene" il decadimento, assunto come il centro di massa del nucleo genitore.

Le funzioni d'onda ψ sono normalizzate sul volume V in modo che

$$\int_V \psi^* \psi \, d\tau = 1 \quad , \quad \text{per cui:} \quad N = \frac{1}{\sqrt{V}} \quad (5.47)$$

e

$$\psi_e = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}_e \cdot \vec{r}/\hbar} \quad , \quad \psi_\nu = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}_\nu \cdot \vec{r}/\hbar} \quad (5.48)$$

Ha senso dire che il nucleo è posizionato in $\vec{r} = 0$ solo se ψ cambia poco sulle dimensioni del nucleo stesso.

Per valori dell'impulso p tipici dei decadimenti β , il "passo" con cui si hanno sensibili variazioni di ψ è dato da $\lambda = \hbar/p \simeq 10^{-13}$ m, quindi grande se confrontato con le dimensioni nucleari, dell'ordine di 10^{-14} m, cui sono estesi gli integrali che compaiono nell'elemento di matrice. Ha quindi abbastanza senso considerare il nucleo in buona approssimazione "puntiforme" in $\vec{r} = 0$. In tal caso le 5.48 si riducono a

$$\psi_e(O) = \frac{1}{\sqrt{V}} \quad , \quad \psi_\nu(O) = \frac{1}{\sqrt{V}} \quad (5.49)$$

Si consideri ora la densità degli stati finali. Il numero dn' di stati d'onda piana con valore dell'impulso compreso fra p e $p + dp$, considerando la particella dovunque in V è ¹⁶

$$\frac{dn'}{dp} dp = \frac{V p^2 dp}{2\pi^2 \hbar^3} \quad (5.50)$$

quindi si ha, per dn

$$dn = \frac{p_e^2 dp_e}{2\pi^2 \hbar^3} \frac{p_\nu^2 dp_\nu}{2\pi^2 \hbar^3} V^2 = \frac{p_e^2 p_\nu^2}{4\pi^4 \hbar^6} V^2 dp_e dp_\nu \quad (5.51)$$

¹⁶Si veda l'Appendice ...

con $dp_e dp_\nu = J dp_e dE$, essendo "J" lo Jacobiano che trascurando l'energia di rinculo del nucleo rispetto alle energie di elettrone e neutrino, e assumendo nulla la massa del neutrino, $m_\nu = 0$, può essere calcolato partendo dalla relazione $E = cp_\nu + E_e$, ottenendo¹⁷ $J = 1/c$. Quindi:

$$\frac{dn}{dE} = \frac{p_e^2 p_\nu^2}{4\pi^4 \hbar^6 c} V^2 dp_e \quad (5.52)$$

In base quindi alla 5.46 si ottiene la probabilità d'emissione per unità di tempo $P(p_\nu, p_e) dp_e$ in funzione della sola variabile misurata, cioè l'impulso p_e dell'elettrone

$$P(p_\nu, p_e) dp_e = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{1}{V} |\mathcal{M}| g \right)^2 \frac{p_e^2 p_\nu^2 V^2 dp_e}{4\pi^4 \hbar^6 c} \quad (5.53)$$

Sempre nell'ipotesi $m_\nu = 0$ si ha anche, detta E_{tot} l'energia totale a disposizione nello stato finale del decadimento, che coincide praticamente quasi con l'estremo superiore $E_{e,max}$ della distribuzione in energia degli elettroni emessi: $E_\nu = p_\nu c = E_{tot} - E_e$, da cui: $p_\nu = (E_{tot} - E_e)/c$, che sostituito dá, per la probabilità d'emissione

$$P(p_e) dp_e = \frac{g^2 |\mathcal{M}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} (E_{tot} - E_e)^2 p_e^2 dp_e \quad (5.54)$$

Esprimendo infine $p_{e,max}$ dalla $E_{e,max} = \sqrt{m^2 c^4 + p_{e,max}^2 c^2} \simeq E_{tot}$, si ha:

$$P(p_e) dp_e = \frac{g^2 |\mathcal{M}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \left(\sqrt{m^2 c^4 + p_{e,max}^2 c^2} - \sqrt{m^2 c^4 + p_e^2 c^2} \right)^2 p_e^2 dp_e \quad (5.55)$$

che rappresenta sostanzialmente la distribuzione dello spazio delle fasi nel decadimento a tre corpi in cui la massa del nucleo residuo è molto maggiore di quella dell'elettrone, la cui massa è a sua volta molto maggiore di quella del neutrino.

Per trovare ora la vita media τ_β bisogna integrare su tutti i possibili valori di p_e

$$\lambda_\beta = \frac{1}{\tau_\beta} = \frac{g^2 |\mathcal{M}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \int_0^{p_{e,max}} \left(\sqrt{m^2 c^4 + p_{e,max}^2 c^2} - \sqrt{m^2 c^4 + p_e^2 c^2} \right)^2 p_e^2 dp_e \quad (5.56)$$

Dalla misura della vita media τ_β si può quindi ottenere il valore del prodotto fra la costante d'accoppiamento e l'elemento di matrice $g |\mathcal{M}|$.

Per risolvere l'integrale conviene ridefinire gli impulsi in unità di mc , rendendo così esplicita la dipendenza dalla massa dell'elettrone e ottenendo le due

$$^{17} J = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_e}{\partial p_e} & \frac{\partial p_e}{\partial E} \\ \frac{\partial p_\nu}{\partial p_e} & \frac{\partial p_\nu}{\partial E} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial p_e}{\partial E} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{c}$$

quantità $\eta = p_e/(mc)$ ed $\eta_0 = p_{e,max}/(mc)$, tramite le quali si riesprime l'integrale della 5.56, chiamandolo $F(\eta_0)$:

$$\frac{1}{\tau_\beta} = \frac{g^2 |\mathcal{M}|^2 m^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} F(\eta_0) \quad (5.57a)$$

$$F(\eta_0) = \int_0^{\eta_0} \left(\sqrt{1 + \eta_0^2} - \sqrt{1 + \eta^2} \right)^2 \eta^2 d\eta \quad (5.57b)$$

Integrando la 5.57b si ottiene

$$\begin{aligned} F(\eta_0) &= -\frac{1}{4}\eta_0 - \frac{1}{12}\eta_0^3 + \frac{1}{30}\eta_0^5 + \frac{1}{4}\sqrt{1 + \eta_0^2} \ln \left(\eta_0 + \sqrt{1 + \eta_0^2} \right) \\ &= -\frac{1}{4}\eta_0 - \frac{1}{12}\eta_0^3 + \frac{1}{30}\eta_0^5 + \frac{1}{4}\sqrt{1 + \eta_0^2} \operatorname{senh}^{-1}\eta_0 \end{aligned} \quad (5.58)$$

Sviluppando il logaritmo e ottenendo termini con potenze di η_0 che cancellano quelli delle potenze inferiori a η_0^7 nell'espressione per $F(\eta_0)$, si individuano quindi per $F(\eta_0)$ le seguenti forme limite :

$$\eta_0 \gg 1 : F(\eta_0) \longrightarrow \frac{1}{30} \eta_0^5 \quad (5.59a)$$

$$\eta_0 \ll 1 : F(\eta_0) \longrightarrow \frac{2}{105} \eta_0^7 \quad (5.59b)$$

Nella prima, relativa ai decadimenti β in cui $E_{tot} \approx E_{e,max}$ è abbastanza maggiore di $m_e c^2$, la vita media dipende dunque dalla quinta potenza di E_{tot} , in accordo con le osservazioni di Sargent.

Le approssimazioni fatte finora sono un pó drastiche, sia per quanto concerne l'elemento di matrice che per le funzioni d'onda dell'elettrone o positrone emessi. Considerare queste ultime delle semplici onde piane porta infatti a trascurare l'interazione coulombiana fra l'elettrone o il positrone e il nucleo. Per tenerne conto si introduce, nell'espressione integranda per ottenere λ_β , un fattore $f(\pm Z, \eta_0)$ dipendente dal nucleo e dall'energia dell'elettrone. La funzione integrata risultante dipende anch'essa da Z e si scrive $F(\pm Z, \eta_0)$, che per piccoli valori di Z si riduce alla $F(\pm Z, \eta_0) \approx F(\eta_0)$ introdotta sopra. Si ha quindi per λ_β

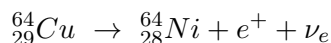
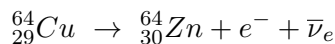
$$\lambda_\beta = \frac{1}{\tau_\beta} = \frac{g^2 m^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} |\mathcal{M}|^2 F(\pm Z, \eta_0) \quad (5.60)$$

Nei decadimenti β con $E_{tot} \gg m_e c^2$, l'impulso dell'elettrone emesso è mediamente grande e si trova $F(\pm Z, \eta_0) \approx 1$.

$F(\pm Z, \eta_0)$ è significativamente diversa dall'unità soltanto per valori grandi di Z e piccoli delle energie.

Dalla 5.60, ricordando la 5.55, si può ottenere la forma dello spettro d'emissione β , come mostrato da Fermi.

In figura 5.18 sono mostrate le diverse forme delle distribuzioni d'impulso di e^- ed e^+ nei decadimenti β del rame.



Si noti come, nell'ipotesi fatta che la massa del neutrino sia nulla ($\nu=0$),

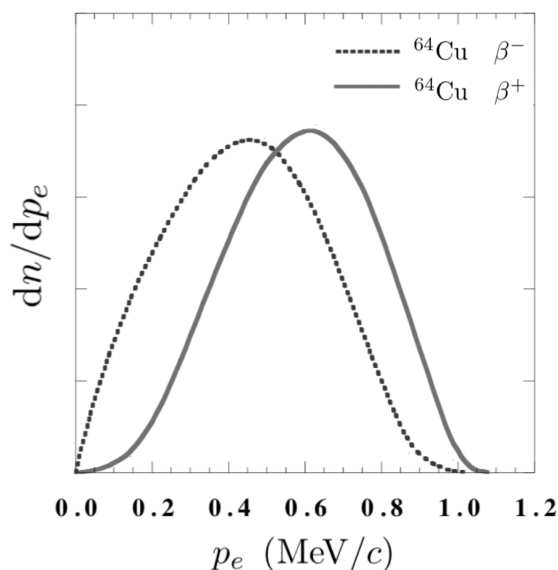


Figura 5.18: Distribuzioni in impulso di e^- ed e^+ emessi nei decadimenti β del ${}^{64}_{29}\text{Cu}$.

l'andamento della distribuzione verso l'estremo superiore dei valori di p_e sia quello di un avvicinamento dolce al valore nullo, che Fermi ha mostrato essere parabolico. Se viceversa la massa del neutrino non fosse nulla si può provare che tale avvicinamento sarebbe con derivata decrescente tendente a $-\infty$, tanto più marcato quanto maggiore fosse la massa del neutrino. I dati sperimentali sono compatibili con $m_\nu = 0$ o comunque con una m_ν inferiore a quanto rilevabile dai dati stessi.

Ciò rende chiaramente difficoltoso individuare sperimentalmente con precisione l'estremo superiore $p_{e,max}$ dei valori di p_e , ovvero il punto in cui la distribuzione incontra l'asse delle ascisse, e quindi anche $E_{e,max}$.

Un modo più accurato per determinare $E_{e,max}$ consiste nell'utilizzare i grafici di Kurie. Essi si ottengono dalla 5.54 considerando l'intensità $I(p_e)$ dell'emissione di elettroni con impulso p_e , che è una quantità misurabile,

$$I(p_e) = (E_{e,max} - E)^2 p_e^2 C(Z, p_e) \quad (5.61)$$

dove $C(Z, p_e)$ include tutte le costanti e anche la dipendenza dalla carica Z del nucleo. Si ha quindi

$$\sqrt{\frac{I(p_e)}{p_e^2 C(Z, p_e)}} = (E_{e,max} - E) \quad (5.62)$$

Graficando il radicale della 5.62 verso l'energia E si dovrebbe ottenere una retta di cui ottenere agevolmente l'intercetta sull'asse orizzontale delle energie. Anche in questo caso una massa non nulla del neutrino darebbe luogo a un'andamento del grafico di Kurie che intercetterebbe l'asse delle ascisse con pendenza infinita, come mostrato in figura 5.19

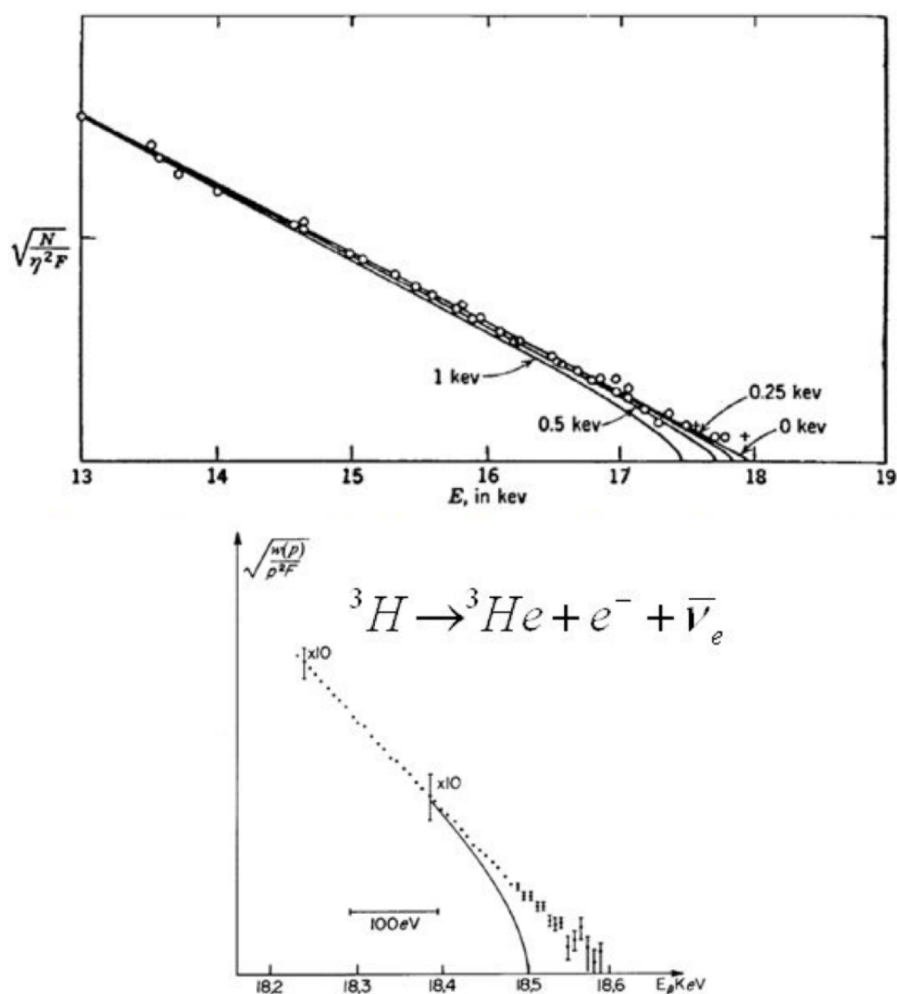


Figura 5.19: Kurie-plot del decadimento β^- del tritio: ${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}_e$ del tritio. Assieme ai dati sperimentali, anche gli andamenti attesi in funzione di diverse ipotesi sulla massa dell'antineutrino dell'elettrone.

5.5 Radioattività γ

Un nucleo può avere a disposizione molti stati eccitati e la gran parte di quelli a energia d'eccitazione più bassa sono interpretabili teoricamente, almeno da un punto di vista qualitativo.

In figura 5.20 sono schematicamente illustrati i livelli energetici di un nucleo pari-pari con $A \approx 100$. Al di sopra dello stato fondamentale vi sono stati

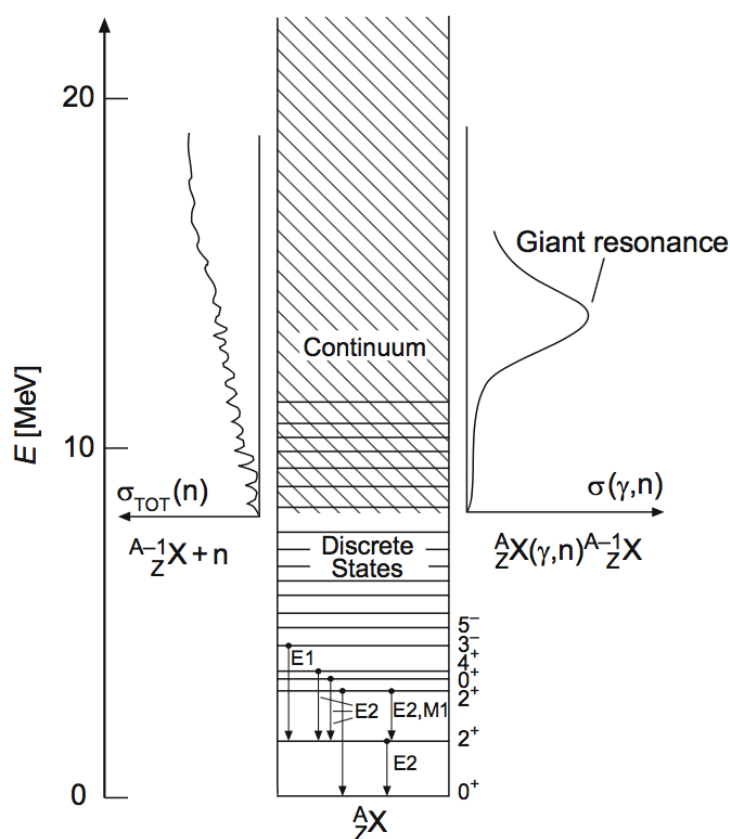


Figura 5.20: ... Stati Gamma ...

discreti individuali contraddistinti da specifici numeri quantici J^P . L'eccitazione di nuclei pari-pari corrisponde generalmente alla "rottura" del legame fra una coppia di nucleoni e richiede energie di circa $1 \div 2$ MeV. Nuclei pari-pari con $A \gtrsim 40$, hanno raramente energie d'eccitazione inferiori ai 2 MeV; gli stati collettivi in nuclei deformati sono un'eccezione a questo e non possono essere spiegati in termini dell'eccitazione di una singola particella. Nei nuclei dispari-pari e dispari-dispari, il numero di stati eccitati a basse energie, tipicamente poche centinaia di keV, è considerevolmente maggiore. Gli stati di nuclei eccitati a bassa energia decadono solitamente emettendo radiazione elettromagnetica. Una trattazione raffinata del fenomeno richiede

de l'uso della teoria dei campi quantizzati della radiazione elettromagnetica, di cui si utilizzeranno qui alcuni risultati rimandando a corsi successivi per la loro deduzione.

Si può descrivere il fenomeno ricorrendo allo sviluppo in serie di una sovrapposizione di diversi termini multipolari, ognuno con la propria caratteristica distribuzione angolare. La radiazione elettrica di dipolo, quadrupolo, ottupolo, ecc. è indicata con E1, E2, E3, ecc.; similmente la corrispondente radiazione multipolare magnetica è indicata con M1, M2, M3, ecc.

La conservazione del momento angolare e della parità, caratteristiche dell'interazione elettromagnetica, determinano quali multipolarità siano permesse nella transizione: un fotone di multipolarità $E\ell$ ha momento angolare ℓ e parità $(-1)^\ell$, un fotone di multipolarità $M\ell$ ha momento angolare ℓ e parità $(-1)^{\ell+1}$. In tabella 5.1 sono riportate alcune regole di selezione per transizioni elettromagnetiche con le quali si può costruire un insieme di transizioni permesse quali ad esempio quelle in tabella 5.2. In una transizione $J_i \rightarrow J_f$

Tabella 5.1: Regole di selezione per decadimenti γ

Multipolarità	Elettrica			Magnetica		
	$E\ell$	$ \Delta J $	ΔP	$M\ell$	$ \Delta J $	ΔP
Dipolo	E1	1	-	M1	1	+
Quadrupolo	E2	2	+	M2	2	-
Ottupolo	E3	3	-	M3	3	+

Tabella 5.2: Esempi di transizioni nucleari elettromagnetiche

$J_i^{P_i}$	$J_f^{P_f}$	ΔP	L	Transizioni permesse
0^+	0^+	No	-	Nessuna
$(1/2)^+$	$(1/2)^-$	Sì	1	E1
1^+	0^+	No	1	M1
2^+	0^+	No	2	E2
$(3/2)^-$	$(1/2)^+$	Sì	1, 2	E1, M2
2^+	1^+	No	1, 2, 3	M1, E2, M3
$(3/2)^-$	$(5/2)^+$	Sì	1, 2, 3, 4	E1, M2, E3, M4

la conservazione del momento angolare implica che sia soddisfatta la disuguaglianza triangolare $|J_i - J_f| \leq \ell \leq J_i + J_f$.

La vita media per emissione γ di uno stato eccitato dipende fortemente dalla multipolarità da cui avviene ed è tanto più breve quanto più basso è il livello di multipolarità. Una transizione magnetica $M\ell$ ha approssimativamente

la stessa probabilità di una transizione elettrica $E(\ell + 1)$. Una transizione $3^+ \rightarrow 1^+$, ad esempio, è in linea di principio una miscela di E2, M3 ed E4, ma risulta facilmente dominata dal contributo E2. Una transizione $3^+ \rightarrow 2^+$ consiste usualmente in una miscela di M1 ed E2 ed E4, anche se sono possibili transizioni M3, E4 ed M5.

In una serie di stati eccitati 0^+ , 2^+ , 4^+ , il decadimento più probabile consiste in una cascata di transizioni E2 del tipo $4^+ \rightarrow 2^+ \rightarrow 0^+$, e non in una singola transizione E4 del tipo $4^+ \rightarrow 0^+$.

La vita media di uno stato eccitato e la distribuzione angolare della radiazione elettromagnetica emessa costituiscono delle "firme" della multipolarità delle transizioni, che a loro volta rivelano spin e parità dei livelli eccitati del nucleo.

La probabilità di decadimento dipende fortemente anche dall'energia: per radiazione di multipolarità ℓ essa è infatti proporzionale ad $E_\gamma^{2\ell+1}$.

L'energia d'eccitazione di un nucleo può talvolta essere anche trasferita a un elettrone di un orbitale atomico tramite un processo detto *conversione interna*, in cui si immagina coinvolto un fotone *virtuale*, che non abbia dunque le restrizioni sui possibili stati di polarizzazione di un fotone reale; esso diviene un processo rilevante in transizioni per le quali risulta soppressa l'emissione γ , come nel caso di alta multipolarità o bassa energia d'eccitazione, e il nucleo coinvolto è pesante, per cui cresce la probabilità di una sovrapposizione spaziale non trascurabile fra le funzioni d'onda del nucleo e degli elettroni atomici.

La transizione $0^+ \rightarrow 0^+$ non può aver luogo tramite l'emissione di un fotone, se quindi un nucleo è in uno stato eccitato 0^+ , e anche tutti i suoi livelli eccitati più bassi sono del tipo 0^+ , come per ^{16}O o ^{40}Ca , allora il suo decadimento dovrà procedere in modo diverso. Ciò può ad esempio avvenire per conversione interna, con l'emissione di due fotoni o se energeticamente permesso, con l'emissione di una coppia e^+e^- . La conservazione della parità vieta la conversione fra due livelli con $J = 0$ e parità opposte.

La vita media di uno stato nucleare eccitato varia tipicamente fra 10^{-9} e 10^{-15} s, che corrispondono a stati con larghezze inferiori a 1 eV.

Gli stati che possono decadere soltanto attraverso transizioni a bassa energia e alta multipolarità hanno vite medie considerevolmente più lunghe. Essi sono detti *isomeri* e vengono indicati con una m in apice al simbolo dell'elemento. Un esempio estremo di isomero è il secondo stato eccitato di ^{110}Ag , con energia d'eccitazione di 117.7 keV e $J^P = 6^+$. Esso si diseccita attraverso una transizione M4 nel primo stato eccitato (1.3 keV; 2^-), in quanto un decadimento diretto verso lo stato fondamentale 1^+ è ancor più improbabile, e la vita media τ di $^{110}\text{Ag}^m$ è pari a 339 giorni.

Si ricordi che un nucleo in uno stato eccitato $^A_Z X^*$ può decadere allo stato fondamentale $^A_Z X$ anche senza emettere radiazione γ , cedendo l'energia d'eccitazione a un elettrone atomico tramite il processo di conversione in-

terna. In tal caso la vita media di quello stato eccitato è inferiore a quanto previsto dal solo processo di decadimento radiativo, dato che le probabilità di decadimento si sommano

$$\lambda_{tot} = \lambda_{\gamma} + \lambda_c \quad (5.63)$$

essendo λ_c la probabilità di decadimento per conversione interna.

5.6 Cinematica relativistica del decadimento in due corpi

I decadimenti nucleari finora studiati coinvolgono spesso strutture *figlie* emesse da un nucleo *genitore* con energie simili o superiori agli equivalenti energetici delle masse delle particelle figlie stesse. Questi casi vanno quindi trattati secondo il corretto approccio relativistico, come del resto sarà necessario con i decadimenti di singole particelle.

Riferendosi ai concetti riportati in Appendice D, si analizza ora il decadimento di una struttura o particella *genitore* in due strutture o particelle *figlie*, ovvero il decadimento in due corpi, che è anche la forma più semplice di reazione.

Si consideri il decadimento di una particella di massa M inizialmente a riposo rispetto a un osservatore inerziale solidale col sistema del laboratorio (SL), che in questo caso coincide con quello del centro di massa (CM), e siano m_1 ed m_2 le masse delle particelle figlie. Il quadri-impulso della particella genitore è quindi $P = (Mc, 0, 0, 0)$, e indicati con $p_1 = (E_1/c, \vec{p}_1)$ e $p_2 = (E_2/c, \vec{p}_2)$ i quadri-impulsi delle particelle figlie, la conservazione del quadri-impulso richiede che sia

$$P = p_1 + p_2 \quad \text{da cui,} \quad \vec{p}_2 = -\vec{p}_1 \quad (5.64)$$

Per cui nel sistema (CM) le due particelle figlie sono emesse in direzioni opposte con impulsi di uguale modulo. Si può dunque omettere il pedice nell'impulso e la conservazione dell'energia assume la forma

$$E_1 + E_2 = \sqrt{m_1^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} = Mc^2 \quad (5.65)$$

Quadrando e raccogliendo si ottiene:

$$\begin{aligned} Mc^2 - \sqrt{m_1^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} &= \sqrt{m_2^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} \\ M^2 c^4 + (m_1 c^2 - m_2 c^2)(m_1 c^2 + m_2 c^2) &= 2Mc^2 \sqrt{m_1^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} \end{aligned}$$

quadrando nuovamente ed estraendo $|\vec{p}|^2$ si ha

$$\begin{aligned} Mc^2 - \sqrt{m_1^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} &= \sqrt{m_2^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} \\ M^4 c^2 + (m_1 - m_2)^2 (m_1 + m_2)^2 c^2 + 2M^2 c^2 (m_1 - m_2)(m_1 + m_2) &= \\ &= 4M^2 (m_1^2 c^2 + |\vec{p}|^2) \\ |\vec{p}|^2 &= \frac{M^4 c^2 + (m_1 - m_2)^2 (m_1 + m_2)^2 c^2 - 2M^2 m_1^2 c^2 - 2M^2 m_2^2 c^2}{4M^2} = \\ &= \frac{M^4 c^2 + (m_1 - m_2)^2 (m_1 + m_2)^2 c^2 - M^2 (m_1 + m_2)^2 c^2 - M^2 (m_1 - m_2)^2 c^2}{4M^2} \end{aligned}$$

da cui infine:

$$|\vec{p}| = \frac{\sqrt{[M^2c - (m_1 - m_2)^2c][M^2c - (m_1 + m_2)^2c]}}{2M} \quad (5.66)$$

valida soltanto se

$$M \geq m_1 + m_2 \quad (5.67)$$

che implica la possibilità per una particella di decadere soltanto se la sua massa supera la somma delle masse dei prodotti del decadimento. Se dunque la massa di una particella supera la somma delle masse di altre due particelle, allora essa sarà instabile e potrà di conseguenza decadere in quelle due particelle figlie, a meno che il decadimento non sia interdetto dal rispetto di qualche legge di conservazione quale quella della carica, del momento angolare, ecc. Quella ora espressa è quindi una condizione necessaria, ma non sufficiente, all'avvenire di un particolare decadimento.

Va anche osservato che sia gli impulsi che le energie delle particelle figlie sono fissati dalla massa della particella genitore. Ciò invece non vale nel caso di decadimento in più di due particelle figlie: in tal caso l'impulso di una particella figlia può assumere qualsiasi valore compreso fra 0 e un certo valore massimo determinato dalle masse delle particelle coinvolte.

Tornando al decadimento in due corpi, le energie delle particelle figlie si ottengono dalla 5.65. Quadrando per E_1 ed E_2

$$E_1^2 = m_1^2c^4 + p^2c^2 \quad , \quad E_2^2 = m_2^2c^4 + p^2c^2$$

$$\text{da cui: } E_1^2 - m_1^2c^4 = p^2c^2 = E_2^2 - m_2^2c^4 \quad \implies \quad E_2^2 = E_1^2 - m_1^2c^4 + m_2^2c^4$$

$$\text{quindi: } E_2 = \sqrt{E_1^2 - m_1^2c^4 + m_2^2c^4}$$

Inoltre dalla 5.65

$$E_1 + E_2 = Mc^2 \quad \implies \quad E_2 = Mc^2 - E_1$$

$$\text{da cui: } Mc^2 - E_1 = \sqrt{E_1^2 - m_1^2c^4 + m_2^2c^4 + m_2^2c^4}$$

$$\text{e quadrando: } M^2c^4 - 2E_1Mc^2 = m_2^2c^4 - m_1^2c^4$$

da cui infine:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{M^2c^2 + m_1^2c^2 - m_2^2c^2}{2M} \\ E_2 = \frac{M^2c^2 + m_2^2c^2 - m_1^2c^2}{2M} \end{cases} \quad \text{e similmente,} \quad (5.68)$$

Si noti anche che non c'è una direzione preferita per l'emissione della particella figlia, e il decadimento è quindi *isotropo*. Se però si sceglie la direzione di uno qualsiasi dei due prodotti del decadimento, ad esempio tramite il posizionamento di un rivelatore, allora la direzione d'emissione dell'altro

risulta fissata dalla conservazione dell'impulso e come detto i prodotti del decadimento si muovono *back-to-back* nel sistema di riferimento del centro di massa del genitore.

Nel caso in cui le due particelle figlie abbiano masse identiche, $m_1 = m_2 = m$, come ad esempio nel decadimento $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, le formule 5.68 si semplificano con le energie delle due particelle figlie date da $E_1 = E_2 = Mc^2/2$, e l'impulso dato da $|\vec{p}| = c\sqrt{M^2 - 4m^2}/2$.

È interessante anche il caso di decadimento in due corpi di una particella genitore *in volo*, ovvero descritta da un osservatore non a riposo con il sistema del suo centro di massa, ma in moto rettilineo uniforme rispetto ad esso. L'importanza di questo caso è chiara non appena si pensi che è spesso il solo modo di misurare la massa di particelle-genitore neutre, cioè di carica elettrica nulla.

Si scrivano i quadri-impulsi della particella genitore e delle due particelle figlie

$$P = (E/c, 0, 0, p) \quad (5.69)$$

$$p_1 = (E_1/c, \vec{p}_{1\perp}, p_{1z}) \quad , \quad p_2 = (E_2/c, \vec{p}_{2\perp}, p_{2z})$$

nell'ipotesi di aver scelto l'asse z parallelo alla direzione di volo, e quindi alla velocità della particella madre. La conservazione dell'impulso richiede allora che i vettori bidimensionali degli impulsi trasversi delle due particelle abbiano lo stesso modulo, la stessa direzione e versi opposti:

$$\vec{p}_{1\perp} = -\vec{p}_{2\perp} \quad (5.70)$$

Le energie e le componenti lungo z degli impulsi delle particelle sono collegate ai valori nel sistema del CM da un *Lorentz boost* con velocità pari a quella della particella madre (vedi Appendice D). Indicando con un apice ' le variabili cinematiche nel CM, le trasformazioni di Lorentz per le particelle figlie sono

$$\begin{cases} E_1 = \gamma(E'_1 + vp'_{1z}) \\ p_{1z} = \gamma\left(p'_{1z} + \frac{\beta E'_1}{c}\right) \\ \vec{p}_{1\perp} = \vec{p}'_{1\perp} \end{cases} \quad \begin{cases} E_2 = \gamma(E'_2 + vp'_{2z}) \\ p_{2z} = \gamma\left(p'_{2z} + \frac{\beta E'_2}{c}\right) \\ \vec{p}_{2\perp} = \vec{p}'_{2\perp} \end{cases} \quad (5.71)$$

e ricordando le D.13 dell'Appendice D si ha

$$\beta = \frac{c p}{E} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{E}{Mc^2} \quad (5.72)$$

Il problema è così risolto.

Si possono ora in primo luogo calcolare gli angoli che gli impulsi delle due particelle figlie fanno con l'asse z e l'uno rispetto all'altro, in funzione dell'impulso \vec{p} della particella genitore. A tale scopo è interessante affrontare il

problema senza l'uso diretto delle trasformazioni di Lorentz, partendo dalla conservazione energia-impulso

$$E = E_1 + E_2 = \sqrt{m_1^2 c^4 + p_1^2 c^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + p_2^2 c^2} \quad (5.73)$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (5.74)$$

Sostituendo nella 5.73 p_2^2 con $(\vec{p} - \vec{p}_1)^2$, si ottiene un'equazione che contiene l'impulso incognito p_1 e l'angolo ϑ_1 fra \vec{p}_1 e l'asse z . Risolvere per p_1 è una procedura lunga, anche se diretta, che fornisce

$$p_1 = \frac{(M^2 + m_1^2 - m_2^2) c^2 p \cos\vartheta_1 \pm 2E \sqrt{M^2 p'^2 - m_1^2 p^2 \sin^2\vartheta_1}}{2(M^2 + p^2 \sin^2\vartheta_1)} \quad (5.75)$$

L'esistenza di valori reali per p_1 richiede che $(M^2 p'^2 - m_1^2 p^2 \sin^2\vartheta_1) \geq 0$ e questa condizione è soddisfatta per ogni angolo ϑ_1 se $(Mp'/m_1 p) > 1$. In questo caso bisogna anche scartare la soluzione che prevede il segno " - " in quanto condurrebbe a valori negativi e privi di significato fisico per p_1 , con $\vartheta_1 > \pi/2$. Se d'altronde $(Mp'/m_1 p) < 1$ allora i valori possibili per ϑ_1 sono superiormente limitati in quanto $\sin\vartheta_{1max} = (Mp'/m_1 p)$. In questo caso entrambi i segni danno risultati possibili: per ogni valore $\vartheta_1 < \vartheta_{1max}$ si hanno due possibili valori di p_1 e quindi corrispondentemente anche due possibili valori di p_2 .

Il passo successivo consiste nel considerare la trattazione della dinamica relativistica del decadimento in tre corpi, schematicamente presentato nell'Appendice F. I risultati che ne conseguono si dimostrano utili ad esempio anche quando si vogliono assegnare i corretti numeri quantici di spin, parità, isospin ai mesoni.

5.7 Fissione nucleare

La fissione nei nuclei pesanti fu scoperta sperimentalmente da O. Hahn e F. Strassman nel 1938 quando constatarono che bombardando uranio con neutroni si ottenevano come prodotti nuclei di masse approssimativamente simili alla metà di quella dell'uranio bombardato; il fenomeno fu subito dopo giustificato teoricamente da L. Meitner e O. Frish¹⁸.

Oltre alla fissione indotta si ha anche fissione spontanea quando, senza intervento dall'esterno, un nucleo genitore si spezza spontaneamente in due nuclei figli approssimativamente della medesima massa. Calcoli basati sulla formula semiempirica di Weizsäcker prevedono come si vedrà che il massimo guadagno in energia si ha quando i due frammenti hanno esattamente la stessa massa, ma sperimentalmente si trova che questa configurazione risulta poco probabile. In figura 5.21 si vede ad esempio la distribuzione in massa dei frammenti di fissione del $^{254}_{100}\text{Fm}$.

Distribuzioni di questo tipo sono caratteristiche, oltre che delle fissioni spontanee, anche dei casi di fissioni indotte dall'urto di neutroni termici, mentre invece le fissioni indotte da urti di particelle molto energetiche conducono a distribuzioni di prodotti con masse che sono fra loro molto più simili. La distribuzione in massa dei frammenti di fissione non ha inoltre sempre

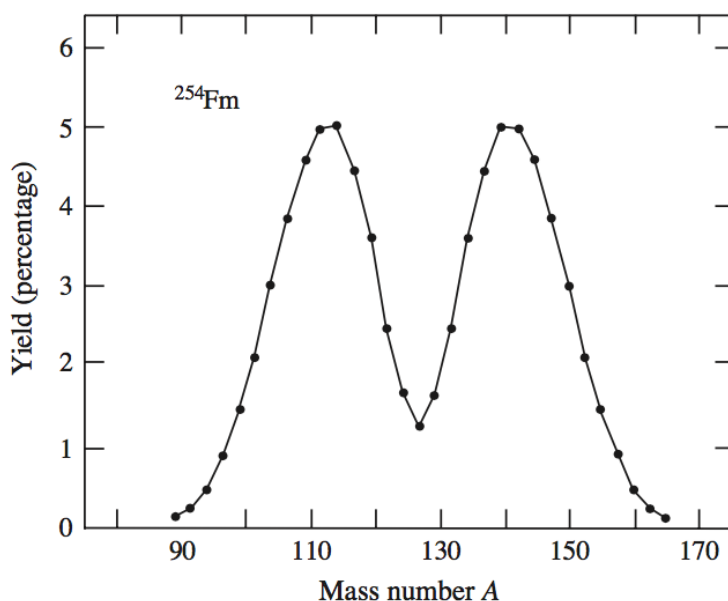


Figura 5.21: Distribuzione in massa dei frammenti di fissione spontanea del Fermio ^{254}Fm .

¹⁸O.R. Frisch, "Physical Evidence for the Division of Heavy Nuclei under Neutron Bombardment" - Supp. to Nature of February 18 (1939) 276

un'andamento "liscio" come quello mostrato in figura e per alcuni nuclei fissionabili evidenza delle irregolarità marcate che sono dovute alla intima struttura a *shell* dei nuclei stessi, come ad esempio mostrato in figura 5.22. Un esempio che mostra la natura decisamente asimmetrica dei frammenti è

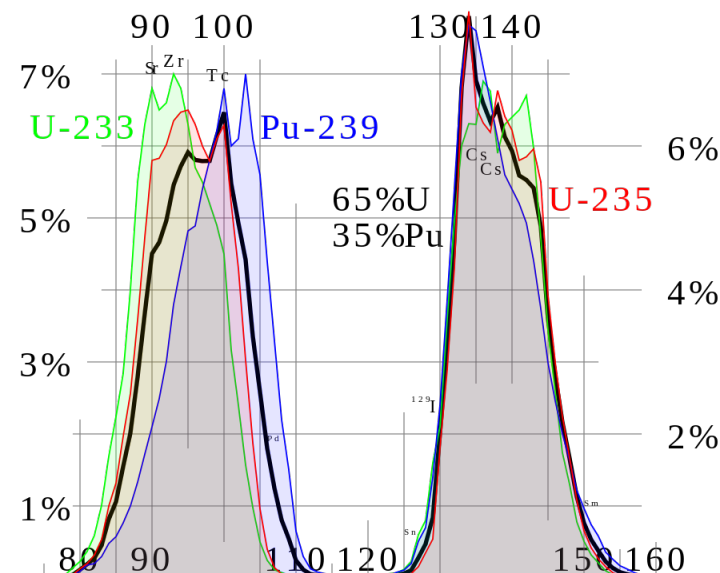
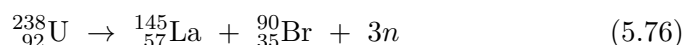


Figura 5.22: Distribuzione in massa dei frammenti di fissione di ^{233}U , ^{235}U e ^{239}Pu ; in nero una tipica miscela utilizzata nei reattori nucleari di potenza.

la fissione spontanea dell'uranio $^{238}_{92}\text{U}$,



processo a vita media molto lunga che rilascia un'energia di circa 154 MeV sotto forma di energia cinetica dei prodotti di fissione.

Come visto dalla tabella dei nuclidi, i nuclei pesanti sono ricchi in neutroni e questo dá conseguentemente luogo a prodotti di fissione anch'essi ricchi in neutroni, assieme ad alcuni neutroni liberi. I prodotti di fissione sono solitamente fuori dalla linea di stabilità per decadimento β e quindi danno tipicamente luogo a successive fasi di decadimento. Il $^{145}_{57}\text{La}$ decade con tre stadi successivi nell'isotopo β -stabile $^{145}_{60}\text{Nd}$, liberando un'energia di 8.5 MeV sotto forma di energia cinetica degli elettroni e dei neutrini emessi.

Nonostante si trovi che la probabilità di fissione spontanea aumenta al crescere di A , essa resta comunque un processo piuttosto raro: il rateo di fissione spontanea per $^{238}_{92}\text{U}$ è ad esempio di soli $3 \times 10^{-24} \text{ s}^{-1}$, mentre il rateo di decadimento α per lo stesso isotopo è pari a $5 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$, ovvero circa 1.7×10^6 volte più intenso. Nel caso del $^{254}_{100}\text{Fm}$ mostrato in figura 5.21, anche se più pesante, il rateo di decadimento α è circa 1.7×10^3 volte superiore a quello di fissione. La fissione diviene il processo di decadimento

dominante soltanto per gli elementi più pesanti, con $A \geq 270$.

Un'interpretazione oltre che qualitativa anche quantitativa del processo di fissione può essere ottenuta basandosi sul modello, formulato nel 1939 con ragionamenti classici da N. Bohr e J.A. Wheeler¹⁹, secondo il quale un nucleo è immaginato come costituito da una *goccia di liquido* di nucleoni, incomprimibile, detto anche *liquido di Fermi*. Si tratta ovviamente di un liquido "speciale": per una goccia di liquido usuale, ad esempio, le condizioni di equilibrio sono determinate dall'azione repulsiva delle forze coulombiane e da quella attrattiva delle forze di tensione superficiale; nel liquido di Fermi queste ultime danno luogo al termine di energia di superficie nell'equazione semiempirica di Weizsäcker che avendo lo stesso segno di quello coulombiano contribuisce invece a ridurre e non ad aumentare il legame nucleare. Si studi quindi, sulla base del modello a goccia, il problema della fissione di un nucleo genitore con numero di massa A ed energia di legame $B(A, Z)$, in due frammenti con numeri di massa simili, ξA e $(1 - \xi)A$ rispettivamente. Si supponga inoltre che anche i protoni si distribuiscano sui due frammenti in modo proporzionale alla massa. Dette $B_1(\xi A, \xi Z)$ e $B_2[(1 - \xi)A, (1 - \xi)Z]$ le energie di legame dei due frammenti, e $B_{12}(A, Z; \xi)$ la loro somma

$$B_{12}(A, Z; \xi) = B_1(\xi A, \xi Z) + B_2[(1 - \xi)A, (1 - \xi)Z] \quad (5.77)$$

si ha che la frammentazione spontanea del nucleo ${}^A_Z X$ nei due frammenti ${}^{\xi A}_{\xi Z} X$ e ${}^{(1-\xi)A}_{(1-\xi)Z} X$ è energeticamente permessa se

$$Q = \Delta B(A, Z; \xi) = B(A, Z) - B_{12}(A, Z; \xi) > 0 \quad (5.78)$$

Quella individuata è soltanto una condizione necessaria e Q rappresenta il grado di *esotermicità* del processo, quando questo può aver luogo.

Nella formula semiempirica di Weizsäcker per l'energia di legame vi sono tre termini "classici" dipendenti esplicitamente dalla forma del nucleo, che qui si immagina appunto come una goccia di liquido incomprimibile: l'energia di volume $B_V(A) = b_V A$, l'energia di superficie $B_S(A) = b_S A^{2/3}$, e l'energia coulombiana $B_C(A) = b_C Z(Z - 1)A^{-1/3} \simeq b_C Z^2 A^{-1/3}$. Tenendo conto di questi si può quindi studiare la stabilità di una goccia di tale liquido in funzione di una perturbazione esterna. La 5.78 diventa

$$Q = \Delta B(A, Z; \xi) = b_S A^{2/3} [1 - \xi^{2/3} - (1 - \xi)^{2/3}] + \\ + b_C Z^2 A^{-1/3} [1 - \xi^{5/3} - (1 - \xi)^{5/3}] > 0 \quad (5.79)$$

Si trova che Q assume valore massimo per $\xi = 1/2$ e calcolandolo ad esempio per il caso di ${}^{238}_{92}\text{U}$, ricordando dalla 4.56 che $b_S = +17.23$ MeV e

¹⁹N. Bohr - J.A. Wheeler, "The Mechanism of Nuclear Fission" - Phys. Rev. 56(1939) 426

$b_C = +0.697$ MeV, si ottiene $Q \simeq 180$ MeV. Nonostante l'ampia esotermicità del processo la probabilità di fissione spontanea per ${}^{238}_{92}\text{U}$ è bassissima, con una vita media superiore a 10^6 anni, e ciò in quanto il sistema deve superare un'elevata barriera di potenziale affinché la fissione possa aver luogo. Per ottenere una seppur grossolana valutazione dell'entità della barriera,

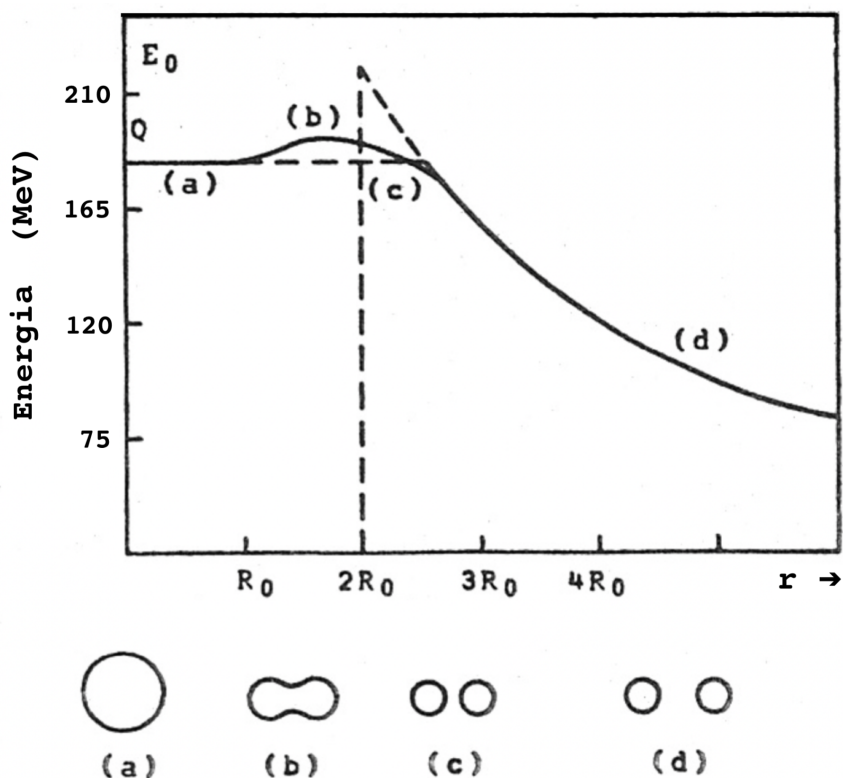


Figura 5.23: Barriera di potenziale per la fissione di ${}^{238}_{92}\text{U}$.

mostrata in figura 5.23, si può ragionare nel modo seguente: si immagini il processo di fusione, inverso alla fissione e si riporti in grafico l'energia di interazione E_{int} fra i due frammenti sferici in funzione della distanza r fra i loro centri. Il valore massimo di E_{int} si ha quando le due sfere che rappresentano i frammenti sono con le superfici a contatto e vale

$$E_{int}^0 = \frac{e^2 (Z/2)^2}{2r_0 (A/2)^{1/3}} \quad (5.80)$$

con r_0 espresso dalla 4.50. Per ${}^{238}_{92}\text{U}$ si ha ad esempio $E_{int}^0 \simeq 249$ MeV. Il valore limite dell'energia per $r \rightarrow 0$ coincide ovviamente con Q , dato dalla 5.79. L'altezza della barriera risulta quindi pari a $\Delta E_{bf} = E_{int}^0 - Q$ e la condizione di instabilità per il sistema è espressa da

$$\Delta E_{bf} = E_{int}^0 - Q \leq 0 \quad (5.81)$$

che per quanto visto, assumendo $\xi = 1/2$, equivale a

$$\left(Z^2/A \right) \gtrsim 59 \quad (5.82)$$

Quanto ottenuto e mostrato in tratteggio in figura, costituisce chiaramente un limite massimo per la barriera e di conseguenza la 5.82 fornisce una valutazione ottimistica della stabilità. La scissione non è infatti ancora avvenuta quando la distanza fra i centri dei due frammenti coincide con $r = 2r_0(A/2)^{1/3}$, e di conseguenza l'energia potenziale non può essere calcolata né con la 5.80 che considera frammenti separati, né con la 5.79 che considera nucleo sferico. L'approccio corretto richiederebbe una complicata equazione delle masse valida per nuclei molto deformati.

Una valutazione più realistica della barriera di potenziale e quindi dei limiti di stabilità del nucleo per fissione spontanea, si può ottenere immaginando di deformare leggermente il nucleo sferico genitore di raggio $R_0 = r_0 A^{1/3}$, riferito a un sistema cartesiano ortogonale centrato nel suo baricentro, lungo un asse, ad esempio lungo z , in modo che assuma almeno approssimativamente la forma di un ellissoide di rotazione prolato di equazione

$$\frac{(x^2 + y^2)}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \quad (5.83)$$

La supposta incomprimibilità della materia nucleare implica che la defor-

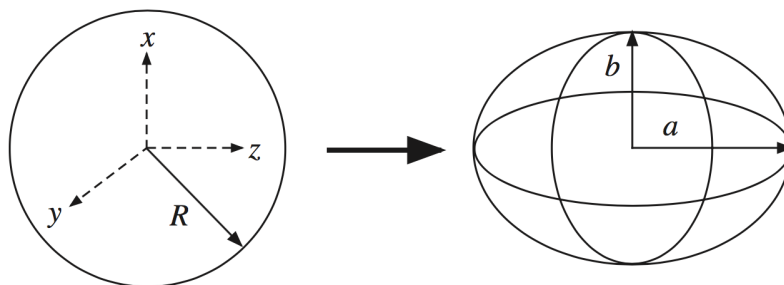


Figura 5.24: Deformazione da sfera a ellissoide prolato.

mazione mantenga inalterato il volume

$$V = \frac{4}{3} \pi ab^2 = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \quad (5.84)$$

Indicando con ϵ il termine perturbativo positivo che interviene a modificare il raggio R_0 della goccia sferica si può allora scrivere

$$a = R_0 (1 + \epsilon) \quad (5.85)$$

e di conseguenza, per la 5.84

$$b = \frac{R_0}{(1 + \epsilon)^{1/2}} < a \quad (5.86)$$

La deformazione produce una variazione dell'energia di legame del nucleo. Detta quindi $B^*(A, Z)$ l'energia del nucleo perturbato si ha che se la differenza

$$\Delta B^*(A, Z) = B(A, Z) - B^*(A, Z) \quad (5.87)$$

è negativa, allora il nucleo è stabile rispetto alla deformazione e una volta cessata la perturbazione, diseccitandosi, ritorna all'originaria condizione di equilibrio con forma sferica di raggio R_0 . Se invece $\Delta B^*(A, Z) > 0$, allora il nucleo è instabile rispetto alla deformazione e se questa viene esaltata fino al punto da provocare la scissione del nucleo in due frammenti di masse confrontabili, si ha il processo di fissione indotto da una perturbazione esterna. Per proseguire ci si riferisca sempre alla formula semiempirica di Weizsäcker e si osservi che i termini di volume, di simmetria e di accoppiamento, essendo dipendenti dalla densità del nucleo che nell'ipotesi di incomprimibilità rimane immutata per deformazioni del volume, rimangono anch'essi sostanzialmente immutati dalla deformazione. Nel calcolo della differenza fra le energie di legame intervengono quindi attivamente soltanto i termini di superficie e coulombiano

$$\Delta B^*(A, Z) = B_S(A) + B_C(A, Z) - B_S^*(A) - B_C^*(A, Z) \quad (5.88)$$

Il termine coulombiano del nucleo deformato è chiaramente minore di quello del nucleo sferico in quanto la deformazione implica un aumento delle distanze medie fra i protoni; il termine di superficie del nucleo deformato è invece maggiore del suo omologo per il nucleo non deformato, in quanto la deformazione implica un aumento della superficie.

Supponendo che la carica elettrica sia uniformemente distribuita entro il volume dell'ellissoide di rotazione si ha

$$\begin{cases} \rho_Z(\vec{r}) = \frac{3Ze}{4\pi ab^2} & \text{per, } \frac{(x^2 + y^2)}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} \leq 1 \\ \rho_Z(\vec{r}) = 0 & \text{per, } \frac{(x^2 + y^2)}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} > 1 \end{cases} \quad (5.89)$$

Calcolando quindi le energie di superficie e coulombiana del nucleo deformato si ottiene

$$B_S^*(A) = \beta_S(\epsilon) B_S(A) \quad , \quad B_C^*(A, Z) = \beta_C(\epsilon) B_C(A, Z) \quad (5.90)$$

con

$$\begin{cases} \beta_C(\epsilon) = \frac{1}{2} \frac{R_0}{(a^2 - b^2)^{1/2}} \ln \frac{a + (a^2 - b^2)^{1/2}}{a - (a^2 - b^2)^{1/2}} \\ \beta_S(\epsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{R_0^2} + \frac{1}{2} \right) \frac{a^2 b}{R_0^2 (a^2 - b^2)^{1/2}} \arccos \left(\frac{b}{a} \right) \end{cases} \quad (5.91)$$

Supposto ragionevolmente piccolo il parametro ϵ di deformazione, si possono sviluppare in serie le 5.91, fermandosi al primo termine non nullo in potenze di ϵ

$$\begin{cases} \beta_C(\epsilon) \simeq 1 - \frac{1}{5}\epsilon^2 \\ \beta_S(\epsilon) \simeq 1 + \frac{2}{5}\epsilon^2 \end{cases} \quad (5.92)$$

ottenendo quindi per $\Delta B^*(A, Z)$

$$\Delta B^*(A, Z) \simeq \frac{1}{5}\epsilon^2 A^{2/3} \left[2b_S - b_C \frac{Z^2}{A} \right] \text{ MeV} \quad (5.93)$$

Per $\Delta B^*(A, Z) = 0$ la goccia di liquido nucleonico è in equilibrio instabile, da cui si ricava il valore critico del rapporto Z^2/A

$$\left(\frac{Z^2}{A} \right)_0 = \frac{2b_S}{b_C} \simeq 49.4 \quad (5.94)$$

Un nucleo è quindi stabile rispetto a piccole deformazioni se

$$\frac{Z^2}{A} \lesssim 49.4 \quad (5.95)$$

La condizione espressa che è soddisfatta per nuclei con $Z \leq 116$ e $A \leq 270$, assicura l'esistenza della barriera di potenziale ed è chiaramente più realistica della 5.82. Per nuclei con $Z^2 > 49.4 A$ la fissione spontanea diventa quindi sempre più probabile per cui se ne può prevedere un alto rateo.

Si può concretizzare ora la condizione necessaria alla fissione espressa dalla 5.78, nel caso di un nucleo genitore sferico ${}^A_Z X$ che si scinde in due nuclei figli ${}^{A/2}_{Z/2} X$ uguali e sferici, ovviamente con Z pari e A pari. Anche in questo caso le energie di volume si cancellano, per la supposta incomprimibilità della materia nucleonica, e assumendo sempre $Z(Z-1) \simeq Z^2$, si ha

$$\begin{aligned} Q &= \Delta B \left(A, Z; \xi = \frac{1}{2} \right) = \simeq b_S A^{2/3} \left(1 - 2^{1/3} \right) + b_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 - 2^{-2/3} \right) \\ &\simeq 0.26 A^{2/3} \left(\frac{Z^2}{A} - 17.2 \right) \text{ MeV} \end{aligned} \quad (5.96)$$

La condizione $\Delta B(A, Z; \xi = 1/2) > 0$, per cui i due frammenti di fissione danno luogo a una configurazione energeticamente più stabile rispetto al nucleo genitore, è dunque soddisfatta per $Z^2 > 17.2 A$. Mettendo assieme quanto ottenuto si individua una regione della tabella dei nuclidi, definita dalla relazione $17.2 A \lesssim Z^2 \lesssim 49.4 A$, in cui benchè la configurazione sferica del nucleo genitore risulti stabile per piccole perturbazioni, comunque la sua

fissione in due frammenti uguali è energeticamente favorevole.

Una deformazione di ampiezza sufficiente può dunque condurre il nucleo al limite della scissione e la sua forma è in tal caso compatibile con una configurazione di equilibrio instabile per spostarlo dalla quale anche di una quantità infinitesima, è sufficiente un lavoro infinitesimo d'ordine superiore.

L'energia minima E_0 necessaria per portare un nucleo dalla configurazione

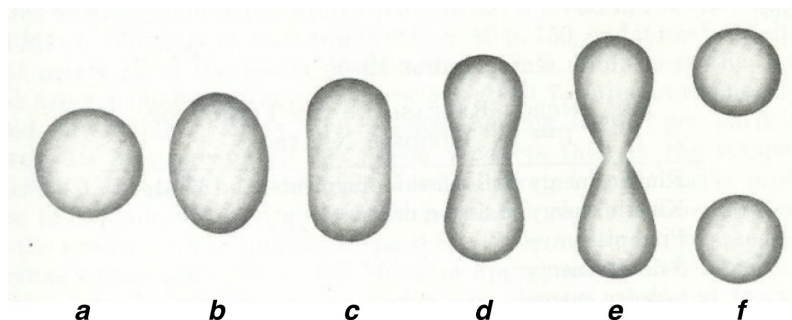


Figura 5.25: Illustrazione schematica della sequenza delle deformazioni nucleari nel processo di fissione.

iniziale "a" a quella finale "f", illustrate in figura 5.25, è detta *energia critica di fissione*, e può essere espressa come

$$E_0 = B_S(A) \beta_0(\zeta) \quad \text{con,} \quad \zeta = \left(\frac{Z^2}{A} \right) \left(\frac{A}{Z^2} \right)_0 \quad (5.97)$$

dove la funzione $\beta_0(\zeta)$ si determina valutando le oscillazioni della goccia di liquido nucleonico tramite il "raggio" $R(\vartheta)$ del nucleo deformato, espresso come opportuno sviluppo in serie di polinomi di Legendre, con ϑ variabile angolare sul piano di simmetria del nucleo. La fissione così descritta si dice *simmetrica* se tutti i coefficienti dispari dello sviluppo sono nulli.

Considerando fissione simmetrica e limitandosi al quarto termine dello sviluppo, l'energia critica di fissione risulta essere il massimo valore assumibile dall'energia di deformazione, espressa dalla 5.88

$$[\Delta B^*(A, Z)]_{max} = E_0 \quad (5.98)$$

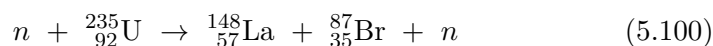
per cui esiste una deformazione critica della "goccia" che massimizza $\Delta B^*(A, Z)$ e si trova essere in corrispondenza di

$$\beta_0(\zeta) = 0.726(1 - \zeta)^3 - 0.330(1 - \zeta)^4 \quad (5.99)$$

Nel caso si voglia indurre la fissione di un nucleo il neutrone rappresenta il proiettile ideale, in quanto la barriera coulombiana del nucleo bersaglio non interviene nel processo del suo assorbimento, in seguito al quale si forma un sistema nucleare metastabile eccitato che può liberarsi dell'eccesso di energia

espellendo il neutrone, spezzandosi in due o più frammenti, o trasformandosi nell'isotopo stabile del nucleo bersaglio. La fissione nucleare è dunque un processo in competizione con la diffusione elastica e anelastica di neutroni e con il processo di cattura radiativa.

È interessante osservare che sperimentalmente si ottiene la fissione di ${}^{235}_{92}\text{U}$ bombardandolo con neutroni termici



che risultano però inefficaci per indurre fissione in ${}^{238}_{92}\text{U}$, che richiede invece neutroni molto più energetici.

Si valuti dunque quale energia cinetica devono avere i neutroni per provocare fissione in un nucleo.

La soglia di fissione E_n^0 si ha quando l'energia d'eccitazione E^* del sistema metastabile coincide con l'energia critica di fissione E_0 , cioè

$$E^* = \epsilon_c + s_n = E_0 \quad (5.101)$$

Data la grande massa dei nuclei bersaglio, rispetto a quella del neutrone, si ha $E_n^0 \simeq \epsilon_c$ e di conseguenza dalla 5.101 si ottiene

$$E_n^0 = E_0(A+1, Z) - s_n(A+1, Z) \quad (5.102)$$

avendo esplicitamente indicato la dipendenza da A e Z delle energie critica di fissione e di legame del neutrone nel sistema metastabile $(n, {}^A_ZX)$.

A_ZX	$({}^{A+1}_Z X)^*$	$E_0(A+1, Z)$ (MeV)	$s_n(A+1, Z)$ (MeV)	$E_n^{(0)}$ (MeV)
${}^{238}_{92}\text{U}$	$({}^{239}_{92}\text{U})^*$	5.7	4.8	0.9
${}^{235}_{92}\text{U}$	$({}^{236}_{92}\text{U})^*$	5.2	6.5	-1.3
${}^{234}_{92}\text{U}$	$({}^{235}_{92}\text{U})^*$	5.0	5.3	-0.3
${}^{232}_{90}\text{Th}$	$({}^{233}_{90}\text{Th})^*$	6.9	5.0	1.9

In tabella sono riportati i valori di E_n^0 per alcuni nuclei pesanti calcolati con la 5.102; i valori di E_0 sono stati calcolati tramite la 5.97 e la 5.99. Valori negativi di E_n^0 indicano che i relativi nuclei non hanno soglia di fissione e possono quindi essere fissionati anche dalla cattura di neutroni termici, la cui energia cinetica è quindi irrilevante ai fini del processo.

Si osservi che nella condizione $17.2 A \lesssim Z^2 \lesssim 49.4 A$, il nucleo genitore potrebbe fissionare anche per *effetto tunnel* attraverso la barriera, ma la probabilità, come discusso parlando del decadimento α , è estremamente bassa data la grande massa del frammento; conseguentemente risulta molto lunga la vita media di questo processo, e quindi bassissimo il suo rateo.

Il fatto che generalmente i frammenti di fissione di un nucleo si distribuiscono asimmetricamente attorno a due diversi valori di massa, porta alla riduzione della barriera coulombiana rispetto al caso della fissione in frammenti uguali, ma non si sono ancora individuati motivi fondamentali che lo spieghino.

La teoria della fissione di Bohr e Wheeler, pur costituendo un approccio classico, riesce a fornire una buona comprensione di molte caratteristiche della fissione, sia di quella indotta che di quella spontanea.

Va anche osservato che nonostante il cruciale ruolo che la fissione nucleare e le sue applicazioni hanno avuto e hanno sulla società, il suo contributo alla conoscenza fondamentale del nucleo atomico non è particolarmente rilevante.

C'è un altro meccanismo che porta nuclei ad emettere frammenti di masse superiori a quelle delle particelle α , ma nel contempo inferiori a quelle dei frammenti di fissione, si tratta della cosiddetta *multiframmentazione*, di cui si tratterà brevemente parlando delle reazioni nucleari.

La grande quantità d'energia liberabile tramite reazioni di fissione ha suggerito e portato allo sviluppo sia di tecnologie per la produzione d'energia elettrica (reattori nucleari) che per la realizzazione di ordigni esplosivi (bombe atomiche). Qualcosa su questi argomenti è riportato in Appendice

Appendice J

Esperimenti sulla scoperta dei neutrini

Antineutrino elettronico

Il primo neutrino ad essere rivelato direttamente fu, come detto, l'antineutrino elettronico $\bar{\nu}_e$, scoperto da Cowan, Reines e collaboratori nel 1956 presso il reattore nucleare di Savannah River. I reattori nucleari rappresentano le più intense sorgenti di (anti)neutrini elettronici disponibili sulla Terra, e li producono con uno spettro continuo che si estende fino ad alcuni MeV di energia. Il flusso è proporzionale alla potenza del reattore e quello di Savannah River, nel Sud Carolina (USA), aveva una potenza di 0.7 GW. Esso fu scelto in quanto disponeva di un locale massicciamente protetto, situato sottoterra, a una dozzina di metri dal "core" del reattore, garantendo un flusso di antineutrini $\bar{\nu}_e$ pari a circa $\Phi = 10^{17} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ sul volume del bersaglio.

Gli antineutrini elettronici possono essere rivelati tramite il processo beta inverso, la cui sezione d'urto è però estremamente piccola, anche se a bassa energia cresce col quadrato di quest'ultima

$$\sigma(\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n) \approx 10^{-47} \left(\frac{E_\nu}{\text{MeV}} \right)^2 \text{ m}^2 \quad (\text{J.1})$$

Un buon bersaglio di protoni, facilmente disponibile, è l'acqua. Una stima grezza di quanta massa ne serva per ottenere un rateo W_1 di interazioni dell'ordine di 2 ÷ 3 ogni ora si può ottenere, immaginando un'energia tipica $E_\nu = 1 \text{ MeV}$, moltiplicando il flusso per la corrispondente sezione d'urto relativa ad un singolo protone: $W_1 = \Phi \sigma \simeq 10^{-30} \text{ s}^{-1}$. Ne consegue che servono circa 10^{27} protoni bersaglio, quindi 10^3 moli, ovvero 18 kg d'acqua. Tenendo conto delle inefficienze dei sistemi di rivelazione ne servono in effetti molti di più, Cowan, Reines e collaboratori decisero quindi di lavorare con 200 kg d'acqua.

La principale difficoltà dell'esperimento non era però tanto legata al rateo

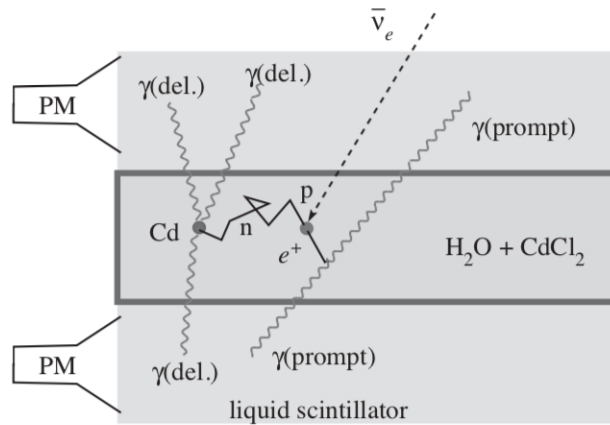


Figura J.1: Schema del principio di selezione degli eventi per l'apparato di misura dell'esperimento di Savannah River.

di interazioni quanto alla possibilità di discriminare efficientemente ogni segnale buono, cioè effettivamente dovuto all'interazione fra un antineutrino elettronico e un protone, rispetto ai segnali di fondo dovuti ad altre sorgenti, con ratei molto superiori e in grado di simulare i segnali cercati. le principali cause di segnali di fondo sono tre: la grande quantità di neutroni di svariate energie che si trova presso un reattore, i raggi cosmici e la radioattività naturale presente nei materiali delle strutture che circondano l'apparato, oltre che nell'acqua stessa utilizzata come bersaglio.

In figura J.1 è illustrato lo schema utilizzato per uno dei due moduli da 100 litri d'acqua del sistema di rivelazione dell'esperimento condotto nel 1955. Il contenitore da 100 litri a forma di parallelepipedo rettangolare, è affacciato su due lati opposti a due rivelatori a scintillatore liquido. Un antineutrino elettronico proveniente dal reattore interagisce con un protone producendo un neutrone ed un positrone. Il positrone annichila immediatamente con un elettrone del bersaglio d'acqua producendo due raggi γ emessi in direzioni opposte ed entrambi di energia pari a 0.511 MeV. Gli elettroni Compton prodotti da questi raggi γ sono poi rivelati dagli scintillatori liquidi che affiancano il bersaglio producendo due segnali praticamente simultanei.

La condizione così definita è molto restrittiva ed è estremamente improbabile venga simulata da eventi di fondo, determinando quella che può essere considerata come una "firma" della produzione di un positrone.

Nonostante ciò i risultati ottenuti non potevano ancora essere considerati risolutivi e quindi l'esperimento venne perfezionato arricchendolo con un ulteriore e molto efficiente modo di discriminazione, legato alla rivelazione del neutrone. L'acqua è un buon moderatore e i neutroni prodotti dalla reazione cercata rallentano in essa divenendo praticamente termici in alcuni microsecondi. Per rivelarli furono disciolti, nei 100 litri d'acqua, 40

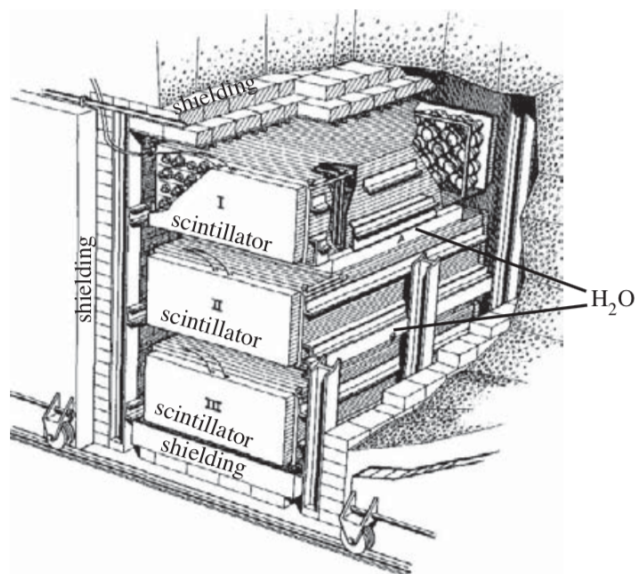
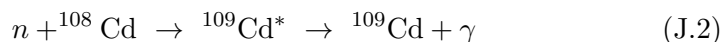


Figura J.2: Schema dell'apparato di misura per dell'esperimento di Savannah River.

kilogrammi di cloruro di cadmio (CdCl_2), nucleo che presenta una grande sezione d'urto di cattura per neutroni termici. Un nucleo di Cd catturando un neutrone si eccita in uno stato dal quale decade rapidamente emettendo raggi γ , rivelabili dagli scintillatori liquidi come "coincidenze ritardate"



Il dispositivo era approntato in modo tale che il raggio γ emesso dal cadmio sarebbe stato rivelato $5 \mu\text{s}$ dopo i raggi γ emessi dall'annichilazione del positrone, se fossero stati prodotti effettivamente dal neutrino.

Un disegno dell'intero apparato è riportato in figura J.2 La riduzione del flusso dei raggi cosmici conseguente alla localizzazione sotterranea dell'esperimento e l'accurato disegno delle strutture di schermatura, furono fattori essenziali alla sua riuscita. Il controllo delle condizioni di misura e l'analisi accurata dei risultati permisero d'affermare che il rateo $W = 3 \pm 0.2$ eventi all'ora non fosse dovuto a cause di fondo ma fosse effettivamente ascrivibile agli eventi cercati, fornendo così, a distanza di 25 anni dall'ipotesi di Pauli, la prima evidenza sperimentale diretta di rivelazione di un (anti)neutrino.

Antineutrino muonico

Il successivo neutrino fu scoperto nel 1962 presso l'acceleratore di protoni AGS di Brookhaven.

L'idea di produrre fasci intensi di neutrini sfruttando intensi fasci di protoni

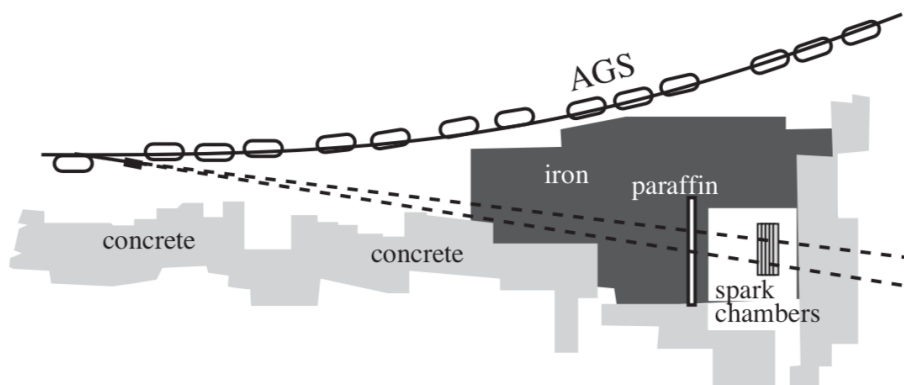


Figura J.3: Schema dell'apparato per l'esperimento a Brookhaven.

ad alta energia fu di M.A. Markov e collaboratori nel 1958, e nel 1959 B. Pontecorvo discusse la possibilità di capire se i neutrini prodotti nel decadimento dei pioni fossero diversi da quelli provenienti dal decadimento beta del neutrone, indagando se i primi fossero in grado di produrre decadimenti beta inversi.

Nel frattempo e indipendentemente, M. Schwartz, nel 1960, riuscì nell'intento di produrre fasci sufficientemente intensi di neutrini muonici, così da superare il problema della ridottissima sezione d'urto. Lo schema dell'arrangiamento sperimentale approntato da L. Lederman, M. Schwartz e J. Steinberger è illustrato in figura J.3. L'intenso fascio di protoni estratto dal canale a vuoto dell'acceleratore AGS era mandato a interagire con un bersaglio di berillio, determinando la produzione di una gran quantità di pioni carichi sia positivamente che negativamente. Il decadimento di questi tramite i processi



in cui neutrino e antineutrino sono prodotti in associazione con un muone. Nel decadimento beta del neutrone i neutrini sono prodotti associati ad elettroni. L'esperimento si proponeva appunto di capire se nei due casi i neutrini prodotti fossero diversi o uguali.

Un "filtro" costituito da uno spessore di 13.5 m di ferro, assieme ad un opportuno spessore di paraffina, fu utilizzato per selezionare soltanto i neutrini prodotti, ed escludere le altre particelle cariche e neutre provenienti dal bersaglio di berillio. Opportune pareti di schermaggio con calcestruzzo servivano anche a proteggere gli sperimentatori dalle intense radiazioni prodotte.

Per rivelare le interazioni prodotte dai neutrini era necessario un sistema che fungesse al tempo stesso da bersaglio e da rivelatore tracciante. In base a

calcoli preliminari si stabilì che la sua massa attiva doveva essere di almeno 10 tonnellate. A quel tempo ciò portò ad escludere una camera a bolle e si optò per la tecnica della camera a scintilla (*spark chamber*), inventata nel 1955 da M. Conversi ed A. Gozzini e perfezionata nel 1959 da S. Fukui e S. Myamoto.

Un elemento di una camera a scintilla consiste in una coppia di piastre metalliche affacciate parallelamente una all'altra e separate da uno spessore di pochi millimetri, riempito da un'opportuna miscela gassosa, che viene reso sensibile applicando alle due piastre una tensione che generi un intenso campo elettrico dell'ordine di circa 1 MV m^{-1} , immediatamente dopo il passaggio di una o più particelle. La scarica elettrica che ne risulta è spazialmente localizzata lungo il tragitto che la particella ha effettuato entro il gas ionizzandolo e si presenta come una scintilla luminosa fotografabile.

Il rivelatore approntato per l'esperimento di Lederman, Schwartz e Steinberger consisteva di dieci moduli, ognuno con nove camere a scintilla. Le piastre erano in alluminio dello spessore di 2.5 cm ognuna, quadrate di lato pari a 110 cm, per una massa totale di 10 tonnellate.

Le fotografie scattate durante l'esposizione del rivelatore ai fasci di neutrini furono analizzate alla ricerca delle reazioni

$$\nu + n \rightarrow \mu^- + p \quad \text{e} \quad \bar{\nu} + p \rightarrow \mu^+ + n \quad (\text{J.4})$$

con produzione di muoni, e

$$\nu + n \rightarrow e^- + p \quad \text{e} \quad \bar{\nu} + p \rightarrow e^+ + n \quad (\text{J.5})$$

con produzione di elettroni. Muoni ed elettroni erano facilmente distinguibili gli uni dagli altri in quanto per i primi le fotografie mostravano una lunga traccia penetrante, mentre per i secondi era evidente uno sciame elettromagnetico.

Il risultato dell'esperimento fu che i neutrini prodotti in associazione ai muoni, quando interagiscono, producono muoni ma non elettroni.