Introduzione alla Fisica Nucleare e Subnucleare. Prova scritta _ 30, 01, 2020

Esercizio 1

Si ha un nucleo pesante di massa M^*, inizialmente a riposo nel sistema di riferimento del Laboratorio, che si diseccita verso lo stato fondamentale di massa M emettendo un fotone γ.
Si determini in seconda approssimazione l'energia E_γ del fotone.
Si immagini una possibile tecnica per sopprimere quasi totalmente lo shift δE_γ in energia dovuto alla conservazione dell'impulso.

Soluzione esercizio 1

Si indica con ϵ la differenza in energia tra i livelli energetici fondamentale ed eccitato del nucleo, per cui:

$$M^* c^2 = Mc^2 + \epsilon \tag{1}$$

Si supponga ragionevolmente che sia

$$\frac{\epsilon}{Mc^2} \ll 1 \tag{2}$$

(Tipicamente le transizioni nucleari producono γ con energie dell'ordine $0.1 \div 1$ MeV).
Si ha quindi

$$Mc^2 + \epsilon = E_\gamma + \sqrt{M^2 c^4 + E_\gamma^2} \simeq E_\gamma + Mc^2 + \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} \tag{3}$$

Si assume inoltre che sia ragionevolmente $\epsilon \approx E_\gamma$, per cui

$$E_\gamma \simeq \epsilon - \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} \simeq \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2Mc^2} = \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2Mc^2}\right) \tag{4}$$

L'energia E_γ del fotone è quindi minore di ϵ di una frazione $\delta E_\gamma = \epsilon/2Mc^2$, a causa dell'energia di rinculo del nucleo.

Aumentando M si riduce il termine $\epsilon/2Mc^2$ e quindi la frazione di energia di rinculo trasportata dal nucleo. Un modo per aumentare M è avere l'atomo col nucleo di massa M inglobato in un reticolo cristallino con energia di legame dello stesso nel reticolo maggiore di $\epsilon^2/2Mc^2$. In tal modo la massa efficace che dovrebbe rinculare contro l'emissione del γ sarebbe praticamente tutta quella macroscopica del cristallo in cui è inglobato il nucleo che sta per decadere γ (Effetto Mossbauer).

Esercizio 2

Un mesone π^+ decade tramite la reazione $\pi^+ \to \mu^+\bar{\nu}_\mu$.
1) Calcolare l'energia e il momento del muone nel sistema di riferimento del pione a riposo.
2) Calcolare l'energia massima e minima del muone se il pione decade in volo con una energia di 1 TeV.
($m_{\pi^\pm} = 139$ MeV, $m_{\mu^\pm} = 106$ MeV, and $m_\nu = 0$.)

Soluzione esercizio 2

1) Combinando le informazioni: $m_{\pi^\pm} = E_\nu + E_\mu$, $E_\nu = p_\nu$ e $\vec{p_\nu} = -\vec{p_\mu}$ si ottiene:

$E_\mu^2 - |\vec{p_\mu}|^2 - 2(E_\mu m_{\pi^\pm} + m_\pi^2) = 0 \to m_\mu^2 + m_\pi^2 = 2E_\mu m_{\pi^\pm} \to E_\mu = \frac{m_\mu^2 + m_\pi^2}{2m_\pi}$ $= 111$ MeV.

$|\vec{p_\mu}|^2 = (\frac{m_\mu^2+m_\pi^2}{2m_\pi})^2 - m_\mu^2 = \frac{m_\pi}{2}(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}) = 29{,}1$ MeV.

2) L'energia nel sistema di riferimento del pione in volo si ricava dalla trasformazione di Lorentz $E' = \gamma(E + \beta p cos\theta)$, dove θ e' l'angolo tra la direzione del pione e quella del muone. L'energia massima (minima) si trova per valori di E' tali per cui $cos\theta = \pm 1$, ovvero muone parallelo (antiparallelo) alla direzione di volo del pione. Inserendo le espressioni ottenute al punto precedente si ottiene:

$E_{min}^{max} = \frac{\gamma m_\pi}{2}(1 + \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2} \pm \beta(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}))$

Inserendo i valori numerici $\gamma \approx 7200$, $\beta \approx 1$, si ottiene:

$E^{max} \approx \gamma m_\pi = E_\pi$, $E^{min} \approx 0.58 E_\pi$.

Esercizio 3

Un fascio di elettroni di 23 MeV passa attraverso una lastra di metallo di 0.2 cm di spessore. Nel passare attraverso il metallo gli elettroni perdono in media il 10.75% della loro energia per radiazione di frenamento.
1) Di quale dei metalli indicati in tabella è composta la lastra?

Tabella

Materiale	Densità (g/cm^3)	Z	LR (g/cm^2)
Al	2.7	13	24.01
Fe	7.87	26	13.84
Cu	8.92	29	12.86
Pb	11.4	82	6.37

2) Tenendo conto che vi è anche una perdita di energia dovuta alla collisione con gli elettroni atomici, è possibile valutare, perlomeno approssimativamente, l'energia media totale persa dagli elettroni nell'attraversare la lastra?
3) Qualora la lastra fosse investita da muoni, quale energia dovrebbero possedere i muoni per avere la stessa perdita di energia media per radiazione di frenamento degli elettroni?

Soluzione esercizio 3

1) Siccome

$$E(x) = E_0 e^{\frac{-x}{L_R}}$$

ne viene che

$$E(x)/E_0 = e^{\frac{-x}{L_R}} = 1 - 0.1075 = 0.8925$$

da cui, essendo x=0.2 cm

$$0.2/L_R = -ln(0.8925) = 0.1137$$

Dobbiamo pertanto verificare per quale metallo 0.2 cm corrispondono all' 11.37% della lunghezza di radiazione. Calcoliamo L_R in cm:

$$L_R(cm) = L_R\ (g/cm^2)/\rho\ (g/cm^3)$$

$$L_R(cm) = 8.88(Al), 1.7586(Fe), 1.44(Cu), 0.59(Pb)$$

e infine

$$0.2cm/L_R(cm) = 0.022(Al), 0.1137(Fe), 0.139(Cu), 0.358(Pb)$$

Pertanto il materiale in questione è il ferro.
2) Proviamo a valutare se l'energia in gioco è superiore o inferiore a quella

critica. Sappiamo che $E_c \sim 600/Z$ MeV, per cui $E_c \sim 600/26 = 23.1\ MeV$. Siccome l'energia degli elettroni corrisponde proprio con quella critica, ne viene che la perdita totale di energia sarà il doppio di quella media per radiazione:

$$\Delta E = \Delta E_{coll} + \Delta E_{Bremm}$$

$$\Delta E_{Bremm} = 23 * 0.1075 MeV = 2.4725\ MeV$$

e infine

$$\Delta E = 4.945\ MeV$$

è l'energia media persa da un elettrone nel passare attraverso la lastra.

3) Siccome $\left(\frac{dE}{dX}\right)_{rad} \propto E/M^2$ con E ed M rispettivamente l'energia e la massa della particella in questione, ne viene che sarà

$$\frac{dE}{dX}_{\mu} = \frac{dE}{dX}_{e}$$

quando

$$E_\mu = E_e \times (M_\mu/m_e)^2$$

ovvero per

$$E_\mu = E_e \times 42705 = 982\ GeV$$