

Capitolo 7

Processi d'urto

Gli esperimenti che coinvolgono processi d'urto sono strumenti fondamentali d'indagine nella fisica nucleare e delle particelle.

In un tipico esperimento d'urto si individuano un oggetto da studiare che funge solitamente da *bersaglio* e dei *proiettili*, sotto forma di fascio incidente. L'individuazione di proiettile e bersaglio non è però sempre univoca, a volte appartengono entrambi a fasci collidenti l'uno contro l'altro e in certi casi si creano fasci di *bersagli* che vengono accelerati contro *proiettili*.

Prendendo come esempio una reazione (2 corpi) in (2 corpi) essa viene genericamente indicata con

$$a + b \longrightarrow c + d \quad (7.1)$$

dove convenzionalmente a e b rappresentano rispettivamente proiettile e bersaglio, mentre c e d vengono detti prodotti di reazione; quanto precede la freccia viene anche indicato come *canale d'ingresso* della reazione, e quanto la segue viene di conseguenza indicato come *canale d'uscita* della reazione. Nel caso di una reazione anelastica il numero dei prodotti di reazione può essere maggiore di due.

Opportuni sistemi di rivelazione permettono di misurare la quantità dei prodotti di reazione, le loro energie, impulsi, masse, spin, e quindi gli angoli relativi delle direzioni d'emissione rispetto a quella del fascio incidente.

Oggi si è in grado di produrre un'ampia varietà di fasci di particelle¹ e ioni, con energie cinetiche variabili da un minimo di circa 10^{-3} eV per neutroni freddi, sino a 2.6×10^{12} eV/N per ioni Pb, e 6.5×10^{12} eV per protoni, entrambi accelerati presso l'anello LHC al CERN.

Si possono anche produrre e utilizzare fasci secondari di particelle o ioni frutto dell'interazione primaria, eventualmente ad alte energie, di altre particelle o ioni; questi fasci secondari possono essere costituiti da particelle a breve vita media quali muoni μ , mesoni π o K, iperoni ($\Sigma^\pm, \Xi^-, \Omega^-$), o da nuclei radioattivi.

¹Si veda il Cap. 2 sugli acceleratori.

I bersagli utilizzati possono essere sotto forma solida, liquida, gassosa o come detto, costituire a loro volta fasci di particelle accelerate, come negli anelli ad accumulazione.

Conviene distinguere i processi d'urto in processi elastici e processi anelastici. Un tipico processo elastico, per il quale i prodotti di reazione coincidono con

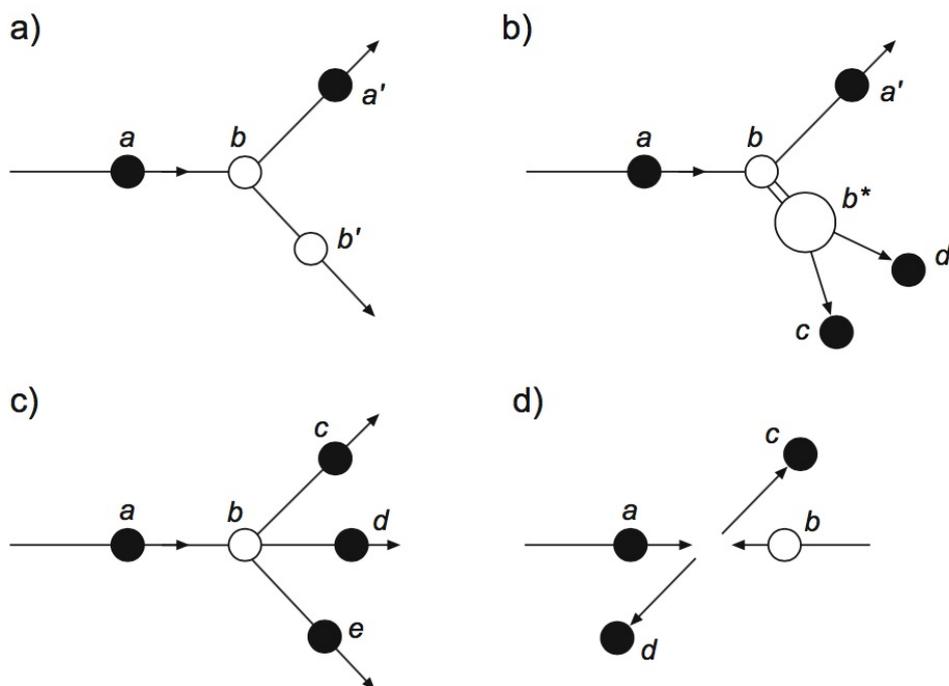


Figura 7.1: Schematizzazione dei processi d'urto: a) diffusione elastica; b) diffusione anelastica con produzione di uno stato eccitato che poi decade in due particelle; c) produzione anelastica di nuove particelle; d) reazioni tra fasci collidenti.

i due soggetti inizialmente coinvolti nell'urto, è indicato con

$$a + b \longrightarrow a' + b' \quad (7.2)$$

In questo caso sia proiettile che bersaglio restano nel proprio stato fondamentale anche dopo l'urto, col bersaglio che assorbe semplicemente l'impulso di rinculo modificando di conseguenza la propria energia cinetica; l'energia cinetica totale naturalmente si conserva, data la supposta elasticità dell'urto. Gli apici segnalano quindi la sola diversità che caratterizza i soggetti del canale d'ingresso da quelli del canale d'uscita, ovvero i parametri cinematici (impulso ed energia cinetica). Gli angoli d'emissione e le energie cinetiche delle due particelle nel canale d'uscita di una reazione elastica sono univocamente correlati.

Similmente a quanto si ha in ottica, il legame fra intensità di particelle diffuse, energia del fascio incidente e angoli di diffusione, fornisce informazioni sulla distribuzione spaziale del bersaglio.

Quanto più piccola è la dimensione dell'estensione spaziale del bersaglio, tanto maggiori sono le energie cinetiche richieste alle particelle del fascio incidente, per ottenerne una buona risoluzione spaziale. Se infatti $\lambda = \lambda/2\pi$ è la lunghezza d'onda di de Broglie di una particella con impulso p , si ha

$$\lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar c}{\sqrt{2mc^2 E_k + E_k^2}} \approx \begin{cases} \frac{\hbar}{\sqrt{2mE_k}} & \text{per } E_k \ll mc^2 \\ \frac{\hbar c}{E_k} \approx \frac{\hbar c}{E} & \text{per } E_k \gg mc^2 \end{cases} \quad (7.3)$$

Per ottenere una ragionevole risoluzione spaziale di strutture fisiche con dimensioni lineari Δx servono lunghezze d'onda dello stesso ordine di grandezza: $\lambda \approx \Delta x$. Tenendo conto del principio di indeterminazione si ha, per gli impulsi corrispondenti delle particelle dei fasci incidenti

$$p \gtrsim \frac{\hbar}{\Delta x}, \quad pc \gtrsim \frac{\hbar c}{\Delta x} \approx \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{\Delta x} \quad (7.4)$$

Si deduce da ciò che per risolvere spazialmente le tipiche dimensioni nucleari, che sono di alcune unità di fm, servono fasci di particelle con impulsi di alcune decine di MeV/c.

I singoli nucleoni, come si vedrà, hanno dimensioni lineari dell'ordine di 0.8 fm, e per risolverli spazialmente servono quindi fasci di particelle con impulsi maggiori a 100 MeV/c. Volendo invece risolvere spazialmente i quark, costituenti dei nucleoni, servono fasci di particelle con impulsi di molti GeV/c. In figura 7.2 è illustrata la corrispondenza fra energia cinetica, impulso e lunghezza d'onda di de Broglie per alcune particelle: γ , e , μ , p , α .

In un processo anelastico

$$\begin{array}{ccc} a + b & \longrightarrow & b^* + a' \\ & & \downarrow \\ & & c + d \end{array} \quad (7.5)$$

una parte dell'energia cinetica trasferita dal proiettile a al bersaglio b eccita quest'ultimo portandolo allo stato b^* , come schematizzato al punto b) della figura 7.1.

Successivamente lo stato eccitato tornerà allo stato fondamentale emettendo particelle leggere quali fotoni γ o pioni π , e/o decadendo in due o più frammenti e/o particelle.

Talvolta le misure sperimentali su reazioni nucleari non permettono di rivelare tutti i prodotti di reazione e spesso si rivela soltanto il prodotto a' ; in tal caso la misura eseguita si dice *inclusiva*. Quando invece si rivelano tutti i prodotti di reazione si parla di misura *esclusiva*. Il verificarsi di reazioni

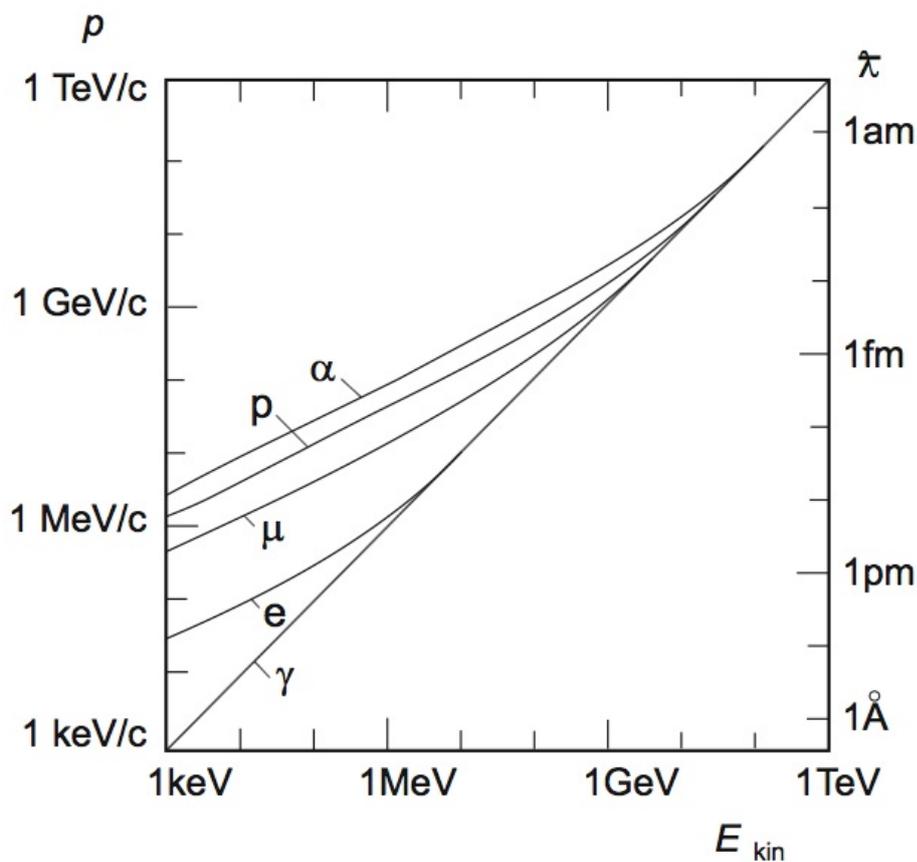


Figura 7.2: Corrispondenza fra energia cinetica, impulso e lunghezza d'onda ridotta di de Broglie per un certo numero di particelle.

nucleari avviene sempre nel rispetto di un certo insieme di leggi di conservazione, oltre a quelle ben note dell'impulso totale, del momento angolare totale e dell'energia totale. In particolare ve ne sono che implicano la conservazione di numeri quantici legati ai caratteri leptonico o barionico dei soggetti coinvolti nei canali d'ingresso e di uscita delle reazioni.

Nel rispetto di tali leggi può avvenire che nel corso della reazione particelle del fascio presenti nel canale d'ingresso non si ritrovino nel canale d'uscita e che l'equivalente energetico della loro massa, e/o parte della loro energia cinetica, si trasformino in altre particelle e/o eccitazione dei prodotti presenti nel canale d'uscita della reazione.

7.1 Sezioni d'urto: introduzione operativa

La misura dei tassi di reazione in esperimenti d'urto, detti anche di diffusione o di scattering, così come gli spettri energetici e le distribuzioni angolari dei prodotti di reazione, forniscono informazioni sulle caratteristiche dinamiche delle interazioni fra proiettili e bersagli, quindi sulla forma del potenziale d'interazione e sull'intensità della forza d'accoppiamento.

Si introduce ora uno strumento concettuale utile nella descrizione delle interazioni fra particelle, o fra nuclei, o fra particelle e nuclei: la *sezione d'urto*. Si immaginerà di descrivere una situazione idealizzata, senza peraltro che ciò costituisca un limite alla generalità di quanto verrà dedotto.

Si pensi di preparare un esperimento in cui si invia un fascio collimato di proiettili a (particelle o nuclei), monocinetici di velocità \vec{v}_a contro un bersaglio costituito da oggetti b tutti fra loro uguali e distribuiti in posizioni fisse entro il volume del bersaglio. Si suppone che sia i proiettili che gli i "bersagli" b siano "puntiformi", e ci si riferirà ad essi semplicemente come "particelle", specificando se proiettile o bersaglio.

Si discute il problema immaginando che il bersaglio sia a riposo nel sistema di riferimento del laboratorio (SL).

Si suppone altresì che la "densità istantanea" n_a di particelle proiettile nel fascio incidente sia costante nel tempo e in ogni parte del fascio stesso, e che sia costante anche la densità n_b nel bersaglio delle particelle b che lo costituiscono. Quindi le particelle di fascio e bersaglio sono omogeneamente distribuite in essi.

Si dirà che una particella a del fascio ha interagito con una particella b del bersaglio, indicando formalmente il processo con " $a+b$ ", se lo stato dinamico della particella proiettile a , dopo che questa ha inciso sul bersaglio, è diverso da quanto non fosse prima dell'interazione. Per semplificare il ragionamento sempre senza inficiarne la generalità, si può immaginare che la massa di ogni particella bersaglio b sia molto grande, al limite infinita, così da poterne trascurare il rinculo successivo all'interazione su essa delle particelle a del fascio incidente.

Si suppone anche che ogni particella del fascio possa interagire al più con una sola particella bersaglio.

Ci si pone quindi il problema di determinare, conoscendo il numero dN_a/dt di particelle proiettile che incidono sul bersaglio nell'unità di tempo, il numero dN/dt di quelle che attraversando il bersaglio interagiscono con esso, ovvero con una delle particelle che lo costituiscono.

dN/dt è detto anche "tasso di interazioni" o "tasso di reazioni" e indicando con dN'_a/dt il numero di particelle del fascio che emergono ogni secondo dal bersaglio senza aver interagito con esso si ha

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_a}{dt} - \frac{dN'_a}{dt} = \frac{d}{dt} (N_a - N'_a) \quad (7.6)$$

Si supponga ancora che il bersaglio si presenti macroscopicamente come una lastra di spessore costante Δz e che tutte le particelle del fascio incidano ortogonalmente su una faccia planare della lastra bersaglio, provenendo lungo traiettorie parallele che individuano un volume di forma sostanzialmente cilindrica di cui A rappresenta l'area della sezione retta, di forma non necessariamente circolare.

In queste ipotesi il numero dN_a/dt di particelle proiettile incidenti nell'unità di tempo, ovvero il flusso Φ_a di particelle incidenti, sarà dato da

$$\frac{dN_a}{dt} = \Phi_a = n_a v_a A \quad (7.7)$$

Quanto detto delinea una geometria dell'urto illustrata in figura 7.3, in cui l'asse di simmetria, indicato con z , è parallelo ed equiverso alla velocità \vec{v}_a di ogni particella incidente, ed è quindi ortogonale alla faccia planare che il bersaglio macroscopico offre al fascio stesso.

Per proseguire bisogna tener conto di cosa significhi l'interagire fra una

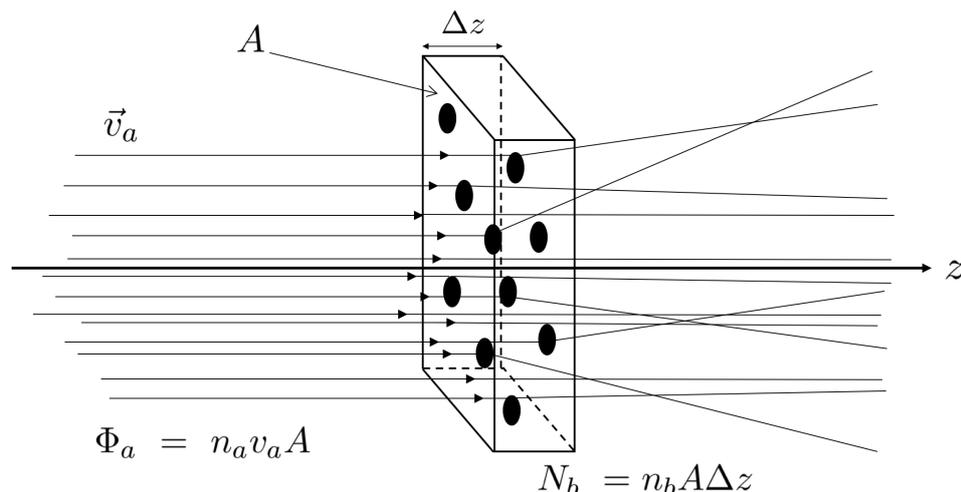


Figura 7.3: Sezione d'urto geometrica di reazione.

particella del fascio e una del bersaglio e di conseguenza di come lo si possa descrivere, introducendo qualcosa che rappresenti la "probabilità d'interazione".

Si è detto che si considera effetto dell'interazione il cambiamento delle proprietà dinamiche per una particella incidente, questo cambiamento determina quindi una diffusione della particella incidente rispetto alla sua traiettoria iniziale di avvicinamento. Supponendo che l'interazione avvenga al più con una delle particelle bersaglio, queste verranno anche dette "centri diffusori". Il numero N_b di centri diffusori omogeneamente distribuiti nella parte di volume $V = A \times \Delta z$ del bersaglio intersecata dal fascio, e con cui ogni

particella incidente può potenzialmente interagire, è dato da

$$N_b = n_b A \Delta z \quad (7.8)$$

Si schematizza l'interazione fra una particella del fascio e un centro diffusore come qualcosa di temporalmente "istantaneo" che si produce sulla particella proiettile nell'istante in cui questa, transitando presso il centro diffusore, si trova in corrispondenza della coordinata z individuata dall'intersezione fra l'asse z e il piano orogonale ad esso e passante per il centro diffusore interessato.

Si associa quindi al centro diffusore un'area circolare σ_b , centrata su di esso e individuata nel piano indicato. Si dirà quindi che la particella incidente, transitando presso il centro diffusore ha interagito con esso se la sua traiettoria di avvicinamento interseca σ_b . Ovviamente ciò avviene con tanta maggior probabilità quanto maggiore è il valore di σ_b .

La quantità σ_b così introdotta viene detta *sezione d'urto geometrica* per l'interazione fra la particella proiettile a e quella bersaglio b e la sua entità è chiaramente funzione anche del tipo di interazione che si considera.

Si torni quindi al problema originale, ovvero determinare il numero dN/dt di particelle incidenti che attraversando il bersaglio nell'unità di tempo interagiscono con esso.

Tale numero dipende ovviamente dal numero dN_a/dt di particelle incidenti sul bersaglio nell'unità di tempo, ed è indipendente da quale probabilità ognuna di esse ha di attraversare un'area σ_b associata a uno dei centri diffusori del bersaglio. Dato che si è indicata con A l'area della sezione retta del fascio incidente e quindi della porzione di bersaglio interessata, la probabilità dell'interazione fra una particella proiettile e un centro diffusore sarà il rapporto fra la somma delle aree σ_b associate a tutti i centri diffusori omogeneamente distribuiti nella parte di volume bersaglio intersecata dal fascio, e A stesso, naturalmente nell'ipotesi che non vi siano sezioni d'urto di centri diffusori che ne oscurano anche solo parzialmente delle altre, lungo la direzione dell'asse z , quindi

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_a}{dt} \frac{\sigma_b N_b}{A} = \frac{dN_a}{dt} \sigma_b n_b \Delta z \quad (7.9)$$

che esplicitando dN_a/dt diventa

$$\frac{dN}{dt} = n_a v_a N_b \sigma_b = n_a v_a n_b \Delta z A \sigma_b \quad (7.10)$$

da cui si ottiene, per la sezione d'urto geometrica σ_b

$$\sigma_b = \frac{dN}{dt} \frac{1}{n_a v_a n_b \Delta z A} = \frac{dN}{dt} \frac{1}{\Phi_a n_b \Delta z} = \frac{dN}{dt} \frac{1}{\Phi_a \delta_s} \quad (7.11)$$

dove $\delta_s = n_b \Delta z$ è detta densità areale dei centri diffusori b e ha le dimensioni dell'inverso di un'area.

Ricordando che la probabilità che qualcosa abbia luogo si esprime anche come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili si ha, in base alla 7.9 e individuando con dN i casi favorevoli di diffusione dovuta a interazione fra particelle incidenti e bersaglio in un certo intervallo dt di tempo, e con dN_a i casi possibili nello stesso intervallo di tempo

$$\sigma_b = \frac{dN}{dN_a} \frac{1}{n_b \Delta z} = \frac{dN}{dN_a} \frac{1}{\delta_s} \quad (7.12)$$

La dimensione fisica della sezione d'urto è dunque quella di un'area, tipicamente indipendente dalla geometria del modo in cui è eseguita la misura. Sperimentalmente, per garantire quanto più possibile il rispetto della condizione che non vi siano sezioni d'urto associate a centri diffusori nell'ombra di quelle associate ad altri centri diffusori dello stesso bersaglio, e per evitare urti multipli delle particelle incidenti con diversi centri diffusori, si cerca di realizzare bersagli il più sottili possibile.

Negli esperimenti di fisica nucleare e sub-nucleare i valori misurati delle sezioni d'urto sono dell'ordine di 10^{-28} m^2 , ovvero 1 barn, o di suoi sottomultipli.

Quanto delineato per la sezione d'urto geometrica di reazione intesa come area associata alle particelle bersaglio, efficace a determinare l'interazione, anche se molto schematico rappresenta però una buona approssimazione dell'effettiva sezione d'urto di reazione. Come esempio valga il caso dell'urto fra protoni ad alte energie, dove l'estensione spaziale delle particelle è confrontabile con l'estensione del loro raggio d'interazione (forte)².

Si trova che la probabilità che due particelle o nuclei interagiscano dipende in realtà da svariati e anche molto complessi fattori, il più delle volte fra loro indipendenti, che non traspaiono chiaramente dal semplice approccio geometrico visto.

Spesso si osserva una forte dipendenza dall'energia in gioco, come ad esempio nel caso della cattura di neutroni termici da parte dell'uranio, processo per il quale la sezione d'urto varia di alcuni ordini di grandezza in un ristretto intervallo di valori d'energia.

Anche il tipo di interazione ha un ruolo importante: se ad esempio si considera il tasso d'interazione di particelle sostanzialmente puntiformi quali sono i *neutrini*, che interagiscono solo *debolmente* con il resto della materia³, lo si trova estremamente minore rispetto a quello degli *elettroni*, a loro volta assumibili a particelle puntiformi che però sentono anche l'interazione elettromagnetica.

²Si vedano ad esempio i risultati riportati in

³L'ordine di grandezza delle tipiche sezioni d'urto per l'interazione fra neutrini e materia è di 10^{-48} m^2 , ovvero 10^{-20} barn.

Sezione d'urto d'interazione

La sezione d'urto d'interazione efficace non dipende principalmente dalla geometria del processo d'urto coinvolto, ma piuttosto dalla forma, dall'intensità e dal raggio d'azione del potenziale d'interazione in gioco.

Essa può essere determinata dalla misura del tasso di reazione se sono noti il flusso delle particelle incidenti e la densità areale dei centri di diffusione, come espresso dalla 7.11.

In modo analogo a quanto fatto con la sezione d'urto geometrica si definisce una *sezione d'urto totale* di reazione σ_{Tot} come

$$\sigma_{Tot} = \frac{\text{numero di eventi di diffusione per unità di tempo}}{\text{part. inc. per unità di tempo} \times \text{centri diffusori per unità d'area}} \quad (7.13)$$

Proseguendo con l'analogia si possono anche introdurre una sezione d'urto σ_{el} per le reazioni *elastiche* e una σ_{anel} per quelle *anelastiche*, fra loro legate dalla relazione

$$\sigma_{Tot} = \sigma_{el} + \sigma_{anel} \quad (7.14)$$

Lunghezza di attenuazione

Si consideri ora il problema che sorge quando si ha la necessità di valutare l'intensità residua di un fascio incidente su un bersaglio spesso. Si supponga di avere un fascio di intensità iniziale I_0 incidente su un bersaglio spesso di densità $\rho \text{ kg} \times \text{m}^{-3}$. Sia z la lunghezza del percorso compiuto dalle particelle del fascio penetrate nel bersaglio e si voglia determinare l'intensità residua $I(z)$ del fascio in funzione di z . Si consideri un generico spessore infinitesimo di bersaglio compreso fra z e $z + dz$ e sia dR_i il numero totale di interazioni per unità di tempo fra particelle del fascio e centri diffusori del bersaglio nello spessore dz . La corrispondente variazione dell'intensità del fascio sarà dunque $dI(z) = -dR_i$.

Detta come in precedenza A l'area della sezione del bersaglio ortogonale alla direzione z , il flusso di particelle incidenti del fascio attraverso essa è dato da

$$\varphi_b(z) = \frac{I(z)}{A}$$

Ricordando il significato di sezione d'urto totale σ_{Tot} si ha quindi

$$dI(z) = -dR_i = -\sigma_{Tot} \varphi_b(z) dN_b = -\sigma_{Tot} \frac{I(z)}{A} n_b A dz$$

da cui

$$\frac{dI(z)}{I(z)} = -n_b \sigma_{Tot} dz$$

e infine

$$I(z) = I_0 e^{-n_b z \sigma_{Tot}} \quad (7.15)$$

Si definisce quindi la cosiddetta "lunghezza di attenuazione" L_{att} come la distanza percorsa dal fascio nel bersaglio, dopo la quale l'intensità del fascio stesso si è ridotta di un fattore $1/e$,

$$L_{att} = \frac{1}{n_b \sigma_{Tot}} \quad (7.16)$$

Luminosità

Un'altra grandezza utile è la "luminosità" \mathcal{L} , definita come il numero di urti potenziali nell'unità di tempo fra le particelle di un fascio incidente e i centri diffusori di un bersaglio, ovvero la quantità $\Phi_a \delta_s$. Dalla 7.11 si ha

$$\mathcal{L} = \Phi_a \delta_s = \frac{1}{\sigma_b} \frac{dN}{dt} \quad (7.17)$$

per cui la luminosità ha le dimensioni dell'inverso di un'area per l'inverso di un tempo: $[\mathcal{L}] = [m]^{-2} [s]^{-1}$.

Nel caso si tratti non di un fascio collidente contro un bersaglio fisso ma dell'interazione di due fasci, costituiti da successivi pacchetti di particelle⁴ equispaziati e portati a collidere l'uno contro l'altro in un anello di accumulazione la cui circonferenza sia lunga C , si definisce la luminosità secondo il seguente ragionamento: si supponga vi siano k pacchetti di particelle, circolanti ognuno con velocità di modulo v , e si indichino rispettivamente con N_a ed N_b i numeri di particelle presenti nei pacchetti circolanti in un verso e nel verso opposto. Opportuni campi magnetici li portano a collidere in un particolare punto della traiettoria circolare un numero pari a $(k v)/C$ volte al secondo. La luminosità risulta quindi essere

$$\mathcal{L} = \frac{(N_a N_b k v)/C}{A} \quad (7.18)$$

dove A rappresenta l'area della sezione retta del volume d'intersezione dei fasci in corrispondenza della zona in cui avviene l'urto.

Naturalmente la luminosità aumenta al migliorare della focalizzazione dei fasci entro un'area A che in questo caso appunto diminuisce in corrispondenza della zona d'interazione.

Si definisce anche la *luminosità integrata* come

$$\mathcal{L}_{int} = \int \mathcal{L} dt \quad (7.19)$$

Il numero $N(\Delta t)$ di interazioni osservabili in un certo intervallo di tempo Δt coincide quindi col prodotto fra la luminosità integrata nell'arco di tempo Δt e la relativa sezione d'urto totale σ_{Tot}

$$N(\Delta t) = \mathcal{L}_{int} \cdot \sigma_{Tot} \quad (7.20)$$

⁴Si veda il Cap. 2 sugli acceleratori.

Sperimentalmente si osserva in pratica sempre soltanto una frazione dei prodotti di tutte le interazioni che hanno luogo fra particelle incidenti e bersagli, e ciò per svariati motivi, spesso anche legati a difficoltà tecniche nel riuscire ad osservare contemporaneamente i prodotti di reazione emessi in ogni possibile direzione, o ad esempio per motivi di indisponibilità finanziaria a poter disporre strumenti di rivelazione adeguati in modo tale da coprire contemporaneamente tutte le possibili direzioni d'emissione dei prodotti di reazione. La luminosità è nondimeno un parametro qualificante fondamentale delle macchine acceleratrici.

Sezione d'urto differenziale

Spesso è importante poter distinguere i prodotti di reazione in funzione della loro direzione d'emissione e questo richiede di tassellare l'intero angolo solido di possibile emissione ($\Omega = 4\pi$) in sottoinsiemi $\Delta\Omega$ di cui si conosca l'orientazione dell'asse.

Facendo come esempio riferimento allo schema in figura 7.4, dove si ipotizza un fascio incidente su un bersaglio fisso rispetto al laboratorio, si chiami $\Delta\Omega \simeq A_D/r^2$ l'angolo solido sotteso da un rivelatore di area attiva A_D , posto a distanza r dal punto d'interazione, con $r \gg \sqrt{A_D}$. Il tasso di

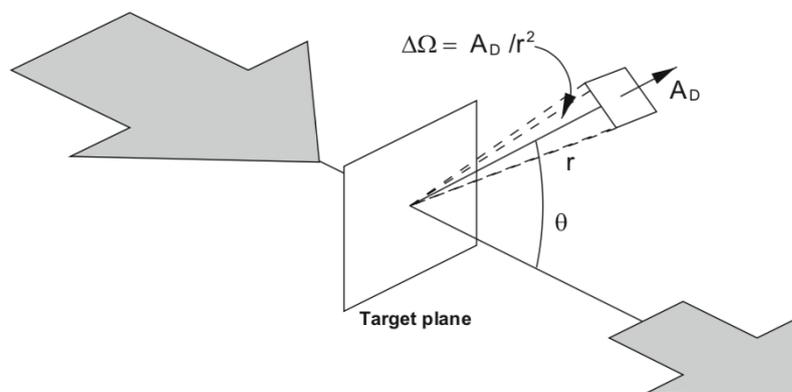


Figura 7.4: Sezione d'urto differenziale: solo le particelle diffuse entro l'angolo solido $\Delta\Omega$ sono poi raccolte dal rivelatore di area attiva A_D

reazioni visibili da questo rivelatore è allora proporzionale a quella che viene chiamata *sezione d'urto differenziale*

$$\frac{d\sigma(E, \vartheta, \varphi)}{d\Omega} \quad \text{con, in coord. polari sferiche} \quad d\Omega = \sin\vartheta \, d\vartheta d\varphi \quad (7.21)$$

in cui si è qui evidenziata anche la dipendenza dall'energia in gioco nel canale d'ingresso della reazione stessa

$$\frac{dN(E, \vartheta, \varphi, \Delta\Omega)}{dt} = \mathcal{L} \frac{d\sigma(E, \vartheta, \varphi)}{d\Omega} \Delta\Omega \quad (7.22)$$

Nel caso in cui il rivelatore utilizzato sia in grado di misurare anche l'energia E' delle particelle diffuse allora si può definire e misurare anche quella che viene chiamata *sezione d'urto doppiamente differenziale*, indicata con: $d^2\sigma(E, E', \vartheta, \varphi)/d\Omega dE'$.

La sezione d'urto totale σ_{Tot} si calcola quindi integrando la sezione d'urto doppiamente differenziale sull'intero angolo solido e su tutto lo spettro delle energie di diffusione

$$\sigma_{Tot}(E) = \int_0^{E'_{max}} \int_{4\pi} \frac{d^2\sigma(E, E', \vartheta, \varphi)}{d\Omega dE'} d\Omega dE' \quad (7.23)$$

La conoscenza della sezione d'urto differenziale di un processo che conduce un sistema dallo stato iniziale i allo stato finale f , permette di calcolare la probabilità di transizione nell'unità di tempo $dP_{i \rightarrow f}/dt$ associata ad ogni particella bersaglio

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dP_{i \rightarrow f}}{dt} \frac{V}{v_a} \quad (7.24)$$

essendo, $V = A \times \Delta z$ il volume efficace del bersaglio e v_a il modulo della velocità di ogni particella incidente.

A seconda del problema studiato, lo stato finale f può essere caratterizzato da diverse variabili associate alla particella diffusa. Una quantità tipicamente considerata è l'impulso \vec{p} della particella diffusa nello stato finale. In tal caso la sezione d'urto totale σ_{Tot} del processo si ottiene integrando la sezione d'urto differenziale $d\sigma/d\vec{p}$ su tutti i possibili valori di \vec{p}

$$\sigma_{Tot} = \int_f \frac{d\sigma}{d\vec{p}} d\vec{p} \quad (7.25)$$

La quantità $d\vec{p}$ può poi essere esplicitata in diverse coordinate, a seconda della migliore geometria in cui trattare il problema specifico

$$\begin{aligned} d\vec{p} &\equiv dp'_x dp'_y dp'_z && \text{cartesiane ortogonali} \\ &\equiv p'^2 dp' \sin\vartheta' d\vartheta' d\varphi' && \text{sferiche} \\ &\equiv p'_\perp dp'_\perp dp'_\parallel d\varphi' && \text{cilindriche} \end{aligned} \quad (7.26)$$

dove con i simboli " \parallel ", " \perp " e " φ " si intendono rispettivamente le coordinate assiale, radiale e angolare, come anche trattato nell'Appendice D.1.

Sezione d'urto invariante

Il sistema di riferimento naturale per un processo d'urto è quello del centro di massa delle particelle che interagiscono, e può non coincidere col sistema di riferimento in cui si effettua la misura.

Le caratteristiche di un processo non devono del resto dipendere dal particolare sistema di riferimento scelto per la misura, infatti la sezione d'urto è definita sostanzialmente come una superficie ortogonale alla direzione del moto delle particelle incidenti, ed è quindi un invariante relativistico.

Ricordando le leggi di trasformazione delle variabili dal sistema del laboratorio al sistema del centro di massa, come riportato in Appendice D.1, si può esprimere la sezione d'urto differenziale in funzione di variabili invarianti.

Le componenti dell'impulso si trasformano come indicato dalla D.23 e quindi $d\vec{p}$ non è un invariante, come non lo è $d\vec{p}_{\parallel}$, mentre invece lo sono $d\vec{p}_{\perp}$ e $d\sigma$.

Il rapporto $d\vec{p}_{\parallel}/E$ è invariante, essendo $(E/c) = (p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2 + m^2c^2)^{1/2}$,

$$\begin{aligned} dp'_{\parallel} &= \gamma (dp_{\parallel} - \beta dE) = \gamma dp_{\parallel} \left(1 - \frac{\beta p_{\parallel}}{E}\right) = \\ &= \frac{\gamma E - \beta \gamma p_{\parallel}}{E} dp_{\parallel} = \frac{E'}{E} dp_{\parallel} \end{aligned} \quad (7.27)$$

Di conseguenza la *sezione d'urto invariante*

$$E \frac{d\sigma}{d\vec{p}} \quad (7.28)$$

è indipendente dal sistema di riferimento scelto per effettuare la misura.

7.2 Invarianti cinematici

Si introducono ora alcuni concetti fondamentali per il corretto approccio relativistico allo studio dei fenomeni d'urto.

I trivettori saranno indicati con la freccia, e il loro modulo ponendoli entro barre verticali, per distinguerli dai quadrivettori.

La massa m di un sistema fisico, quale un insieme di particelle, è spesso detta *massa invariante*, anche se l'aggettivo "invariante" è pleonastico dato che la massa, essendo una proprietà intrinseca del sistema fisico, è necessariamente invariante⁵.

La sua espressione matematica è semplice solo per particelle fra loro "non interagenti". In tal caso, per n particelle di energie E_i e impulsi \vec{p}_i , si ha

$$m = \frac{1}{c^2} \sqrt{E^2 - \vec{p}^2 c^2} = \frac{1}{c^2} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n E_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i\right)^2} \quad (7.29)$$

Il quadrato della massa, solitamente indicato con s , è anch'esso una quantità invariante

$$m^2 = s = \frac{1}{c^4} (E^2 - \vec{p}^2 c^2) = \frac{1}{c^4} \left[\left(\sum_{i=1}^n E_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i c\right)^2 \right] \quad (7.30)$$

che risulta sempre positiva o nulla

$$s = m^2 \geq 0 \quad (7.31)$$

Ricordando ora che il sistema del centro di massa (CM) è definito come quello in cui risulta nullo l'impulso totale del sistema, si ottiene in esso

$$s = m^2 = \frac{1}{c^4} \left(\sum_{i=1}^n E_i^*\right)^2 \quad (7.32)$$

dove le E_i^* rappresentano le energie nel (CM); la massa di un sistema di particelle non interagenti coincide quindi, a meno del fattore $1/c^2$, con l'energia del sistema stesso nel (CM).

Si consideri ora il sistema fisico costituito da due particelle non interagenti, per cui sono definite le variabili cinematiche in figura 7.5. L'espressione per s vale qui

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{c^4} \left[(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 c^2 \right] = \\ &= \frac{1}{c^4} \left[(m_1^2 + m_2^2) c^4 + 2E_1 E_2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 c^2 \right] \end{aligned} \quad (7.33)$$

⁵Sul concetto di invarianza della massa si veda: L.B. Okun, "The concept of mass" - Physics Today, June (1989) 31.

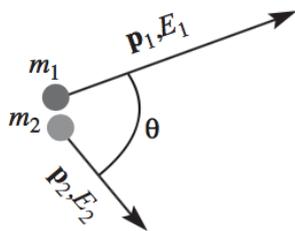


Figura 7.5: Sistema di due particelle non interagenti.

e ricordando che $\vec{\beta}_i = \vec{p}_i c / E_i$, si ha

$$s = \frac{1}{c^4} \left[(m_1 + m_2)^2 c^4 + 2E_1 E_2 (1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2) \right] \quad (7.34)$$

In questo caso e anche in generale, si ha quindi che la massa di un sistema non coincide con la somma delle masse dei costituenti, anche se questi non interagiscono fra loro.

Dalla 7.29 discende che le conservazioni di energia e impulso implicano che anche la massa di un sistema isolato sia conservata: in una reazione generica che si tratti di un urto o di un decadimento, la massa del sistema fisico iniziale coincide sempre con la massa del sistema fisico finale, e per la stessa ragione la somma delle masse dei corpi presenti nello stato iniziale è generalmente diversa dalla somma delle masse dei corpi presenti nello stato finale.

Si consideri ora un processo d'urto fra due particelle a e b nello stato iniziale

$$a + b \longrightarrow c + d + e + \dots \quad (7.35)$$

ricordando che stati eccitati di una particella vanno considerati come particelle diverse.

Tipicamente la durata dell'interazione, ovvero dell'urto, è così breve da poterla considerare come trascurabile e in tal caso l'urto è visto come "istantaneo", il che permette di assumere come "libere" sia le particelle dello stato iniziale che quelle dello stato finale.

Nel seguito si considereranno i due sistemi di riferimento del centro di massa (CM) e del laboratorio (SL) introdotti in precedenza, ricordando che il secondo coincide con quello in cui prima dell'urto, una delle due particelle o nuclei, detta *bersaglio*, è a riposo mentre l'altra, detta *proiettile*, si muove verso il bersaglio. Si indichi con a il proiettile e siano m_a , \vec{p}_a ed E_a rispettivamente la sua massa, il suo impulso e la sua energia; sia dunque b il bersaglio di massa m_b . L'espressione per s calcolata nel (SL) è

$$s = \frac{1}{c^4} \left[(E_a + m_b c^2)^2 - p_a^2 c^2 \right] = (m_a^2 + m_b^2) + \frac{2m_b E_a}{c^2} \quad (7.36)$$

Se dunque l'energia del proiettile è molto maggiore degli equivalenti energetici delle masse sia del proiettile stesso che del bersaglio, si può approssimare la 7.36 con

$$s \simeq \frac{2m_b E_a}{c^2}, \quad \text{per} \quad E_a \gg m_a c^2, m_b c^2 \quad (7.37)$$

Nelle figure 7.6 a) e b) sono illustrati gli stati iniziali del sistema fisico $a + b$ nel (SL) e rispettivamente nel (CM).

Nel caso in cui durante l'urto abbia luogo la produzione di particelle a

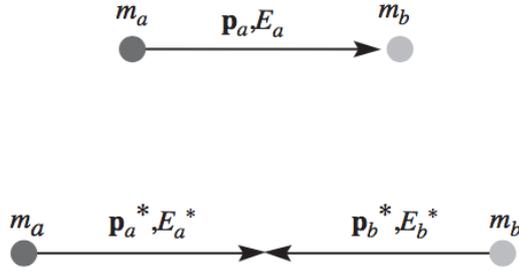


Figura 7.6: a) Sistema del Laboratorio (LS); b) sistema del centro di massa (CM).

spese di frazioni dell'energia disponibile nel canale d'ingresso, è importante conoscere o saper individuare le soglie oltre le quali ciò possa aver luogo. L'energia eventualmente a disposizione è l'energia totale nel (CM) che come si deduce da 7.37, cresce proporzionalmente alla radice quadrata dell'energia E_a dei proiettili nel (LS).

Se ci si pone nel (CM), in cui i due impulsi delle particelle incidenti sono uguali in modulo e opposti in verso, come mostrato in figura 7.6 b), e se le energie cinetiche sono tali che $E_a^* \gg m_a c^2$ ed $E_b^* \gg m_b c^2$, si trova che le energie sono espresse da valori che numericamente si discostano poco da quelli che esprimono i valori degli impulsi nelle stesse unità di misura a meno di c , ovvero si può scrivere: $E_a^* \approx |\vec{p}_a^*|$ ed $E_b^* \approx |\vec{p}_b^*|$; ciò implica però che in questi limiti sia anche $E_a^* \simeq E_b^* = E^*$ per cui si può porre

$$s = \left(\frac{E_a^* + E_b^*}{c^2} \right)^2 \approx \left(\frac{2E^*}{c^2} \right)^2 \quad (7.38)$$

essendo naturalmente $E^* \gg m_a c^2$ ed $E^* \gg m_b c^2$. L'energia totale a disposizione nel (CM) è quindi proporzionale all'energia cinetica delle particelle collidenti ed è anche tutta disponibile per la produzione di nuove particelle; nel (SL) invece solo una parte di tale energia è disponibile per la produzione di nuove particelle, dovendo conservarsi anche l'impulso totale. Si consideri ora un urto con due soli corpi nello stato finale

$$a + b \longrightarrow c + d \quad (7.39)$$

le cui variabili cinematiche per gli stati iniziale e finale sono mostrate in figura 7.7, sia per il sistema del laboratorio (LS) che per quello del centro di massa (CM).

Si osservi che nel (CM) i valori assoluti degli impulsi prima e dopo l'urto

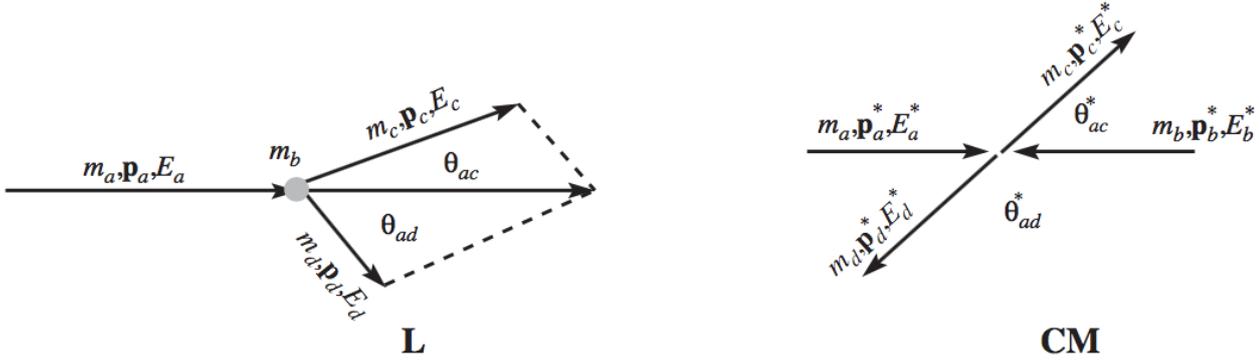


Figura 7.7: Variabili cinematiche nel caso di un urto $a + b \rightarrow c + d$, nel (LS) e nel (CM).

coincidono solo nel caso di urto perfettamente elastico.

Dato che s è un invariante deve coincidere in entrambi i sistemi di riferimento, e la sua conservazione implica inoltre che il suo valore prima dell'urto coincida col suo valore dopo l'urto. In qualunque sistema di riferimento ci si ponga si ha dunque

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{c^4} \left[(E_a + E_b)^2 - (\vec{p}_a + \vec{p}_b)^2 c^2 \right] = \\ &= \frac{1}{c^4} \left[(E_c + E_d)^2 - (\vec{p}_c + \vec{p}_d)^2 c^2 \right] \end{aligned} \quad (7.40)$$

il che è di estrema utilità nell'affrontare lo studio cinematico delle reazioni a due corpi.

Sempre nel caso di urti con due corpi sia nel canale d'ingresso che in quello d'uscita dalla reazione, si possono introdurre altre due utili e importanti variabili cinematiche, entrambi con le dimensioni del quadrato di una massa: una è il quadri-impulso trasferito dalla particella incidente a alla particella uscente c , indicato con t ; l'altra è il quadri-impulso trasferito dalla particella incidente a alla particella uscente d , indicato con u . Si ha dunque

$$t \equiv \frac{1}{c^4} \left[(E_c - E_a)^2 - (\vec{p}_c - \vec{p}_a)^2 c^2 \right] \quad (7.41)$$

da cui, tenendo conto della conservazione dell'energia e dell'impulso si ottiene,

$$t = \frac{1}{c^4} \left[(E_d - E_b)^2 - (\vec{p}_d - \vec{p}_b)^2 c^2 \right] \quad (7.42)$$

Similmente per u

$$\begin{aligned} u &\equiv \frac{1}{c^4} \left[(E_d - E_a)^2 - (\vec{p}_d - \vec{p}_a)^2 c^2 \right] \\ &= \frac{1}{c^4} \left[(E_c - E_b)^2 - (\vec{p}_c - \vec{p}_b)^2 c^2 \right] \end{aligned} \quad (7.43)$$

Le tre variabili s , t ed u ora introdotte sono dette *variabili di Mandelstam* e possono essere espresse in termini dei quadri-impulsi delle particelle coinvolte

$$\begin{aligned} s &\equiv \frac{1}{c^2} (p_a + p_b)^2 = \frac{1}{c^2} (p_c + p_d)^2 \\ t &\equiv \frac{1}{c^2} (p_a - p_c)^2 = \frac{1}{c^2} (p_b - p_d)^2 \\ u &\equiv \frac{1}{c^2} (p_a - p_d)^2 = \frac{1}{c^2} (p_b + p_c)^2 \end{aligned} \quad (7.44)$$

Esse non sono indipendenti, e si trova

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 \quad (7.45)$$

Inoltre vale

$$t \leq 0 \quad , \quad u \leq 0 \quad (7.46)$$

Nel caso in cui le velocità in gioco siano molto alte e si possano quindi trascurare in prima approssimazione i contributi delle masse ai quadri-impulsi, si ha

$$\begin{aligned} s &\equiv \frac{1}{c^2} (p_a + p_b)^2 \approx \frac{2p_a \cdot p_b}{c^2} \approx \frac{2p_c \cdot p_d}{c^2} \\ t &\equiv \frac{1}{c^2} (p_a - p_c)^2 \approx -\frac{2p_a \cdot p_c}{c^2} \approx -\frac{2p_b \cdot p_d}{c^2} \\ u &\equiv \frac{1}{c^2} (p_a - p_d)^2 \approx -\frac{2p_a \cdot p_d}{c^2} \approx -\frac{2p_b \cdot p_c}{c^2} \end{aligned} \quad (7.47)$$

Se contrariamente a quanto visto finora in questo paragrafo si considera un sistema di particelle fra loro interagenti, si constata immediatamente che la sua energia totale non coincide con la somma delle energie delle singole particelle ($E \neq \sum_{i=1}^n E_i$) in quanto il campo responsabile dell'interazione contiene esso stesso dell'energia. Similmente neppure l'impulso totale corrisponde alla somma degli impulsi di tutte le particelle ($\vec{P} \neq \sum_{i=1}^n \vec{p}$), dato che al campo è tipicamente associato anche dell'impulso.

Ciò può rendere complicati i calcoli; nel caso in cui il campo risulti indipendente dal moto della particella, come per la diffusione coulombiana, il problema può semplificarsi.

7.3 Cinematica per urti di particelle leggere su particelle massive

Nei prossimi paragrafi si tratteranno sezioni d'urto e si comincerà col caso di particelle leggere, elettroni o muoni, contro bersagli massivi, nucleoni o nuclei. Si richiama quindi la trattazione cinematica relativistica specifica che permette di descrivere queste tipologie di interazioni.

La componente zero del quadri-vettore spazio-tempo è proporzionale al tempo, e quella del quadri-impulso è proporzionale all'energia

$$\begin{aligned} x &= (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, \vec{x}) \\ p &= (p_0, p_1, p_2, p_3) = (E/c, \vec{p}) \end{aligned} \quad (7.48)$$

Il prodotto scalare Lorentz-invariante di due quadri-vettori a e b è definito come

$$a \cdot b = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (7.49)$$

Applicandolo al quadri-impulso si ha

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \quad (7.50)$$

Si noti che il quadrato del quadri-impulso coincide col quadrato della massa m a riposo moltiplicata per c^2 . Essendo un invariante deve avere lo stesso valore rispetto a qualsiasi sistema di riferimento inerziale e se si sceglie quello in cui la particella è a riposo, ne consegue $\vec{p} = 0$ ed $E = mc^2$, da cui

$$p^2 = m^2 c^2 \quad \text{ed} \quad m = \frac{\sqrt{p^2}}{c} \quad (7.51)$$

con m la *massa invariante*.

Dalle relazioni 7.50 e 7.51 si desume la relazione relativistica fra energia e impulso

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4 \quad (7.52)$$

e quindi

$$E \approx |\vec{p}| c \quad \text{se} \quad E \gg mc^2 \quad (7.53)$$

che nel caso di elettroni è soddisfatta già per energie di pochi MeV.

Si consideri come esempio la diffusione di un elettrone di massa m_e e quadri-impulso p da parte di una particella di massa M e quadri-impulso P , come schematizzato in figura 7.8. La conservazione di energia e impulso implica che la somma dei quadri-impulsi prima dell'urto deve uguagliare quella dopo l'urto

$$p + P = p' + P' \quad (7.54)$$

e quadrando

$$p^2 + 2pP + P^2 = p'^2 + 2p'P' + P'^2 \quad (7.55)$$

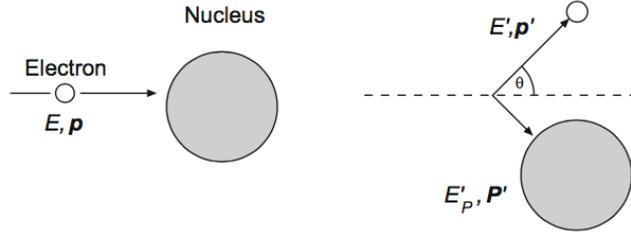


Figura 7.8: Interazione elastica fra un elettrone e un nucleo.

Nel caso di diffusione elastica le masse m_e ed M delle particelle collidenti restano invariate, e di conseguenza da

$$p^2 = p'^2 = m_e^2 c^2 \quad \text{e} \quad P^2 = P'^2 = M^2 c^2 \quad (7.56)$$

segue che

$$p \cdot P = p' \cdot P' \quad (7.57)$$

Tipicamente in questo tipo di interazioni si rivela soltanto l'elettrone diffuso e non la particella di rinculo. In tal caso si utilizza quindi la relazione

$$p \cdot P = p' \cdot (p + P - p') = p'p + p'P - m_e^2 c^2 \quad (7.58)$$

Ponendosi nel Sistema del Laboratorio (SL), in cui la particella di massa M e quadri-impulso P è a riposo prima dell'urto, si ha

$$\begin{aligned} p &= (E/c, \vec{p}) & p' &= (E'/c, \vec{p}') \\ P &= (Mc, \vec{0}) & P' &= (E'_P/c, \vec{P}') \end{aligned} \quad (7.59)$$

per cui, dalla 7.58 discende

$$E M c^2 = E' E - \vec{p} \cdot \vec{p}' c^2 + E' M c^2 - m_e^2 c^4 \quad (7.60)$$

Ad alte energie si può trascurare il termine $m_e^2 c^4$ e si ha anche, con buona approssimazione, $E \approx |\vec{p}| c$. Si ottiene in tal modo una relazione fra l'energia E' dell'elettrone diffuso, la sua energia E prima dell'urto e l'angolo ϑ di diffusione nel (SL)

$$E M c^2 \simeq E' E (1 - \cos\vartheta) + E' M c^2$$

ovvero

$$E' \simeq \frac{E}{1 + \frac{E}{M c^2} (1 - \cos\vartheta)} \quad (7.61)$$

L'energia di rinculo trasferita al bersaglio di massa M corrisponde alla differenza $E - E'$. Nel caso di diffusione elastica la relazione fra energia E' e

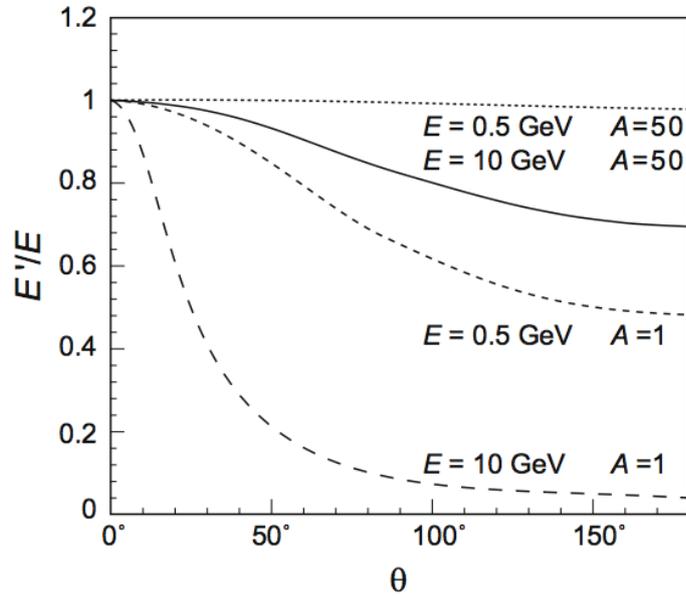


Figura 7.9: E'/E in funzione di ϑ per diffusione elastica di elettroni su nuclei con $A = 1$ e $A = 50$.

angolo ϑ di diffusione è quindi biunivoca, mentre ciò non vale nel caso di diffusione anelastica.

Dalla 7.61 si deduce che l'energia di rinculo del bersaglio cresce al crescere del rapporto fra la cosiddetta massa relativistica E/c^2 dell'elettrone e la massa M del bersaglio, in accordo con quanto si ottiene dall'approccio classico alla diffusione.

In figura 7.9 è riportato l'andamento di E'/E rispetto all'angolo ϑ di diffusione, per elettroni di energia relativamente bassa (0.5 GeV) e relativamente alta (10 GeV), incidenti su nuclei con $A = 1$ e $A = 50$. Per $E = 0.5$ GeV, nel caso di urto su nuclei con $A = 50$, si ha $(E - E')/E \simeq 0.02$.

Appendice D

Richiami di Relatività ristretta

Qui di seguito sono richiamati in forma riassuntiva alcuni concetti fondamentali della relatività ristretta necessari alla trattazione di gran parte dei fenomeni che coinvolgono nuclei e particelle.

Si ricordano i postulati fondanti, ovvero che le leggi della fisica sono indipendenti dall'osservatore purchè questo sia solidale con un qualsiasi sistema di riferimento inerziale, e inoltre la velocità c della luce nel vuoto è la massima velocità raggiungibile in natura, è indipendente dal sistema di riferimento inerziale e costituisce una costante universale.

Scelti allora due sistemi di riferimento inerziali S ed S' , cartesiani ortogonali, con le origini O ed O' coincidenti all'istante $t = t' = 0$ ed S' in moto con velocità $v = v_z = \beta c$ rispetto ad S , la relazione fra le coordinate di un qualsiasi evento descritto rispetto a un sistema di riferimento o rispetto all'altro, è data dalle trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta z) \\ x' = x \\ y' = y \\ z' = \gamma(z - \beta ct) \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

con $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Le trasformazioni inverse sono:

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta z') \\ x = x' \\ y = y' \\ z = \gamma(z' + \beta ct') \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

Le componenti *covarianti* di un quadrivettore x sono indicate da apici in caratteri greci μ, ν , ecc., per cui: x^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, e quindi: $x \equiv$

$$(x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z) \equiv (x^0, \vec{x}).$$

Le componenti *controvarianti* di un quadrivettore x sono invece indicate da pedici in caratteri greci, per cui: x_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, e quindi: $x \equiv (x_0 = x^0, x_1 = -x, x_2 = -y, x_3 = -z) \equiv (x_0, -\vec{x})$.

Il prodotto scalare di due quadrivettori x ed y è dato, con la solita regola di Einstein di somma sugli indici ripetuti, da

$$x \cdot y = x^\mu y_\mu = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 \quad (\text{D.3})$$

ed è una quantità invariante per le trasformazioni di Lorentz, che equivalgono alla composizione di una *rotazione* e di una *traslazione*; similmente nello spazio tridimensionale il prodotto scalare di due qualsiasi vettori è invariante per rotazioni.

Il segno "−" nel prodotto scalare implica che lo spazio quadrivettoriale non è Euclideo.

Quanto visto ora si può anche esprimere introducendo il tensore metrico $g^{\mu\nu}$ caratterizzato dall'aver i termini diagonali pari a $(1, -1, -1, -1)$ e uguali a 0 tutti i termini fuori dalla diagonale. I termini controvarianti del tensore metrico coincidono con quelli covarianti, cioè $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ e si ha

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad \text{e} \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad (\text{D.4})$$

Grazie al tensore metrico il prodotto scalare si può scrivere come

$$x \cdot y = g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \quad (\text{D.5})$$

Il prodotto scalare di un quadrivettore per se stesso, $x^\mu x_\mu = x^2$ è anche una quantità Lorentz-invariante.

Nel caso sia $x^2 = x^\mu x_\mu > 0$ il quadrivettore è detto di tipo *tempo*, se invece $x^2 = x^\mu x_\mu = 0$ esso è detto di tipo *luce*, se infine $x^2 = x^\mu x_\mu < 0$ esso è detto di tipo *spazio*.

La trasformazione di Lorentz fra due sistemi di riferimento inerziali si può anche scrivere come

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu \quad (\text{D.6})$$

e l'invarianza del prodotto scalare fra due quadrivettori implica

$$a^\mu_\nu a^\lambda_\mu = \delta^\lambda_\nu \quad (\text{D.7})$$

con δ^λ_ν il simbolo di Kronecker.

Anche il vettore impulso \vec{p} e l'energia totale E di una particella definiscono un quadrivettore p , comunemente detto *quadrivettore energia-impulso* o *quadri-impulso*

$$p = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) = (p^0, p^1, p^2, p^3) \quad (\text{D.8})$$

Le trasformazioni di Lorentz correlano anche le singole componenti del quadrivettore energia-impulso di una particella fra due diversi sistemi inerziali S ed S' :

$$\begin{cases} \frac{E'}{c} = \gamma \left(\frac{E}{c} - \beta p_z \right) \\ p'_x = p_x \\ p'_y = p_y \\ p'_z = \gamma \left(p_z - \beta \frac{E}{c} \right) \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

Similmente a quanto visto per le coordinate, presi due quadrivettori energia-impulso, $p = (p^0, \vec{p})$ e $q = (q^0, \vec{q})$, di due diversi sistemi fisici, o particelle, il prodotto scalare dei due, $p \cdot q = (p^0 q^0 - \vec{p} \cdot \vec{q})$ è Lorentz-invariante, ed è quindi una costante del moto. Nel caso particolare del prodotto scalare di un quadrivettore energia-impulso per se stesso si ha

$$p \cdot p = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = \text{cost.} \quad (\text{D.10})$$

che data l'indipendenza dal particolare sistema di riferimento inerziale, può essere considerato nel sistema a riposo con la particella, da cui $\vec{p} = 0$, e correlato con l'energia a riposo $E_0 = mc^2$ della particella

$$p \cdot p = \frac{E_0^2}{c^2} = m^2 c^2 \quad (\text{D.11})$$

con m la massa della particella.

L'impulso e l'energia totale di una particella di massa m , in moto con velocità \vec{v} rispetto a un osservatore inerziale sono dati da

$$\begin{cases} \vec{p} = m\gamma\vec{v} = m\gamma\vec{\beta}c \\ E = m\gamma c^2 \end{cases} \quad (\text{D.12})$$

e ne consegue

$$\vec{\beta} = \frac{c\vec{p}}{E} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{E}{mc^2} \quad (\text{D.13})$$

La più generale relazione fra impulso \vec{p} , energia E e velocità $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ può quindi essere scritta in una forma valida sia per corpi dotati di massa che per corpi di massa nulla, come ad esempio il fotone

$$\vec{p} = \frac{E}{c} \vec{\beta} = \frac{E}{c^2} \vec{v} \quad (\text{D.14})$$

Si può anche definire l'energia cinetica E_k di una particella rispetto a un osservatore inerziale, come differenza fra la sua energia E rispetto a tale osservatore e la sua energia a riposo E_0 , indipendente dal particolare sistema di riferimento inerziale

$$E = m\gamma c^2 = E_0 + E_k = mc^2 + E_k \quad (\text{D.15})$$

da cui, ricordando che $E = \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}$,

$$E_k = E - mc^2 = mc^2 (\gamma - 1) = \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 \quad (\text{D.16})$$

e ancora

$$c |\vec{p}| = \sqrt{E_k^2 + 2mc^2 E_k} \quad (\text{D.17})$$

Considerando ora:

$$\frac{dE}{dp} = \frac{1}{2\sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}} 2pc^2 = \frac{c^2}{E} p = \frac{c^2}{m\gamma c^2} p \quad (\text{D.18})$$

si ottiene:

$$dE = \frac{p}{m\gamma} dp \implies dE = v dp \quad (\text{D.19})$$

La somma e la differenza fra quadrivettori sono ancora dei quadrivettori, ne consegue che moltiplicando scalarmente per se stesse, o elevando a quadrato, somme o differenze di quadrivettori, si ottengono delle quantità Lorentz-invarianti. Se ad esempio si considerano quattro quadrivettori $q_i = (q_i^0, q_i^1, q_i^2, q_i^3)$ e se ne definisce la somma $q = \sum_i q_i$, anche $q \cdot q = q^2$ è una quantità Lorentz-invariante

$$q^2 = \left(\sum_i q_i^0 \right)^2 - \left(\sum_i q_i^1 \right)^2 - \left(\sum_i q_i^2 \right)^2 - \left(\sum_i q_i^3 \right)^2 \quad (\text{D.20})$$

Se q_i è il vettore energia-impulso di un gruppo di particelle, allora $q \cdot q = q^2$ è connesso al quadrato dell'energia a riposo del sistema fisico costituito da quel gruppo di particelle.

D.1 Coordinate parallele e trasverse

Trattando di decadimenti o di interazioni fra particelle o fra particelle e nuclei, spesso ci si trova nella condizione in cui il sistema fisico e la struttura sperimentale sono meglio descritti se ci si riferisce a una geometria spaziale con simmetria cilindrica, in cui l'asse z di simmetria è parallelo alle velocità delle particelle incidenti o nel caso di decadimenti, è parallelo alla velocità della particella che decadrà, se questa è inizialmente in moto nel sistema di riferimento scelto.

È quindi utile riesprimere le trasformazioni di Lorentz e altri risultati già individuati in funzione di componenti parallele "||" e ortogonali, o trasverse, "⊥" alla direzione della velocità relativa \vec{v} fra due sistemi di riferimento inerziali. La D.6 diventa allora, se le origini dei due sistemi coincidono per

$$t = t' = 0$$

$$\begin{cases} x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x_{\parallel}) \\ x'_{\parallel} = \gamma(x_{\parallel} - \beta x^0) \\ \vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp} \end{cases} \quad (\text{D.21})$$

dove $\beta = |\vec{v}|/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, x_{\parallel} è la componente di x nella direzione di \vec{v} , per cui $\vec{x}_{\parallel} = (\vec{x} \cdot \vec{v}) \vec{v}/v^2$, e $\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel}$.

In questo caso la trasformazione di Lorentz è definita da tre soli parametri, ovvero le tre componenti di \vec{v} . Se i due sistemi di riferimento fossero anche ruotati uno rispetto all'altro si sarebbe nel caso più generale in cui la trasformazione dipende da sei parametri tre dei quali sarebbero gli angoli di Eulero.

Come già visto precedentemente la trasformazione di Lorentz inversa dal sistema accentato a quello non accentato si ottiene sostituendo nelle D.21 i termini accentati con i non-accantati e cambiando il segno della velocità

$$\begin{cases} x^0 = \gamma(x^{0'} + \beta x_{\parallel}') \\ x_{\parallel} = \gamma(x'_{\parallel} + \beta x^0) \\ \vec{x}_{\perp} = \vec{x}'_{\perp} \end{cases} \quad (\text{D.22})$$

Similmente si ha, per il quadrivettore energia-impulso

$$\begin{cases} \frac{E'}{c} \equiv p^{0'} = \gamma(p^0 - \beta p_{\parallel}) \\ p'_{\parallel} = \gamma(p_{\parallel} - \beta p^0) \\ \vec{p}'_{\perp} = \vec{p}_{\perp} \end{cases} \quad (\text{D.23})$$

Si introducono ora due variabili molto utili per l'analisi dei fenomeni dinamici relativistici. La prima è la *rapidità*, definita come

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \ln \frac{E + cp_{\parallel}}{E - cp_{\parallel}} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + cp_{\parallel}/E}{1 - cp_{\parallel}/E} = \operatorname{arctanh} \left(\frac{cp_{\parallel}}{E} \right) = \operatorname{arctanh}(\beta_L) \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

e che risulta più appropriata della componente *longitudinale*¹ ($\beta_L = cp_{\parallel}/E$) della velocità, in quanto ha il vantaggio di essere additiva per variazioni longitudinali della velocità. Una particella con rapidità y in un definito sistema inerziale presenta cioè una rapidità pari ad $y + dy$ in un sistema di riferimento che si muove con rapidità dy nella direzione $-z$, rispetto al sistema di riferimento originale, come si può dedurre dalla formula relativistica di addizione delle velocità.

¹Dalla D.13 si ha: $\vec{\beta} = \vec{\beta}_L + \vec{\beta}_{\perp}$.

Nella fisica sperimentale delle particelle e degli ioni a energie relativistiche si utilizza comunemente un'altra grandezza, legata alla rapidità e detta *pseudorapidità*, indicata con η e definita come

$$\eta = -\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right) \quad (\text{D.25})$$

dove ϑ è l'angolo compreso fra il tri-impulso \vec{p} della particella e la direzione positiva dell'asse del fascio incidente. Solitamente la distribuzione dei prodotti di reazione in funzione dell'angolo polare varia molto e bruscamente in prossimità dei piccoli angoli in avanti e dei grandi angoli all'indietro, riferendosi alla pseudorapidità anzichè all'angolo polare si hanno andamenti più dolci.

La pseudorapidità può essere espressa in funzione del tri-impulso ottenendo

$$\eta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|\vec{p}| + p_{\parallel}}{|\vec{p}| - p_{\parallel}}\right) = \operatorname{arctgh}\left(\frac{p_{\parallel}}{|\vec{p}|}\right) \quad (\text{D.26})$$

Si osservi che la pseudorapidità η si ottiene dalla rapidità y al limite quando la particella considerata ha un'energia a riposo mc^2 trascurabile rispetto al proprio quadri-impulso p , per cui $E \simeq p$. Si noti che comunque la pseudorapidità dipende esclusivamente dall'angolo polare e non dall'energia della particella. La rapidità permette anche di costruire la variabile Lorentz-invariante

$$\Delta R = \sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta\varphi)^2} \quad (\text{D.27})$$

che rappresenta la separazione angolare fra gli impulsi di due particelle, con φ l'angolo azimutale.

D.2 Legge relativistica del moto di una particella

La legge relativistica del moto di una particella di massa m si ottiene dalla seconda legge di Newton, ricordando che $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} + m\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} \quad (\text{D.28})$$

Sviluppando la derivata si ha

$$m\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} = m\frac{d\left[(1-\beta^2)^{-1/2}\right]}{dt}\vec{v} = \frac{m}{2}\frac{\left(2\frac{v}{c^2}a_t\right)}{(1-\beta^2)^{3/2}}\vec{v} = m\gamma^3(\vec{a}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}$$

da cui

$$\vec{F} = m\gamma\vec{a} + m\gamma^3(\vec{a}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta} \quad (\text{D.29})$$

La forza agente risulta quindi la somma di due termini, uno parallelo all'accelerazione e uno parallelo alla velocità. Non si può dunque definire alcuna

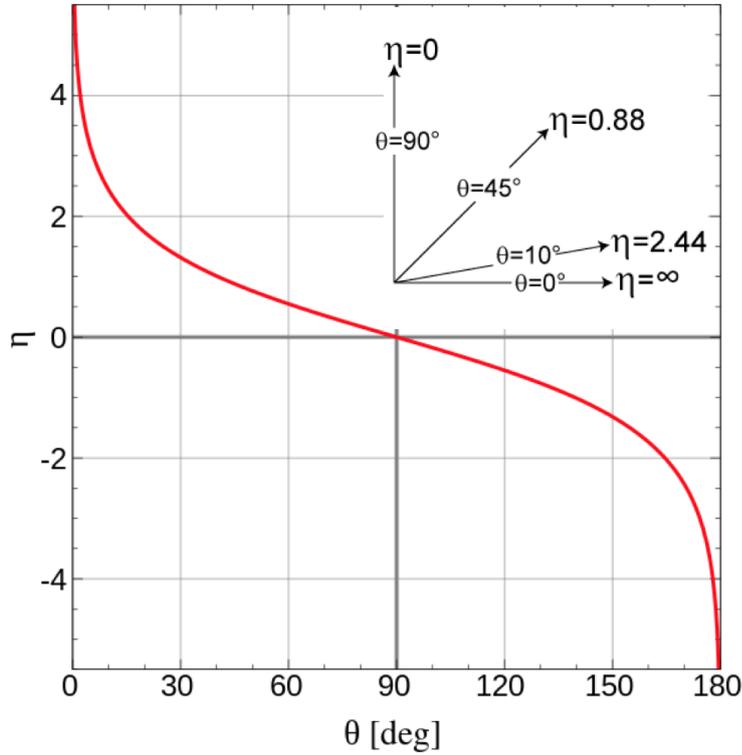


Figura D.1: Pseudorapidità η in funzione dell'angolo polare ϑ .

”massa” come il rapporto tra forza e accelerazione, e ne consegue che ad alte velocità la massa non rappresenta l'inerzia rispetto al moto. Moltiplicando scalarmente entrambi i membri della D.29 per $\vec{\beta}$ si ottiene

$$\vec{F} \cdot \vec{\beta} = m\gamma \vec{a} \cdot \vec{\beta} + m\gamma^2 \beta^2 \vec{a} \cdot \vec{\beta} = m\gamma (1 + \gamma^2 \beta^2) \vec{a} \cdot \vec{\beta} = m\gamma^3 \vec{a} \cdot \vec{\beta}$$

da cui

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{\beta}}{m\gamma^3} \quad (\text{D.30})$$

che sostituita in D.29 dà

$$\vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{\beta}) \vec{\beta} = m\gamma \vec{a} \quad (\text{D.31})$$

L'accelerazione è quindi anch'essa la somma di due termini, uno parallelo alla forza e uno parallelo alla velocità.

Forza e accelerazione risultano parallele ed equiverse in due soli casi, ovvero quando forza e velocità sono parallele, per cui $\vec{F} = m\gamma^3 \vec{a}$, o quando forza e velocità sono ortogonali, per cui $\vec{F} = m\gamma \vec{a}$. Le costanti di proporzionalità sono diverse nei due casi.

Appendice E

Diffusione Compton

L'esperimento originale di Compton¹ è consistito nell'inviare un fascio collimato di raggi X con lunghezza d'onda $\lambda = 0.0709 \times 10^{-9}$ m su un bersaglio di grafite e osservare quindi lo spettro dei fotoni diffusi misurandone la lunghezza d'onda λ' , che risulta superiore a λ . Alla radiazione diffusa per effetto Compton è generalmente mescolata anche radiazione diffusa senza cambiamento di lunghezza d'onda, e lo spettro ottenuto mostra due righe vicine, una associata ai raggi X diffusi senza effetto Compton, relativa alla lunghezza d'onda corrispondente a quella λ dei raggi X incidenti, e l'altra spostata verso lunghezze d'onda maggiori.

Per descrivere il fenomeno, procedendo come Compton, si consideri l'urto di un fotone γ di lunghezza d'onda λ , con un elettrone e di un atomo. Considerando l'elettrone urtato inizialmente a riposo, si supponga che come risultato dell'urto esso venga emesso dall'atomo con un certo impulso $\vec{p}_{e'}$ assieme ad un nuovo fotone γ' , di lunghezza d'onda $\lambda' > \lambda$, emesso all'angolo ϑ rispetto alla direzione di provenienza del fotone incidente. Data la presenza di foto-

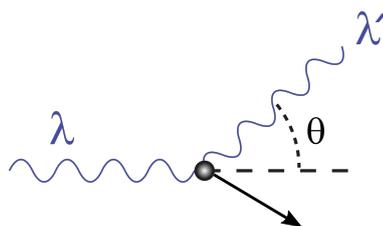


Figura E.1: Scattering Compton.

ni e le alte energie cinetiche raggiungibili dagli elettroni emessi, si tratta il problema secondo il corretto approccio relativistico.

Applicando al processo ipotizzato le conservazioni dell'energia e dell'impulso

¹A.H. Compton, "A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements" - Phys. Rev. 21 (1923) 483-502

si ha, indicando con un apice le grandezze riferite ai valori successivi all'urto

$$E_\gamma + E_e = E_{\gamma'} + E_{e'} \quad (\text{E.1})$$

$$\vec{p}_\gamma = \vec{p}_{\gamma'} + \vec{p}_{e'} \quad (\text{E.2})$$

avendo supposto a riposo l'elettrone atomico al momento dell'urto.

Dette rispettivamente ν e ν' le frequenze associate ai fotoni γ e γ' si ha

$$\begin{aligned} E_\gamma &= h\nu & E_{\gamma'} &= h\nu' \\ p_\gamma &= \frac{h\nu}{c} & p_{\gamma'} &= \frac{h\nu'}{c} \end{aligned}$$

Detta m_e la massa dell'elettrone si ha poi

$$E_e = m_e c^2 \quad E_{e'} = \sqrt{(p_{e'} c)^2 + (m_e c^2)^2}$$

Sostituendo nell'espressione E.1 per la conservazione dell'energia si ha

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + \sqrt{(p_{e'} c)^2 + (m_e c^2)^2} \quad (\text{E.3})$$

dalla quale si ottiene, per l'impulso dell'elettrone diffuso

$$p_{e'} = \frac{1}{c} \sqrt{(h\nu - h\nu' + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4} \quad (\text{E.4})$$

Si osservi che vale

$$p_{e'} > \frac{h\nu - h\nu'}{c}$$

ovvero il modulo dell'impulso guadagnato dall'elettrone diffuso è maggiore di quello perso dal fotone.

Dalla E.2 si ottiene, per l'impulso dell'elettrone diffuso

$$\vec{p}_{e'} = \vec{p}_\gamma - \vec{p}_{\gamma'} \quad (\text{E.5})$$

Moltiplicando poi scalarmente per se stessi i termini a destra e a sinistra dell'uguale

$$\vec{p}_{e'} \cdot \vec{p}_{e'} = p_{e'}^2 = (\vec{p}_\gamma - \vec{p}_{\gamma'}) \cdot (\vec{p}_\gamma - \vec{p}_{\gamma'}) = p_\gamma^2 + p_{\gamma'}^2 - 2p_\gamma p_{\gamma'} \cos\vartheta$$

Sostituendo poi quanto su riportato per p_γ e per $p_{\gamma'}$ e moltiplicando ogni termine per c^2 si ha

$$p_{e'}^2 c^2 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2 \nu \nu' \cos\vartheta \quad (\text{E.6})$$

Combinando ora le E.2 e E.6 si ottiene

$$\left(h\nu - h\nu' + m_e c^2 \right)^2 - m_e^2 c^4 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2 \nu \nu' \cos\vartheta$$

da cui

$$2h\nu m_e c^2 - 2h\nu' m_e c^2 = 2h^2\nu\nu' (1 - \cos\vartheta)$$

che diviso per $(2h\nu\nu' m_e c)$ diventa

$$\frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\vartheta)$$

ovvero quanto cercato

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\vartheta) \quad (\text{E.7})$$

osservando che $h/m_e c$ ha le dimensioni di una lunghezza e viene detta *lunghezza d'onda Compton* λ_C dell'elettrone.

Si ricordi che la deduzione della E.7 ha richiesto l'approssimazione di considerare l'elettrone atomico urtato come "libero", prescindendo dalla sua effettiva energia di legame, ciò può essere però ritenuto plausibile solo se si tratta di un elettrone delle shell più esterne dell'atomo in questione. Se il fotone urta invece uno degli elettroni più interni, molto più fortemente legati all'atomo, allora esso comunica efficacemente l'impulso non solo all'elettrone urtato, ma all'intero atomo. Sostituendo di conseguenza nella E.7 la massa m_e con quella dell'intero atomo si ha che la differenza $(\lambda' - \lambda)$ diventa irrisoria, rendendo di fatto non apprezzabile l'effetto, e ciò spiega la presenza nello spettro della riga a frequenza maggiore, a fianco di quella dovuta all'effetto Compton.

Appendice F

Stato finale in tre corpi

Si consideri un'interazione che dia luogo a uno stato finale in tre corpi, di masse m_2 , m_3 ed m_4 , come una reazione o un decadimento $1 \rightarrow 2 + 3 + 4$, quale ad esempio

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad \text{oppure,} \quad K^+ \rightarrow \pi^- + \pi^+ + \pi^+ \quad (\text{F.1})$$

Contrariamente al caso dello stato finale in due corpi, per il quale nel sistema del CM i prodotti hanno un'energia fissata, per uno stato finale in tre corpi questi presentano uno spettro di energie nel CM.

Pensando ad esempio a un decadimento, siano $m_1 c^2$ l'energia della particella madre a riposo nel CM, \vec{p}_i gli impulsi ed E_i le energie, con $i = 2, 3, 4$, delle tre particelle dello stato finale.

Fra queste variabili vi sono dei vincoli derivanti dal rispetto dei principi di conservazione e l'assegnazione delle masse implica che le energie siano determinate dagli impulsi. Le nove componenti degli impulsi devono soddisfare tre condizioni per la conservazione dell'impulso totale, $\sum_{i=2}^4 \vec{p}_i = 0$, e una per la conservazione dell'energia totale, $\sum_{i=2}^4 E_i = m_1 c^2$; restano quindi cinque variabili indipendenti.

La condizione di conservazione dell'impulso implica anche che i tre vettori \vec{p}_1 , \vec{p}_2 e \vec{p}_3 siano coplanari. Detto \vec{n} il versore ortogonale al piano che contiene i tre impulsi, si possono ad esempio scegliere come variabili indipendenti i due angoli che definiscono la direzione di \vec{n} . Il triangolo definito dai tre impulsi può ancora ruotare rigidamente nel piano appena definito e si può quindi scegliere l'angolo che ne definisce l'orientazione come una terza variabile indipendente.

Le restanti due variabili definiscono allora forma e dimensione del triangolo costituito dai tre impulsi.

Se non si è interessati all'eventuale polarizzazione dello stato iniziale, la dipendenza dai tre angoli dell'elemento di matrice che descrive la transizione è irrilevante per cui si può descrivere lo stato finale con le sole due ultime variabili indipendenti individuate. Ci sono a questo punto alcune scelte possibili equivalenti.

Un modo per definire utilmente il set di variabili è di partire dalla conservazione del quadri-impulso nel sistema del CM

$$p_1 = p_2 + p_3 + p_4 \quad (\text{F.2})$$

da cui, riordinando e quadrando

$$p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 \cdot p_2 = p_3^2 + p_4^2 + 2p_3 \cdot p_4 \quad (\text{F.3})$$

Il quadri-impulso della particella 1 nel CM è $p_1 = (m_1 c, 0, 0, 0)$, per cui $p_1 \cdot p_2 = m_1 E_2$ e quindi, con le condizioni di *mass shell*, si ha per la F.3

$$\left(m_1^2 + m_2^2\right) c^2 - 2m_1 E_2 = \left(m_3^2 + m_4^2\right) c^2 + 2 \frac{E_3 E_4}{c^2} - 2|\vec{p}_3||\vec{p}_4| \cos\vartheta \quad (\text{F.4})$$

Ricordando che per $i = 3, 4$ si ha $|\vec{p}_i| = \sqrt{(E_i/c)^2 - m_i^2 c^2}$, e risolvendo per E_2 , si ha

$$E_2 = \frac{1}{2m_1} \left[\left(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2\right) c^2 - 2E_3 E_4 / c^2 + \right. \\ \left. + 2\sqrt{(E_3/c)^2 - m_3^2 c^2} \sqrt{(E_4/c)^2 - m_4^2 c^2} \cos\vartheta \right] \quad (\text{F.5})$$

relazione che lega le energie delle particelle prodotte con l'angolo fra le direzioni di due di esse. Essendo $-1 \leq \cos\vartheta \leq +1$ ne deriva che E_2 è anche compreso fra un valore massimo e uno minimo, dati da

$$E_{2,max/min} = \frac{\left(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2\right) c^2 - 2E_3 E_4 / c^2 \pm \sqrt{(E_3/c)^2 - m_3^2 c^2} \sqrt{(E_4/c)^2 - m_4^2 c^2}}{2m_1} \quad (\text{F.6})$$

Per l'analisi cinematica dei decadimenti in tre corpi si introducono delle quantità invarianti simili alle variabili di Mandelstam e definite come

$$s_1 = p_1^2 \quad s_{23} = (p_2 + p_3)^2 \\ s_{34} = (p_3 + p_4)^2 \quad s_{24} = (p_2 + p_4)^2 \quad (\text{F.7})$$

A meno di c^2 il primo invariante s_1 coincide con il quadrato della massa della particella iniziale mentre gli altri sono i quadrati delle masse invarianti delle particelle finali prese a coppie. Si può verificare che vale

$$s_{23} + s_{34} + s_{24} = s_1 + \left(m_2^2 + m_3^2 + m_4^2\right) c^4 \quad (\text{F.8})$$

La regione fisica del processo di decadimento in tre corpi nel piano (s_{23}, s_{34}) è detta *diagramma di Dalitz* e l'analisi della distribuzione degli eventi di decadimento in tale diagramma permette di studiare le interazioni tra le particelle finali e l'eventuale produzione di risonanze.

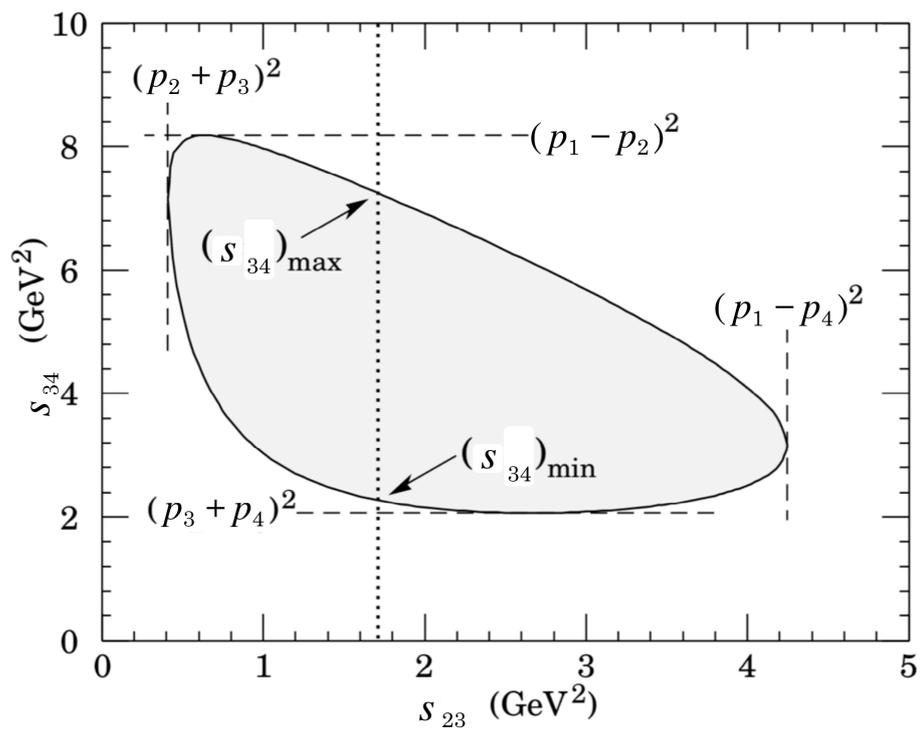


Figura F.1: Diagramma di Dalitz per lo stato finale in tre corpi relativo al caso $\pi^+ \bar{K}^0 p$ a 3 GeV. Per la conservazione del quadri-impulso i punti rappresentativi degli eventi risultano confinati entro la zona grigia.