

ESERCIZI DI GEOMETRIA 2 - FOGLIO 8

- (1) Si considerino le due coniche piane proiettive in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ di equazioni:

$$\mathcal{C} : 2x_0^2 - x_1^2 = 0, \quad \mathcal{D} : x_1^2 - 3x_2^2 = 0.$$

Si verifichi che le due coniche sono proiettivamente equivalenti e si determini una proiettività

$$f : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$$

tale che $f(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.

- (2) Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ la conica proiettiva di equazione

$$x_0^2 + 4x_0x_1 + 5x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 0.$$

Si determini la forma canonica \mathcal{D} di \mathcal{C} e una proiettività f tale che $f(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.

- (3) Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ la conica proiettiva di equazione

$$x_0^2 + 4x_0x_1 - x_0x_2 = 0.$$

Si determini la forma canonica \mathcal{D} di \mathcal{C} e una proiettività f tale che $f(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.

- (4) Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ la conica proiettiva di equazione

$$2x_0^2 + x_1^2 - x_2 - x_0x_2 + 2x_1x_2 = 0.$$

Si determini la forma canonica \mathcal{D} di \mathcal{C} e una proiettività f tale che $f(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.

- (5) (*)

- Si consideri una retta doppia (conica doppiamente degenere) proiettiva di equazione

$$(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2)^2 = 0.$$

Si scriva la matrice simmetrica associata e si verifichi che ha rango 1.

- Sia $A \in M(3 \times 3, K)$ una matrice simmetrica di rango 1. Si dimostri che A è proporzionale ad una matrice di una retta doppia.

Suggerimento: Se A ha rango 1, esiste un'entrata $a_{kl} \neq 0$ in A . Si consideri la matrice $a_{kl} A$ e si usi il fatto che $\text{rk } A = 1$.