## 27.3 Esercizi Capitolo 4

### 27.3.1 Esercizio 4 _ 1: Spin del protone

Si immagini che lo spin di un protone sia rappresentabile come interamente dovuto al moto "orbitale" di un pione positivo $\pi^+$ che si muove a velocità $c$ su un'orbita circolare di raggio $r = 10^{-13}$ cm attorno ad un "centro di rotazione" elettricamente neutro. Si calcoli il momento magnetico associato a tale moto e lo si confronti col valore noto misurato del momento magnetico del protone.

**Soluzione:**

Siano:

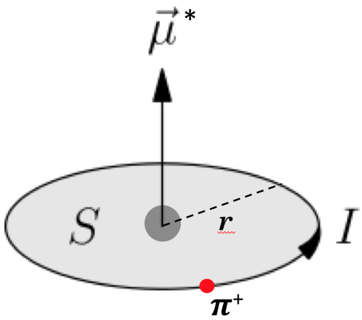
$\mu_p \;=\; 2.793 \times \mu_N \qquad \text{con} \qquad \mu_N \;=\; \dfrac{e\hbar}{2m_p} \simeq\; 5.051 \times 10^{-27}\ \mathrm{J \cdot T^{-1}}$

$q_\pi \;=_p \simeq\; +1.621 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} \qquad c \;=\; 2.998 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}$

Il modulo del momento magnetico $\mu^*$ associato alla configurazione "orbitale" descritta è dato dal prodotto fra l'Intensità $I$ di corrente dovuta al moto orbitale del $\pi^+$ e l'area $S$ racchiusa dalla sua orbita

$$\mu^* \;=\; IS \tag{27.2}$$

con




$S \;=\; \pi r^2 \simeq 3.1416 \times 10^{-26}\ \mathrm{cm}^2 \;=\; 3.1416 \times 10^{-30}\ \mathrm{m}^2$

$I \;=\; q_\pi \nu \;\; \text{essendo} \;\; \nu \;= c/(2\pi r) \;\simeq\; 0.4771 \times 10^{23}\ \ \mathrm{s}^{-1}$

Si ha dunque, per il modulo del momento magnetico calcolato secondo il modellino ipotizzato

$$\begin{aligned} \mu^* \;&=\; IS \;\simeq\; 1.621 \times 10^{-19} \times 0.4771 \times 10^{23} \times 3.1416 \times 10^{-30} \;\simeq \\ &\simeq\; 2.43 \times 10^{-26}\ \mathrm{J \cdot T^{-1}} \end{aligned} \tag{27.3}$$

Confrontandolo col valore noto misurato si ha

$$\frac{\mu_p}{\mu^*} \;\simeq\; \frac{2.793 \times 5.051 \times 10^{-27}}{2.43 \times 10^{-26}} \;\simeq\; 0.58 \tag{27.4}$$

Si ha quindi che questo semplice modellino sovrastima del 60% circa il valore effettivamente misurato.

## 27.4 Esercizi Capitolo 5

### 27.4.1 Esercizio 5 _ 1: Decadimento $\alpha$ del $^{240}$Pu

Il $^{240}$Pu decade $\alpha$ secondo lo schema

$$^{240}\mathrm{Pu} \;\rightarrow\; {}^{236}\mathrm{U} + \alpha$$

e le particelle $\alpha$ emesse mostrano uno spettro con due picchi principali associati alle energie cinetiche

$$E^{(1)}_{k,\alpha} \simeq 5.1681 \text{ MeV} \qquad\qquad \mathrm{E}^{(2)}_{k,\alpha} \simeq 5.1236 \text{ MeV}$$

Cosa si può dire in merito alle modalità di decadimento $\alpha$ del $^{240}$Pu, dei realativi $Q-$valori e delle energie cinetiche di rinculo dei nuclei figli, sapendo che le masse degli stati fondamentali dei nuclei coinvolti, espresse un u.m.a., sono rispettivamente

$$\begin{aligned} M\left({}^{240}\mathrm{Pu}\right) &= 240.053814 \text{ u} \\ M\left({}^{236}\mathrm{U}\right) &= 236.045568 \text{ u} \\ M\left({}^{4}\mathrm{He}\right) &= 4.002602 \text{ u} \end{aligned}$$

**Soluzione:**

Il fatto che il nuclide genitore mostri uno spettro di decadimento $\alpha$ con più di un picco, suggerisce che il decadimento associato al picco di minor energia cinetica comporti che il nucleo figlio si trova in uno stato eccitato che successivamente decadrà emettendo radiazione elettromagnetica.
Poichè la differenza tra $E^{(1)}_{k,\alpha}$ ed $E^{(2)}_{k,\alpha}$ è inferiore all'1% dei loro rispettivi valori, si desume che di questo stesso ordine di grandezza deva essere l'energia associata alla radiazione elettromagnetica di diseccitazione emessa dal nucleo figlio per diseccitarsi nel caso del decadimento $\alpha$ meno energetico.
Sapendo che 1 u $\simeq 931.5\text{MeV}/c^2$, si desume quindi che la massa del nucleo figlio eccitato sia superiore a quella del nucleo figlio nello stato fondamentale del $2 \times 10^{-7}$ circa.
Ricordando quanto detto nel paragrafo 5.2, dalla seconda delle 5.12 si ottiene, per l'energia cinetica di rinculo del nucleo figlio relativamente al decadimento $\alpha$ più energetico

$$E_{k,{}^{236}\mathrm{U}} \;=\; \frac{M\left({}^{4}\mathrm{He}\right)}{M\left({}^{236}\mathrm{U}\right)}\, E^{(1)}_{k,\alpha} \;=\; 0.0876(5) \text{ MeV}$$

e per quella del nucleo figlio relativamente al decadimento $\alpha$ meno energetico

$$E_{k,{}^{236}\mathrm{U}^*} \;=\; \frac{M\left({}^{4}\mathrm{He}\right)}{M\left({}^{236}\mathrm{U}^*\right)}\, E^{(2)}_{k,\alpha} \;\approx\; \frac{M\left({}^{4}\mathrm{He}\right)}{M\left({}^{236}\mathrm{U}\right)}\, E^{(2)}_{k,\alpha} \;=\; 0.0868(9) \text{ MeV}$$

Per quanto concerne i $Q-$valori, dalla prima delle 5.12 si ha

$$\begin{aligned} Q_\alpha^{(1)} &= \frac{M_\alpha + M_{^{236}\mathrm{U}}}{M_{^{236}\mathrm{U}}} \; E_{k,}^{(1)} \;=\; 5.2557 \text{ MeV} \\ Q_\alpha^{(2)} &\approx \frac{M_\alpha + M_{^{236}\mathrm{U}}}{M_{^{236}\mathrm{U}}} \; E_{k,}^{(2)} \;=\; 5.2104 \text{ MeV} \end{aligned}$$

E l'energia della radiazione di diseccitazione emessa dal nucleo figlio è

$$E_\gamma \;\approx\; \left(Q_\alpha^{(1)} - Q_\alpha^{(2)}\right) \text{ MeV} \;=\; 0.0453 \text{ MeV}$$

coerentemente con quanto trovato sperimentalmente.

## 27.5 Esercizi Capitolo 6

### 27.5.1 Esercizio 6 _ 1: Convertitore termoelettrico a plutonio

Il $^{238}$Pu decade $\alpha$, con un tempo di dimezzamento $T_{1/2} \simeq 88.03$ y, rilasciando un'energia cinetica $E = 5.49$ MeV. Il nucleo figlio $^{234}$U ha una vita media $\tau_U \simeq 3.5 \times 10^5$ y. L'energia così prodotta può essere convertita in energia elettrica tramite un generatore radiotermico (RTG) e quello che equipaggia la sonda spaziale Voyager 2 ha un'efficienza del 5.5% in questo processo.
Il Voyager 2, lanciato il 20/08/1977, raggiunse la minima distanza da Saturno il 26/08/1981. Saturno dista dal Sole 9.5 U.A., dove 1 U.A. corrisponde alla distanza fra Terra e Sole.
a) Si calcoli con quanto plutonio era stato equipaggiato l'RTG del Voyager 2 sapendo che questo, al momento di massimo avvicinamento a Saturno, disponeva di una potenza elettrica $W_{Sat} = 395$ W.
b) Quale potenza elettrica aveva ancora disponibile il Voyager 2 quando, il 24/08/1989 sorvolò alla minima distanza Nettuno, che dista 30.1 U.A. dal Sole? Quale potenza elettrica ha ancora disponibile oggi Voyager 2?
c) Sapendo che i pannelli solari che equipaggiavano lo Skaylab avevano un'area attiva di 730 m$^2$ e gli fornivano 10.5 kW, quale area avrebbero dovuto avere pannelli solari equivalenti che avessero equipaggiato Voyager 2, in grado di alimentarlo come ha fatto l'RTG?

**Soluzione:**

a) Il tempo di dimezzamento $T_{1/2} \simeq 88.03$ y di $^{238}$Pu corrisponde ad una vita media

$$\tau_\alpha = T_{1/2}/\ln 2 \simeq 88.03/0,6931 = 127 \text{ y}.$$

Dato che $\tau\alpha/\tau_U \simeq 3.6 \times 10^{-4} \ll 1$, si può considerare il nucleo figlio $^{234}$U come praticamente stabile e trascurare il contributo dei suoi decadimenti al funzionamento del sistema RTG.
Supponendo che l'RTG sia stato caricato di plutonio al momento del lancio del Voyager 2, si associ ad esso il tempo $t_0 = 0$ giorni, e sia $t_1 = 1467$ giorni il tempo associato al sorvolo di Saturno da parte del Voyager 2. Si calcoli ora, tenendo conto dell'efficienza del sistema RTG, il numero $\Delta N(t_1)$ di decadimenti al secondo che garantiscono una potenza di 395 Watt, ricordando che 1 Watt $= 6.2415 \times 10^{12}$ MeV/s

$$\Delta N(t_1) \;=\; \frac{395 \times 6.2415 \times 10^{12}}{5.49 \times 0.055} \simeq 8.1649 \;\times 10^{15} \tag{27.5}$$

Lo scopo è però risalire alla massa di plutonio con cui è stato caricato il sistema RTG, ovvero al numero $N_0$ di atomi di plutonio presenti all'istante

$t_0$. Si esprime quindi $\Delta N(t_1)$ tenendo conto della 6.1, con $\lambda = \tau_\alpha$

$$\Delta N(t_1) = N_0\ e^{-t_1/\tau_\alpha} - N_0\ e^{-(t_1+1)/\tau_\alpha} = N_0 \left(e^{-t_1/\tau_\alpha} - e^{-t_1/\tau_\alpha}\ e^{-1/\tau_\alpha}\right) =$$

$$= N_0\ e^{-t_1/\tau_\alpha} \left(1 - e^{-1/\tau_\alpha}\right) \qquad \text{da cui,}$$

$$N_0 \ = \ \Delta N(t_1)\ e^{t_1/\tau_\alpha} \left(1 - e^{-1/\tau_\alpha}\right)^{-1} \tag{27.6}$$

e sostituendo i valori

$$N_0 \simeq 3.37524 \times 10^{25}$$

Quindi, essendo pari a 244.06 g la massa molare del plutonio e ricordando il numero di Avogadro, si ha che la quantità di $^{238}$Pu con cui è stato inizialmente caricato il dispositivo RTG ammonta a circa 13.7 kg.

b) Per rispondere alla seconda domanda si ponga $t_2 = 4387$ giorni il tempo associato al sorvolo di Nettuno da parte del Voyager 2. Poichè la potenza disponibile grazie al dispositivo RTG è in qualsiasi momento $t_i$ sempre proporzionale ad $N_0\ e^{-t_i/\tau_\alpha} \left(1 - e^{-1/\tau_\alpha}\right)$, si ottiene la potenza disponibile al momento del sorvolo di Nettuno come

$$W_{Net} \ = \ W_{Sat}\ \frac{e^{-t_2/\tau_\alpha}}{e^{-t_1/\tau_\alpha}} \ \simeq \ 370.9 \text{ W} \tag{27.7}$$

Similmente, la potenza ancora disponibile al 1 marzo 2018, supponendo immutata l'efficienza del dispositivo RTG, ammonta a circa 296 W.

c) Assumendo ragionevolmente che l'energia luminosa irradiata dal Sole scali come l'inverso del quadrato della distanza dal Sole stesso, detta $A_1 = 730$ m$^2$ l'area attiva delle celle fotovoltaiche che fornivano allo Skylab 10.5 kW a una distanza di 1 U.A. dal Sole, l'area che dovrebbero avere celle equivalenti per fornire a Voyager 2 395 W a 9.5 U.A. (Saturno), equivale ad

$$A_2 \ = \ 730 \times \frac{395}{10500} \times 9.5^2 \ \simeq \ 2478.5 \text{ m}^2$$

L'area necessaria alla distanza di Nettuno sarebbe invece

$$A_3 \ = \ 730 \times \frac{370.9}{10500} \times 30.1^2 \ \simeq \ 23361.8 \text{ m}^2$$

quindi cica 9.5 volte maggiore e pari a quella di circa 3.3 campi da calcio.

### 27.5.2 Esercizio 6 _ 2: Radon in una ambiente chiuso

Una sala teatrale con pavimento e soffitto quadrati di 10 m di lato e pareti alte 4 m, non è stata aerata per molti giorni. Misurando in essa l'attività

per unità di volume del $^{222}$Rn si trova il valore di 100 Bq/m$^3$.
a) Si esprima l'attività del $^{222}$Rn emesso dal calcestruzzo di pareti, pavimento e soffitto, in funzione delle vite medie del Radon stesso e del capostipite ($^{238}$U) della catena di decadimenti da cui esso proviene.
b) Si calcoli la concentrazione di $^{238}$U nel calcestruzzo tenendo conto che lo spessore attraverso il quale il prodotto di decadimento $^{222}$Rn può effettivamente diffondere entro l'ambiente è di 1.5 cm.

**Soluzione:**

a) Osservando la famiglia radioattiva dell'$^{238}$U, riportata in figura 6.2 assieme all'indicazione delle vite medie dei vari nuclidi figli, si nota che la vita media $\tau_1$ del capostipite $^{238}$U è molto maggiore di quelle di tutti i prodotti intermedi fino al $^{222}$Rn compreso. Supponendo altresì che l'$^{238}$U sia presente nei minerali del calcestruzzo da tempi maggiori a quelli caratteristici delle vite medie dei prodotti intermedi, si può considerare di essere nella condizione di "equilibrio secolare" per cui la quantità di $^{222}$Rn presente ad un certo istante $t$ è legata a quella del capostipite $^{238}$U nello stesso istante dalla relazione

$$N_1\,(t)\,\lambda_1 \;=\; N_2\,(t)\,\lambda_2$$

dove l'indice "1" rappresenta $^{238}$U e l'indice "2" il $^{222}$Rn, con $\lambda_1 = \tau_1 \simeq 4.5 \times 10^9$ y (pari a circa $1.41912 \times 10^{17}$ s), e $\lambda_2 = \tau_2 \simeq 3.8$ d.
Ricordando poi che l'attività $\mathcal{A}_2\,(t)$ del $^{222}$Rn è definita come

$$\mathcal{A}_2\,(t) \;=\; \lambda_2 N_2\,(t)$$

si ha immediatamente

$$\mathcal{A}_2\,(t) \;=\; \lambda_1 N_1\,(t) \;=\; \lambda_1 N_1\,(0)\,e^{-\lambda_1 t}$$

b) Il volume di calcestruzzo efficace nell'emettere per diffusione $^{222}$Rn nella sala è pari a $V_0 = \big(2 \times 10 \times 10 + 4 \times 4 \times 10\big)\times 0.015 = 5.40$ m$^3$ .
Il volume della sala è invece $V_1 = 10 \times 10 \times 4 = 400$ m$^3$, per cui l'attività del $^{222}$Rn in essa è pari ad $\mathcal{A}_2 = 100 \times 400 = 4 \times 10^4$ Bq, che per la condizione di equilibrio secolare deve coincidere con quella dell' $^{238}$U presente nel calcestruzzo di pareti, pavimento e soffitto. La sua concentrazione nel calcestruzzo sarà quindi data da

$$\rho_{^{238}\mathrm{U}} = \frac{N_1\,(t)}{5.4} = \frac{\mathcal{A}_2\,(t)}{5.4 \times \lambda_1} \simeq \frac{4 \times 10^4}{5.4 \times 7.04662 \times 10^{-18}} \;\; \text{atomi/m}^3$$

cioè $\rho_{^{238}\mathrm{U}} \simeq 1.0512 \times 10^{21}$ atomi/m$^3$, che essendo pari a 238.05 g la massa di una mole di $^{238}$U, equivale a circa 0.42 g/m$^3$.

### 27.5.3 Esercizio 6 _ 3:

Lo $^{89}$Sr decade $\beta$ con un tempo di dimezzamento di 1224 ore.
Quanto ne deve essere aggiunto a 2 mg di Sr stabile per ottenere un preparato con un'attività specifica iniziale di 2740 Ci/g ?
Che attività mostrerà il preparato dopo 35 giorni ?

**Soluzione:**

Si ricordi che:

$$1 \text{ Ci } = 3.7 \times 10^{10} \text{ bq}$$

$$\text{T}_{1/2} \;=\; \frac{1}{\lambda}\ \ln 2 \;= \tau \ \ln 2 = 4.4064 \times 10^{6} \text{ s}$$

da cui:

$$\tau = \frac{4.4064 \times 10^{6}}{\ln 2} \text{ s } \;\simeq\; 6.3571 \times 10^{6} \text{ s}$$

Si indichino con $m_0$ la massa di stronzio non attivo presente nel preparato ($m_0 = 2$ mg), e con $\Delta m$ la massa di $^{89}$Sr che va aggiunta al preparato e che va determinata, per cui la massa totale del preparato è $m = m_0 + \Delta m$.
Detta $\mathcal{A}_{sp}(t = 0)$ l'attività specifica iniziale si ha

$$\mathcal{A}_{sp}(t = 0) = 2740 \text{ Ci/g } \;\simeq\; 1.0138 \times 10^{14} \text{ bq/g}$$

con

$$\mathcal{A}_{sp}(t = 0) = \frac{\mathcal{A}(t = 0)}{m} = \frac{\mathcal{A}(t = 0)}{m_0 + \Delta m} = \frac{N_0 \lambda}{m_0 + \Delta m}$$

dove $N_0$ rappresenta il numero di nuclei di $^{89}$Sr che vanno aggiunti al preparato inizialmente per soddisfare le condizioni del problema. Si ha anche, detto $N_A$ il numero di Avogadro,

$$N_0 \;=\; \frac{\Delta m}{A}\ N_A$$

con $A = 89$ il numero di massa dello $^{89}$Sr, ma anche il suo peso atomico in g mol$^{-1}$.
Sostituendo si ha dunque

$$\mathcal{A}_{sp}(t = 0) = \frac{N_0 \lambda}{m_0 + \Delta m} = \frac{\Delta m \ \lambda \ N_A}{A\,(m_0 + \Delta m)}$$

e ricavando $\Delta m$

$$\Delta m = \frac{m_0 \ A \ \mathcal{A}_{sp}(t = 0)}{\lambda N_A - A \ \mathcal{A}_{sp}(t = 0)} = \frac{m_0 \ A \ \mathcal{A}_{sp}(t = 0)}{T_{1/2}^{-1} \ N_A \ \ln(2) - A \ \mathcal{A}_{sp}(t = 0)}$$

Sostituendo infine i valori numerici nelle corrette unità di misura si ottiene

$$\Delta m \simeq \frac{(2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{g})(89\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}})(1.0138 \cdot 10^{14}\ \mathrm{bq/g})}{(4.406 \cdot 10^{6}\ \mathrm{s})^{-1}(0.69315)(6.0221 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}) - (89\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}})(1.0138 \cdot 10^{14}\ \mathrm{bq/g})}$$

$$\simeq 2.1 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{g}$$

Tenendo conto che un intervallo $\Delta t = 35$ giorni equivale a $\Delta t = 3.024 \times 10^{6}$ s si ottiene, per l'attività residua del preparato dopo 35 giorni dalla preparazione

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\Delta t = 3.024 \times 10^{6}\ \mathrm{s}) &= \mathcal{A}(t=0)\ e^{-\Delta t/\tau} = \\
&= \frac{N_0}{\tau}\ e^{-\Delta t/\tau} = \frac{N_A \Delta m}{A\tau}\ e^{-\Delta t/\tau} = \\
&\simeq \frac{(6.0221 \cdot 10^{23})(2.1 \cdot 10^{-4})}{(89)(6.3571 \cdot 10^{6})}\ e^{-3.024 \cdot 10^{6}/6.3571 \cdot 10^{6}} = \\
&\simeq 2.235 \cdot 10^{11} \times 0.621 \simeq 1.39 \cdot 10^{11}\ \mathrm{bq}
\end{aligned}$$

### 27.5.4 Esercizio 6 _ 4:

Si ha un preparato costituito da una miscela di due diverse sostanze radioattive completamente indipendenti l'una dall'altra e si misura sperimentalmente la distribuzione dei tempi d'attesa fra la rivelazione di due suoi successivi prodotti di decadimento. Si suppone che la misura sia stata eseguita con un sistema di rivelazione molto efficiente ma non in grado di riconoscere i prodotti di decadimento di una sostanza da quelli dell'altra.
Si delinei nell'ambito di quali ipotesi e come si potrebbe in pratica cercare di risalire ai valori delle vite medie $\tau_1$ e $\tau_2$ e delle abbondanze iniziali $N_1(0)$ e $N_2(0)$ delle due diverse sostanze radioattive che compongono la miscela che costituisce il preparato.

**Soluzione:**

Detto $N_*(t) = N_1(t) + N_2(t)$ il numero totale di nuclei radioattivi del preparato non ancora decaduti ad un qualunque istante $t > 0$, con

$$N_1(t) = N_1(0)\, e^{-t/\tau_1} \qquad \text{ed} \qquad N_2(t) = N_2(0)\, e^{-t/\tau_2}$$

si ha:

$$N_*(0) = N_1(0) + N_2(0) \qquad \text{ed} \qquad N_*(t) = N_1(0)\, e^{-t/\tau_1} + N_2(0)\, e^{-t/\tau_2}$$

Si considerino tre casi estremi:

$$\tau_1 \ll \tau_2 \quad ; \quad \tau_1 \simeq \tau_2 \simeq \tau \quad ; \quad \tau_1 \gg \tau_2$$

Si indichi con $N_*^{(sp)}(t_i)$ il numero di eventi raccolti nell'$i-$mo canale dell'istogramma sperimentale, compreso tra gli istanti $t_i$ e $t_i + \Delta t$.
- Si cominci con l'analizzare il secondo caso: $\tau_1 \simeq \tau_2 \simeq \tau$ e si consideri il logaritmo naturale di $N_*(t)$

$$\begin{aligned} \ln N_*(t) &= \ln\left[N_1(0)\, e^{-t/\tau_1} + N_2(0)\, e^{-t/\tau_2}\right] \\ &\simeq \ln\left[N_1(0)\, e^{-t/\tau} + N_2(0)\, e^{-t/\tau}\right] \\ &= \ln\{e^{t/\tau}\left[N_1(0) + N_2(0)\right]\} \\ &= -\frac{t}{\tau} + \ln\left[N_1(0) + N_2(0)\right] \end{aligned} \tag{27.8}$$

che mostra una dipendenza quasi lineare di $\ln N_*(t)$ da $t$.
Ponendo in scala semilogaritmica $N_*^{(sp)}(t_i)$ si nota che il suo profilo dovrebbe poter essere approssimato da un andamento rettilineo con pendenza $-1/\tau$ e intercetta sull'asse delle ordinate pari a $\ln\left[N_1(0) + N_2(0)\right]$.
Effettuando quindi un "fit a retta" si riescono a stimare $\tau \simeq \tau - 1 \simeq \tau_2$ e la somma $\left[N_1(0) + N_2(0)\right]$ delle abbondanze iniziali, ma non le singole abbondanze $N_1(0)$ e $N_2(0)$.
- Si supponga ora che sia $\tau_2 \gg \tau_1$.
In tal caso ci si aspetta che per tempi $t \gg \tau_1$ la legge di decadimento sia dominata dai prodotti di decadimento della sostanza 2, come si vede anche in figura ...
Se quindi si effettua un fit sui valori di $\ln\left[N_*^{(sp)}(t_i)\right]$ per valori di $t \gg \tau_1$, ovvero per $t \geq t'$ con $t' \gg \tau_1$, si dovrebbe ottenere una legge

$$N_2^{(fit)}(t) = N_2^{(fit)}(0)\ \ e^{-t/\tau_2^{(fit)}}$$

in grado di riprodurre la corretta legge di decadimento $N_2(0)\, e^{-t/\tau_2}$ tanto meglio quanto più vale $t' \gg \tau_1$, ovviamente sempre che per $t \geq t'$ ci siano a disposizione abbastanza valori sperimentali sui quali fare un fit affidabile.
In quest'ipotesi si può dunque sottrarre a $N_*^{(sp)}(t_i)$ per ogni valore di $t_i$, quanto dato da $N_2^{(fit)}(t_i)$, e quanto resta, $N_1^*(t_i)$, dovrebbe essere compatibile con la distribuzione dovuta ai decadimenti della sola sostanza 1:

$$\left[N_*^{(sp)}(t_i) - N_2^{(fit)}(t_i)\right] \propto N_1^*(t_i) \approx N_1(t_i)$$

Effettuando quindi un fit sui valori rappresentati da $N_1^*(t_i)$ si ottengono stime anche per $N_1(0)$ e per $\tau_1$.
- Il caso $\tau_2 \ll \tau_1$ è chiaramente simmetrico a quello ora discusso.

Si osservi anche che un ulteriore fattore che influenza quanto bene la procedura indicata permetta di risalire a stime di $N_1(0),\ N_2(0),\ \tau_1,\ \tau_2$ è il rapporto $N_1/N_2$, peraltro non conoscibile a priori.

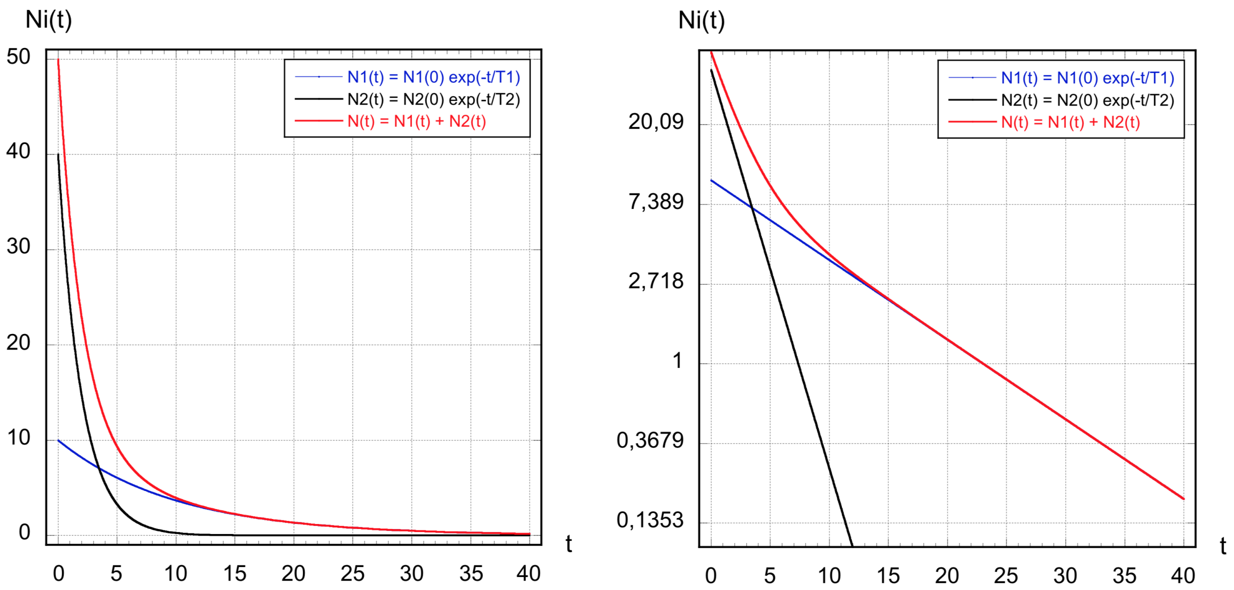



Figura 27.1: A sinistra, in scala linare, gli andamenti di $N_1(t)$, $N_2(t)$ e la loro somma, nell'ipotesi che $N_1(0) = 10$, $N_2(0) = 40$, $\tau_1 = 10$ e $\tau_2 = 10$; a destra lo stesso in scala semi-logaritmica.

### 27.5.5 Esercizio 6 _ 5: Intensità di un fascio di neutroni in funzione della distanza dalla sorgente

Si ha un fiotto di neutroni di energia cinetica $E_n$ pari a 0.025 eV che percorre un certo tragitto. Quale frazione di neutroni sarà decaduta dopo 5.0 m di percorso?

**Soluzione:**

Si osservi come prima cosa che dato il valore di $E_n$ i neutroni considerati sono termici e quindi si possono utilizzare le formule non-relativistiche per risolvere il problema. Si ha dunque

$$E_n = \frac{1}{2} m_n v_n^2 \quad \text{da cui: } v_n = \sqrt{\frac{2E_n}{m_n}}$$

e ricordando che $m_n \simeq 9.39565 \times 10^8$ eV$/c^2$, con $c \simeq 2.9979 \times 10^8$ m/s, si ha

$$v_n \simeq 2.187 \times 10^3 \text{ m/s}$$

il che riconferma la "termicità" dei neutroni considerati.
Il tempo $\Delta t$ loro necessario per percorrere il tragitto $l = 5$ m è quindi dato da

$$\Delta t_l = \frac{l}{v_n} = \frac{5}{2187} \simeq 0.0022862 \text{ s}$$

L'espressione che dá il numero $N(t)$ di neutroni liberi presenti ad un certo istante $t$, sapendo che ce n'erano $N(0)$ all'istante iniziale $t = 0$, è

$$N(t) = N(0)\, e^{-\dfrac{t}{\tau_n}}$$

La quantità $\Delta N(t_l)$ di neutroni decaduti dopo un tempo $\Delta t_l = (t_l - 0) = t_l$, a partire dall'istante iniziale è quindi data da

$$\Delta N(t_l) = N(0)\left(1 - e^{-t_l/\tau_n}\right)$$

Quindi la frazione di neutroni decaduta dopo un certo tempo $t_l$ è

$$f_n(t_l) = \frac{\Delta N(t_l)}{N(0)} = \left(1 - e^{-t_l/\tau_n}\right)$$

Il fatto di non essere in condizioni di "regime relativistico" permette sostanzialmente di considerare, per la vita media $\tau_n$ del neutrone, il suo valore a riposo, ovvero $\tau_n = 886,8$ s. Sostituendo i valori dati o calcolati per $t_l$ e $\tau_n$ si ha infine

$$f_n(t_l) \simeq (1 - 0.99999742) \simeq 2.58 \times 10^{-6}$$

### 27.5.6 Esercizio 6 _ 6: Vita media del $^{239}$Pu

La vita media per decadimento $\alpha$ del $^{239}$Pu è stata determinata immergendo in azoto liquido una sfera di $^{239}$Pu di massa 120.1 g, in modo che lo strato d'azoto che circondava la sfera immersa fosse sufficiente a trattenere tutte le particelle $\alpha$ emesse, e misurando conseguentemente il tasso di evaporazione dell'azoto liquido. Si è trovato che il tasso di evaporazione corrispondeva a una potenza $W_{ev} = 0.231$ W.
Si calcoli il tempo di dimezzamento del $^{239}$Pu, tenendo conto che l'energia cinetica delle particelle $\alpha$ di decadimento è $E_\alpha = 5.144$ MeV.

**Soluzione:**

Si ricordino i seguenti fattori di conversione:
1 MeV = $1.60206 \times 10^{-13}$ J
1 u.m.a. = $1.66 \times 10{-}24$ g
Il decadimento avviene secondo lo schema

$$^{239}\mathrm{Pu} \rightarrow {}^{235}\mathrm{U} + \alpha \tag{27.9}$$

Per valutare il tasso di decadimenti $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$, da cui si dedurrà poi il tempo di dimezzamento $T_{1/2} = \tau \times \ln 2$, nota la potenza $W_{ev}$ erogata dai decadimenti e associata al tasso di evaporazione, resta da determinare l'energia totale $E_{tot}$ erogata, e assorbita dall'azoto liquido, per ogni singolo decadimento $\alpha$.

A tale scopo bisogna tenere conto anche dell'energia cinetica $E_U$ associata al rinculo del nucleo di $^{235}$U dopo il decadimento $\alpha$ del "genitore" $^{239}$Pu. Per calcolarla si ricordi che la consevazione dell'impulso nel C.M. dà:

$$|\vec{p}_U| \ = \ |\vec{p}_\alpha| \tag{27.10}$$

Per cui

$$E_U \ = \ \frac{p_U^2}{2M_U} \ = \ \frac{p_\alpha^2}{2M_U} \ = \ \frac{2M_\alpha E_\alpha}{2M_U} \ = \frac{4}{235}E_\alpha \tag{27.11}$$

esprimendo le masse in unità di masse atomiche. Quindi

$$E_{tot} \ = \ E_\alpha + E_U = \frac{4+235}{235}E_\alpha \ = 5.232 \text{ MeV} \tag{27.12}$$

Per il numero $N$ di nuclei di nuclei di $^{239}$Pu presenti nella massa di 120.1 g si ha

$$N \ = \ \frac{120.1}{239 \ \times \ 1.66 \times 10^{-24}} \ = \ 3.027 \times 10^{23} \tag{27.13}$$

Per il tasso di decadimenti d$N$/d$t$ si ha, come rapporto fra la potenza totale erogata e l'energia totale associata ad ogni singolo decadimento

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} \ = \ \frac{0.231}{5.232 \times 1.60206 \times 10^{-13}} \ = \ 2.756 \times 10^{11} \ s^{-1} \tag{27.14}$$

Per il tempo di dimezzamento cercato del $^{239}$Pu si ha quindi

$$\begin{aligned} T_{1/2} \ &= \ \frac{N \times \ln 2}{\mathrm{d}N/\mathrm{d}t} \ = \ \frac{3.027 \times 10^{23} \times 0.6931}{2.756 \times 10^{11}} \ = \\ &= \ 7.61 \times 10^{11} \ s \ \simeq \ 2.41 \times 10^4 \ y \end{aligned} \tag{27.15}$$

### 27.5.7 Esercizio 6 _ 7:

Lo $^{89}$Sr decade $\beta$ con un tempo di dimezzamento di 1224 ore.
Quanto ne deve essere aggiunto a 2 mg di Sr stabile per ottenere un preparato con un'attività specifica iniziale di 2740 Ci/g ?
Che attività mostrerà il preparato dopo 35 giorni ?

**Soluzione**

Si ricordi che:

$$1 \text{ Ci } = 3.7 \times 10^{10} \text{ bq}$$

$$\mathrm{T}_{1/2} \ = \ \frac{1}{\lambda} \ \ln 2 \ = \tau \ \ln 2 = 4.4064 \times 10^6 \text{ s}$$

da cui:

$$\tau = \frac{4.4064 \times 10^6}{\ln 2} \text{ s} \ \simeq \ 6.3571 \times 10^6 \text{ s}$$

Si indichino con $m_0$ la massa di stronzio non attivo presente nel preparato ($m_0 = 2$ mg), e con $\Delta m$ la massa di $^{89}$Sr che va aggiunta al preparato e che va determinata, per cui la massa totale del preparato è $m = m_0 + \Delta m$. Detta $\mathcal{A}_{sp}(t=0)$ l'attività specifica iniziale si ha

$$\mathcal{A}_{sp}(t=0) = 2740 \text{ Ci/g} \simeq 1.0138 \times 10^{14} \text{ bq/g}$$

con

$$\mathcal{A}_{sp}(t=0) = \frac{\mathcal{A}(t=0)}{m} = \frac{\mathcal{A}(t=0)}{m_0 + \Delta m} = \frac{N_0 \lambda}{m_0 + \Delta m}$$

dove $N_0$ rappresenta il numero di nuclei di $^{89}$Sr che vanno aggiunti al preparato inizialmente per soddisfare le condizioni del problema. Si ha anche, detto $N_A$ il numero di Avogadro,

$$N_0 = \frac{\Delta m}{A} N_A$$

con $A = 89$ il numero di massa dello $^{89}$Sr, ma anche il suo peso atomico in g mol$^{-1}$.
Sostituendo si ha dunque

$$\mathcal{A}_{sp}(t=0) = \frac{N_0 \lambda}{m_0 + \Delta m} = \frac{\Delta m \ \lambda \ N_A}{A\,(m_0 + \Delta m)}$$

e ricavando $\Delta m$

$$\Delta m = \frac{m_0 \ A \ \mathcal{A}_{sp}(t=0)}{\lambda N_A - A \ \mathcal{A}_{sp}(t=0)} = \frac{m_0 \ A \ \mathcal{A}_{sp}(t=0)}{T_{1/2}^{-1} \ N_A \ \ln(2) - A \ \mathcal{A}_{sp}(t=0)}$$

Sostituendo infine i valori numerici nelle corrette unità di misura si ottiene

$$\Delta m \simeq \frac{(2 \cdot 10^{-3} \text{ g})(89 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1})(1.0138 \cdot 10^{14} \text{ bq/g})}{(4.406 \cdot 10^6 \text{ s})^{-1}(0.69315)(6.0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}) - (89 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1})(1.0138 \cdot 10^{14} \text{ bq/g})}$$
$$\simeq 2.1 \cdot 10^{-4} \text{ g}$$

Tenendo conto che un intervallo $\Delta t = 35$ giorni equivale a $\Delta t = 3.024 \times 10^6$ s si ottiene, per l'attività residua del preparato dopo 35 giorni dalla preparazione

$$\mathcal{A}(\Delta t = 3.024 \times 10^6 \text{ s}) = \mathcal{A}(t=0) \ e^{-\Delta t/\tau} =$$
$$= \frac{N_0}{\tau} \ e^{-\Delta t/\tau} = \frac{N_A \Delta m}{A \tau} \ e^{-\Delta t/\tau} =$$
$$\simeq \frac{(6.0221 \cdot 10^{23})(2.1 \cdot 10^{-4})}{(89)(6.3571 \cdot 10^6)} \ e^{-3.024 \cdot 10^6 / 6.3571 \cdot 10^6} =$$
$$\simeq 2.235 \cdot 10^{11} \times 0.621 \simeq 1.39 \cdot 10^{11} \text{ bq}$$

### 27.5.8 Esercizio 6 _ 8:

Il ${}^{210}_{84}$Po ha un tempo di dimezzamento per decadimento $\alpha$ pari a $T_{1/2} = 138$ giorni. Sapendo che l'energia cinetica della particella $\alpha$ prodotta in ogni suo decadimento è pari a $E_{k,\alpha} = 5.3$ MeV, e che il nucleo figlio risultante è praticamente sempre prodotto nel suo stato fondamentale, si deduca la quantità di calore generata da 5 mg di ${}^{210}$Po in un tempo pari alla sua vita media.
Si esprimano le masse in gioco come il prodotto fra il numero di nucleoni costituenti ogni struttura considerata ed il valore dell'unità di massa atomica $m_U \simeq 931.49$ MeV$/c^2$.
Si ricordi che 1 J $\simeq 6.242 \times 10^{18}$ eV.

**Soluzione:**

Il decadimento considerato è: ${}^{210}_{84}\text{Po} \to {}^{206}_{82}\text{Pb} + {}^{4}_{2}\text{He}$, e si conosce l'energia cinetica della particella $\alpha$ emessa: $E_{k,\alpha} = 5.3$ MeV.
Per la descrizione del moto della particella $\alpha$ e del nucleo di rinculo si può in questo caso ricorrere all'approssimazione non relativistica e in base alla conservazione dell'impulso l'energia cinetica del nucleo prodotto nel decadimento è quindi esprimibile come

$$E_{k,nuc} \simeq E_{k,\alpha} \frac{m_\alpha}{M_{nuc}}$$

Conseguentemente, l'energia complessiva liberata in un decadimento radioattivo del tipo considerato è data da

$$E_\alpha \equiv E_{k,\alpha} + E_{k,nuc} \ \simeq \ E_{k,\alpha}\left(1 + \frac{m_\alpha}{M_{nuc}}\right) \ \simeq \ 5.3 \cdot \frac{210}{206} \text{ MeV} \ \simeq \ 5.4 \text{ MeV}$$

Il numero medio $n_d(\tau)$ di decadimenti che si verificano in un intervallo di tempo pari alla vita media $\tau = \left(T_{1/2}/ln2\right) \simeq 199$ giorni, del nucleo ${}^{210}_{84}$Po è dato da

$$n_d\left(\tau\right) \ = \ N_0 - N\left(\tau\right) \ = \ N_0\left(1 - e^{-\lambda\tau}\right) \ = \ N_0\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

dove $N_0$ è il numero di nuclei radioattivi presenti all'istante iniziale ($t = 0$), con $N(t)$ il numero di nuclei radioattivi presenti al generico istante $t$ e $\lambda = 1/\tau$ la costante di decadimento del nucleo ${}^{210}_{84}$Po.
$N_0$ è a sua volta dato da

$$N_0 \ = \ N_A \ \frac{m_{\text{Po}}}{A_{\text{Po}}}$$

con $N_A$ il numero di Avogadro, $m_{\text{Po}} = 5$ mg la massa di ${}^{210}_{84}$Po isotopicamente puro inizialmente presente e $A_{\text{Po}} \simeq 210$ g mol$^{-1}$ è il peso atomico

dell'isotopo radioattivo considerato.
La quantità di calore $Q(\tau)$ prodotta nell'intervallo temporale compreso fra $t = 0$ e $t = \tau$ è quindi data da

$$\begin{aligned} Q\left(\tau\right) = \;& n_d\left(\tau\right) E_\alpha \;=\; N_0 \left(1 - \frac{1}{e}\right) E_\alpha \;=\; N_A \frac{m_{\mathrm{Po}}}{A_{\mathrm{Po}}} \left(1 - \frac{1}{e}\right) E_\alpha \simeq \\ & \simeq 6.022 \times 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}\ \frac{5 \times 10^{-3}\ \mathrm{g}}{210\ \mathrm{g\ mol}^{-1}} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \times 5.4\ \mathrm{MeV} \simeq \\ & \simeq 4.9 \times 10^{19}\ \mathrm{MeV} \simeq \\ & \simeq 7.9 \times 10^{6}\ \mathrm{J} \end{aligned}$$

### 27.5.9 Esercizio 6 _ 9:

Si consideri un muone prodotto nell'atmosfera, all'altezza di 8.5 km, dall'interazione fra un raggio cosmico primario e l'atmosfera stessa. Sapendo che dopo prodotto il muone viaggia verso il suolo inclinato di 18 gradi rispetto alla verticale con un impulso di 4.8 GeV/c, e trascurando ogni possibile interazione significativa tra il muone e l'atmosfera, si calcoli la probabilitè che esso raggiunga il suolo prima di decadere.
Si ricordi che la vita media del muone è $\tau_\mu \simeq 2.2\ \mu$s e che la sua massa è $m_\mu \simeq 106$ MeV/c$^2$.

**Soluzione:**

Un muone, una volta prodotto alla quota $z$, per giungere al suolo con traiettoria rettilinea inclinata di un angolo $\vartheta_\mu$ rispetto alla verticale, percorre un tragitto di lunghezza

$$\Delta z_0 \;=\; \sqrt{z^2\left(1 + \mathrm{tg}^2\vartheta_\mu\right)} \;=\; \frac{z}{\cos\vartheta_\mu}$$

Lo spazio $s$ percorso dal muone in funzione del suo impulso è dato da

$$s \;=\; \gamma\ v\ t \;=\; \frac{m_\mu \gamma\ v}{m_\mu}\ t \;=\; \frac{p_\mu}{m_\mu}\ t$$

Il tempo necessario al muone per raggiungere il suolo nel proprio sistema di riferimento è quindi

$$t_0 \;=\; \frac{\Delta z_0\ m_\mu}{p_\mu} \;=\; \frac{m_\mu\ z}{p_\mu\ \cos\vartheta_\mu}$$

La probabilità $P$ che il muone raggiunga il suolo è data dalla probabilità che decada solo dopo aver percorso almeno una distanza pari a $\Delta z_0$, quindi

$$P \;=\; \frac{\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} e^{-t/\tau_\mu}\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-t/\tau_\mu}\mathrm{d}t} \;=\; \frac{-\tau_\mu\left[e^{-t/\tau_\mu}\right]_{t_0}^{+\infty}}{-\tau_\mu\left[e^{-t/\tau_\mu}\right]_{0}^{+\infty}} \;=\; e^{-\dfrac{m_\mu\, z}{\tau_\mu\, p\, \cos\vartheta_\mu}} \;=$$

$$\simeq\; e^{\left[-\dfrac{106\ \mathrm{MeV/c^2} \times 8.5 \times 10^3\ \mathrm{m}}{2.2 \times 10^{-6}\ \mathrm{s} \times 4.8 \times 10^3\ \mathrm{MeV/c^2} \times 0.951}\right]} =$$

$$\simeq\; e^{\left[-\dfrac{89.72 \times 10^6}{c}\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]} \;\simeq\; e^{-0.299} \;\simeq\; 0.74$$

La probabilità che il muone raggiunga il suolo prima di decadere è quindi del 74%, nell'ipotesi che le sue interazioni con i gas dell'atmosfera siano $\approx$ trascurabili.

–

### 27.6.3 Esercizio 7 _ 3: Fattore di forma elastico per un nucleo

Si consideri un nucleo con una distribuzione di carica sferica uniforme, $\rho(\vec{r}) = \rho(r) = 3/4\pi R^3$ per $r \leq R$ e $\rho(\vec{r}) = \rho(r) = 0$ per $r > R$, con $R = 2$ fm. Assumendo che la sensibilità sperimentale al raggio finito di tale nucleo si possa esprimere come una deviazione del 5 % del fattore di forma elastico dall'unità, si determini, nell'ipotesi di processi d'urto fra elettroni e nucleo, per quale impulso minimo si raggiunge tale sensibilità.
Si esprima il fattore di forma

$$F(q) = \int \rho(\vec{r})\, e^{\dfrac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}}\, \mathrm{d}\vec{r}$$

tenendo conto della simmetria della distribuzione di carica e si assuma che $qR \ll \hbar$, per cui il fattore di forma stesso si può ricondurre ad una opportuna approssimazione.
Così facendo che peso avrebbe il successivo termine d'approssimazione trascurato ?

#### Soluzione

Data la supposta simmetria sferica della distribuzione di carica nel nucleo, ovvero $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$, integrando l'espressione del fattore di forma sugli angoli si ottiene

$$\int \rho(\vec{r})\, e^{\frac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}}\, \mathrm{d}\vec{r} \;=\; \int_0^\infty r^2 \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{sen}\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} e^{\frac{i|\vec{q}|r\cos\vartheta}{\hbar}}\, \rho(r)\ \mathrm{d}\varphi \;=$$

$$= 2\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 \mathrm{d}r \int_{-1}^{1} e^{\frac{i|\vec{q}|r\cos\vartheta}{\hbar}}\, \mathrm{d}(\cos\vartheta) \;=\; \left(\text{con } y = \frac{i|\vec{q}|r\cos\vartheta}{\hbar}\right)$$

$$= 2\pi \int_0^\infty \frac{\hbar\ \rho(r)}{i|\vec{q}|r} r^2 \mathrm{d}r \int_{\frac{-i|\vec{q}|r}{\hbar}}^{\frac{i|\vec{q}|r}{\hbar}} e^y \mathrm{d}y$$

$$= 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2\ \frac{e^{\frac{i|\vec{q}|r}{\hbar}} - e^{\frac{-i|\vec{q}|r}{\hbar}}}{2i|\vec{q}|r/\hbar}\ \mathrm{d}r$$

$$= 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2\ \frac{\mathrm{sen}\,(|\vec{q}|r/\hbar)}{|\vec{q}|r/\hbar} \mathrm{d}r \;=\; 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2\ \frac{\mathrm{sen}\,(qr/\hbar)}{qr/\hbar} \mathrm{d}r$$

Data l'approssimazione indicata si ha $qr < qR \ll \hbar$ e di conseguenza si può espandere il seno in serie di Taylor fino al secondo termine non nullo

$$\frac{\mathrm{sen}(qr/\hbar)}{qr/\hbar} \;=\; \frac{1}{qr/\hbar}\left[qr/\hbar - \frac{(qr/\hbar)^3}{6} + ...\right] \;=\; 1 - \frac{(qr/\hbar)^2}{6} + ...$$

Sostituendo si ottiene, per il fattore di forma

$$F(q) \;=\; 4\pi \int_0^R \frac{3}{4\pi R^3}\ \frac{\mathrm{sen}\,(qr/\hbar)}{qr/\hbar} r^2 \mathrm{d}r \;\simeq\; \frac{3}{R^3} \int_0^R \left[1 - \frac{(qr/\hbar)^2}{6}\right] r^2 \mathrm{d}r$$

e integrando

$$F(q) \;\simeq\; 1 - \frac{(qR/\hbar)^2}{10}$$

Sostituendo il valore di $R$, esprimendo $c$ in "fm/s" e ricordando che $\hbar \simeq 6.582 \times 10^{-16}$ eV/s, ovvero $\hbar \simeq 197.5$ (MeV $\times$ fm)/(s $\times$ $c$) si ha quindi, per il valore minimo dell'impulso che garantisce la sensibilità richiesta alla valutazione del raggio del nucleo

$$0.95 \;=\; F(q) \;\simeq\; 1 - \frac{(qR/\hbar)^2}{10} \qquad \text{da cui,} \quad q \;\simeq\; 0.71\ \frac{\hbar}{R}$$

ovvero, sostituendo nelle opportune unità di misura,

$$q \;\simeq\; \frac{0.71 \times 197.5}{2} \;=\; 70\ \frac{\mathrm{MeV}}{c}$$

Il terzo termine dell'espansione in serie di Taylor del fattore di forma è

$$\frac{(qR/\hbar)^4}{280}$$

e poichè $qR/\hbar \simeq 0.71$, si ha che esso è circa 55 volte inferiore al precedente.

### 27.6.4 Esercizio 7 _ 4:

Nel corso di questo esercizio si supporrà $c = 1$. Una particella carica, di massa ignota $M$ e impulso $\vec{p}$ molto maggiore della massa $m_e$ dell'elettrone, attraversa un rivelatore. Ad una certa profondità all'interno del materiale attivo del rivelatore, un elettrone atomico viene urtato dalla particella entrante. Vengono misurati l'angolo polare dell'elettrone $\theta_e$ rispetto a $p$ e la sua energia $E_e$. Si mostri che la massa $M$ può essere stimata con la formula:

$$M = |\vec{p}| \left[\frac{E_e + m_e}{E_e - m_e} \cdot \cos^2\theta_e - 1\right]^{\frac{1}{2}}$$

(Suggerimento: si trascuri il fattore $m_e/|\vec{p}|$).

**Soluzione**

Siano $P$, $P'$ il quadri-impulso della particella sconosciuta, e $k$, $k'$ il quadri-momento dell'elettrone, prima e dopo l'urto. Con una scelta opportuna del sistema di riferimento:

$$P = (\sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2}, |\vec{p}|, 0, 0)$$

$$k = (m_e, 0, 0, 0)$$

$$k' = (E_e, \sqrt{E_e^2 - m_e^2}\cos\theta_e, \sqrt{E_e^2 - m_e^2}\sin\theta_e, 0)$$

$$P' = P + k - k'$$

A partire dall'ultima equazione:

$$P'^2 = P^2 + 2Pk - 2Pk' + k^2 + k'^2 - 2kk'$$

$$M^2 = M^2 + 2(m_e - E_e)\sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2} + 2|\vec{p}|\sqrt{E_e^2 - m_e^2}\cos\theta_e + 2m_e(m_e - E_e)$$

$$0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + M^2} - |\vec{p}|\sqrt{\frac{E_e + m_e}{E_e - m_e}}\cos\theta_e + m_e$$

$$0 = \sqrt{1 + \frac{M^2}{|\vec{p}|^2}} - \sqrt{\frac{E_e + m_e}{E_e - m_e}}\cos\theta_e + \frac{m_e}{|\vec{p}|}$$

$$M \approx |\vec{p}| \left[\frac{E_e + m_e}{E_e - m_e}\cos^2\theta_e - 1\right]^{\frac{1}{2}}$$

dove il fattore $m_e/|\vec{p}|$ è stato trascurato.

## 27.7 Esercizi Capitolo 13

### 27.7.1 Esercizio 13 _ 1:

La particella $J/\Psi$ (M = 3096.9 MeV) può essere prodotta sia in urti protone-protone che in urti elettrone-positrone.
A) Supponendo un fascio di protoni incidente su di un bersaglio fisso di idrogeno, calcolate l'energia del fascio di protoni nella reazione

$$p_1\, p_2 \;\rightarrow\; p\, p\;\; J/\Psi\;.$$

B) Supponendo due fasci di energia identica, calcolate l'energia del fascio nella reazione

$$e^+e^- \;\rightarrow\; J/\Psi\;.$$

**Soluzione**

Per risolvere questo esercizio si usa la proprietà degli invarianti relativistici di avere lo stesso valore numerico in sistemi di riferimento diversi.
A) In questo caso l'urto avviene tra due protoni con impulsi $p1$ e $p2$. Se calcoliamo $s$ nel sistema del laboratorio otteniamo:

$$s = (p_1{+}p_2)^2 = p_1^2{+}p_2^2{+}2p_1p_2 = m_p^2{+}m_p^2{+}2E_{p_1}E_{p_2}{-}2\vec{p}_1{\cdot}\vec{p}_2 = 2m_p^2{+}2E_{p_1}m_p$$

con $E_{p_2} = m_2$ e $\vec{p}_2 = 0$. Dopo l'urto è più conveniente calcolare $s$ nel sistema del centro di massa, dove le particelle prodotte sono a riposo:

$$s = (m_p + m_p + m_{J/\Psi})^2 = 4m_p^2 + m_{J/\Psi}^2 + 4m_pm_{J/\Psi}\;.$$

Eguagliando adesso i due valori di $s$ si ottiene (Fig. 1):

$$4m_p^2 + m_{J/\Psi}^2 + 4m_pm_{J/\Psi} = 2m_p^2 + 2E_{p_1}m_p \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; E_{p_1} = \frac{2m_p^2 + m_{J/\Psi}^2 + 4m_pm_{J/\Psi}}{2m_p} = 12.23 \text{ GeV}$$

B) In questo caso il calcolo può essere facilmente svolto nel sistema del laboratorio. I due elettroni di momento $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ si urtano per produrre una particella $J/\Psi$ a riposo:

$$(p_1 + p_2)^2 = m_{J/\Psi}^2 \;\rightarrow\; 2m_e^2 + 2E_e^2 - 2\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2 = m_{J/\Psi}^2$$

da cui, trascurando e quindi considerando nulla la massa dell'elettrone, si ha:

$$E_e^2 = \frac{m_{J/\Psi}^2}{4} \;\rightarrow\; E_e = \frac{m_{J/\Psi}}{2} = 1.5 \text{ GeV}$$

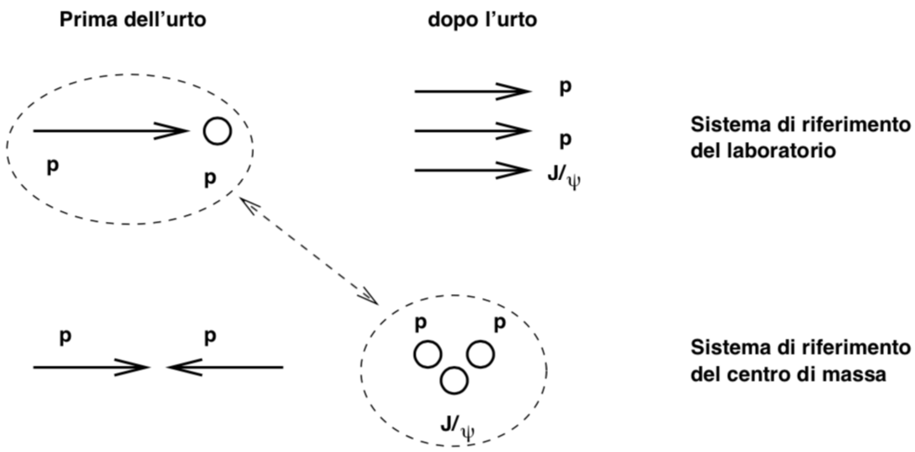



Figura 27.3: La risoluzione del problema è facilitata dall'eguagliare $s$ calcolata in due sistemi di riferimento diversi.

### 27.7.2 Esercizio 13 _ 2:

Si calcoli l'energia di soglia della reazione:

$$p + \gamma \; \rightarrow \; \Delta^+ \; \rightarrow \; p + \pi^0$$

Si tratta di una reazione che avviene ad esempio nell'Universo tra i protoni di altissima energia presenti nel flusso di raggi cosmici e i fotoni della radiazione cosmica di fondo ($T \simeq 2.7$ K). Tale reazione produce un protone di energia inferiore. Di conseguenza l'energia di soglia del protone per innescare la reazione costituirebbe di fatto l'estremo superiore nello spettro dei raggi cosmici: il *cutoff* GZK (dai nomi di Greisen, Zatzepin e Kuzmin).

#### Soluzione

In questo caso conviene calcolare $\sqrt{s}$ nel sistema del laboratorio. Con ovvio significato dei simboli:

$$\begin{aligned} s \; &= \; (p_p + p_\gamma)^2 \, c^2 = ... \\ &\left(m_p c^2\right)^2 + 2E_\gamma \left(E_p - |\vec{p}_p| \cos\vartheta\right) \\ &\left(m_p c^2\right)^2 + 2E_\gamma E_p \left(1 - \cos\vartheta\right) \end{aligned}$$

dove si è utilizzata l'approssimazione $E_p \simeq |\vec{p}_p| \, c$ , valida nel regime di alte energie cinetiche, e si è indicato con $\vartheta$ l'angolo compreso tra $\vec{p}_p$ e $\vec{p}_\gamma$.
Si ha dunque

$$E_p \; \geq \; \frac{\left(m_\Delta c^2\right)^2 - \left(m_p c^2\right)^2}{2E_\gamma \left(1 - \cos\vartheta\right)}$$

Il valore di soglia minima energetica $E_{pt}$ della reazione si ha in caso di urto frontale fra protone e fotone, ovvero per $\vartheta = 0$

$$E_{pt} \;=\; \frac{\left(m_\Delta c^2\right)^2 - \left(m_p c^2\right)^2}{4E_\gamma} \;\simeq\; 5 \times 10^{19}\ \mathrm{eV}$$

### 27.7.3 Esercizio 13 _ 3:

Si dimostri che un fotone non può decadere in un elettrone e un positrone. Posto $c = 1$, si considerino elettrone e positrone come due particelle identiche di quadri-impulsi $P_1 = m_0\,(\gamma_1, \gamma_1 \vec{v}_1)$ e $P_2 = m_0\,(\gamma_2, \gamma_2 \vec{v}_2)$, e sia $K = \left(\omega, \vec{k}\right)$, con $\vec{k}$ il numero d'onda, il quadri-impulso del fotone.

**Soluzione**

Utilizzando la conservazione energia-impulso e i prodotti scalari dei quadrivettori si può verificare che il processo di trasformazione di un singolo fotone in una coppia elettrone-positrone è cinematicamente proibito.
Dalla conservazione di energia-impulso si ha $K = P_1 + P_2$. Quindi quadrando entrambi i termini si ha

$$K^2 \;=\; 0 \;=\; (P_1 + P_2)^2 \;=\; P_1^2 + 2P_1 \cdot P_2 + P_2^2 \;=\; m_0^2 c^2 + 2\left(\frac{E_1 E_2}{c^2} - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2\right) + m_0^2 c^2$$

che implica

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \;=\; m_0^2 c^2 + \frac{E_1}{c}\frac{E_2}{c}$$

Ma questo risultato è impossibile in quanto

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 \;=\; p^2 + m^2 c^2$$

che vale sempre, implica a sua volta che per particelle dotate di massa valgano $p_1 < E_1/c$ e $p_2 < E_2/c$.
Ciò significa infine che il processo è proibito come conseguenza della validità della relatività speciale.