SUPERFICI ed INTEGRALI di SUPERFICIE

Sia A un aperto e connesso di $\mathbb{R}^2$ e sia T un insieme t.c.
$A \subseteq T \subseteq \bar{A}$ $(\mathring{T} = A)$

Consid. $r: T \to \mathbb{R}^3$ una funzione continua e sia $\Sigma = r(T)$.
(Σ è dunque un insieme connesso), r è una parametrizzazione di Σ

Def: Si dice superficie in $\mathbb{R}^3$ una coppia (Σ, r) dove Σ è un insieme di $\mathbb{R}^3$ e r è la sua parametrizzazione.

- Σ sostegno
- r è la parametrizzazione.
  $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

Per eliminare situazioni "patologiche", ad esempio superfici che si riducono ad un punto $r(u,v) = r_0$, aggiungiamo delle condizioni.

Def: ① Sia Σ una superficie di classe C^1 (cioè $r \in C^1(T)$) di equazione $r = r(u,v)$ con $(u,v) \in T$. Allora un punto $p = r(u_0,v_0)$ con $(u_0,v_0) \in \mathring{T}$ si dice regolare se la la matrice jacobiana

$$\begin{array}{c} r_u \to \\ r_v \to \end{array} \begin{pmatrix} x_u(u_0,v_0), & y_u(u_0,v_0), & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0), & y_v(u_0,v_0), & z_v(u_0,v_0) \end{pmatrix}$$

| o equiv r_u e r_v sono lin. indip. o $r_u \times r_v \neq 0$.

ha rango 2. Altrimenti il punto si dice singolare.
La superficie Σ si dice regolare se è di classe C^1 e se per ogni $(u,v) \in \mathring{T}$, $r(u,v)$ è punto regolare

② Sia $r: T \to \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione di una superficie Σ allora se r ristretta a $\mathring{T}$ è iniettiva, allora la superficie si dice semplice.

Significato geometrico def ①: se p è un punto regolare, allora in un intorno di p, la superficie ammette una rappresentazione cartesiana
(→ Conseguenza del teorema di inversione locale)

Supp che $(x_u y_v - x_v y_u)(u_0,v_0) \neq 0$
$f: (u,v) \to (x(u,v), y(u,v))$

Teorema di inversione locale
Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, A aperto. Se
i) $f \in C^1(A)$
ii) $x_0 \in A$ tale che $J_f(x_0)$ è non singolare

allora esistono un intorno V di x_0 e un intorno W di $y = f(x_0)$ tali che

a) f è una corrispondenza biunivoca tra V e W

b) detta $g : W \to V$ la funzione inversa di f, $g \in C^1(W)$ e a $x = g(y)$ vale $J_g(y) = (J_f(x))^{-1}$

Def: 3 Sia $f : T \to \mathbb{R}$ una funzione continua con $T \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e connesso. Allora

$$x(x,y) = (x, y, f(x,y))$$

è una superficie cartesiana e Σ = grafico di f

Se f è di classe C^1 allora la jacobiana (dalla definizione di curva regolare) ha la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{pmatrix}$$ che ha sempre rango 2.

4 Sia $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(A)$ e sia $\Sigma = L_0(F) = \{(x,y,z) : F(x,y,z) = 0\}$ $(\neq \emptyset)$.

Supponiamo inoltre che $\forall (x,y,z) \in \Sigma$ si abbia $\nabla F(x,y,z) \neq \underset{\text{vett.}}{0}$ allora in questo caso la coppia (F, Σ) si dice superficie regolare in forma implicita

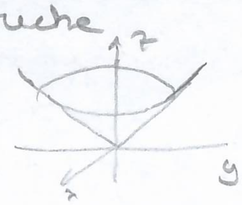
Come conseguenza del teorema della funzione implicita si ha che localmente Σ coincide con il grafico di una funzione di due variabili (cioè localm. è una superficie cartesiana)

es. se $\partial_z F(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \Rightarrow$ allora localm. Σ è grafico di $z = g(x,y)$. $(x,y) \in U_{(x_0,y_0)}$, $z \in U_{z_0}$.

I punti in cui $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = 0$ si dicono punti singolari

Esempio: Consideriamo il cono circolare retto di vertice l'origine

$x: [0,x] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche



$$\begin{cases} x(u,v) = u\cos v \\ y(u,v) = u\sin v \\ z(u,v) = ku \end{cases} \qquad T = [0,x] \times [0,2\pi]$$

$k \neq 0$

- Vediamo se è semplice: se (u_1,v_1) e (u_2,v_2) sono due punti distinti di $\mathring{T}$ e $u_1 \neq u_2$ si ha che $x(u_1,v_1) \neq x(u_2,v_2)$ (dalla terza componente).
Mentre se $u_1 = u_2$ e $v_1 \neq v_2$ poiché $v_1, v_2 \in (0,2\pi)$ si ha che $(\cos v_1, \sin v_1) \neq (\cos v_2, \sin v_2)$ e quindi ancora risulta $x(u_1,v_1) \neq x(u_2,v_2)$.
Ma non è iniettiva su tutto T infatti
  - $\{0\} \times [0,2\pi] \longrightarrow$ origine di $\mathbb{R}^3$
  - $[0,x] \times \{0\}$, $[0,x] \times \{2\pi\}$ $\longrightarrow$ stesso segmento sul cono.

- Vediamo se è regolare

$x_u = (\cos v, \sin v, k) \qquad x_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)$

$x_u \times x_v = (-ku\cos v, -ku\sin v, u)$

$|x_u \times x_v| = \sqrt{k^2u^2\cos^2 v + k^2u^2\sin^2 v + u^2} = u\sqrt{k^2+1} > 0$

per (u,v) in $\mathring{T}$.

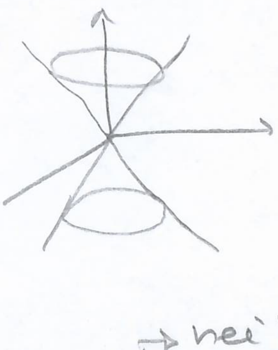
Se avessi usato la parametrizzazione "cartesiana"

$f: B(0,r) \to \mathbb{R}$
$(u,v) \longmapsto k\sqrt{u^2+v^2}$ non sarebbe una superficie regolare perché nell'origine non è derivabile.

$\to$ La proprietà di regolarità dipende dalla parametriz.

- Se estendo il dominio T di definizione posso considerare il cono a due falde

$x: [-x,x] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$



- la superficie non è semplice
  $\{0\} \times [0,2\pi] \longrightarrow$ origine di $\mathbb{R}^3$
  stesso sono punti interni ($\in \mathring{T}$)
- la superficie non è regolare $x_u \times x_v = 0$ nei pti $\{0\} \times [0,2\pi]$.

Def: • Data una superficie $x = x(u,v)$ considero le due curve di equazione

(L.C) $u \longmapsto x(u,\bar{v})$ ottenute considerando $v = \bar{v}$ costante

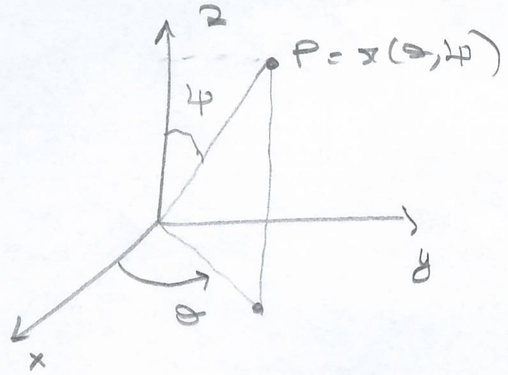
$v \longmapsto x(\bar{u},v)$ e $u = \bar{u}$ costante.

Queste due curve si chiamano linee coordinate sulla superficie (u,v sono coordinate locali).

Ad esempio per la sfera $\partial B_R(0)$

$$x(\theta,\varphi) = (R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi).$$

$$(\theta,\varphi) \in [0,2\pi] \times (0,\pi)$$



Le linee coordinate corrispondono a

- θ = costante meridiani
- φ = costante paralleli

• I vettori tangenti alle linee coordinate sono $x_u(u,v)$ e $x_v(u,v)$ → già introdotti prima (così definisco il piano tangente in un pto).

• Se Σ è una superficie regolare di eqz $x = x(u,v)$, il piano tangente in un punto $p_0 = x(u_0,v_0)$ ha equazione

$$\left(\xi - x(u_0,v_0), x_u(u_0,v_0) \times x_v(u_0,v_0)\right) = 0$$

con $\xi = (x,y,z)$ punto sul piano.

• Il vettore $x_u \times x_v$ è un vettore normale alla superficie e il versore corrispondente lo indichiamo con

$$n = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}$$

• Per superfici cartesiane di eqz $z = f(x,y)$, $f \in C^1(T)$
Il piano tg a Σ nel punto $(x_0, y_0, \underbrace{f(x_0,y_0)}_{=z_0})$ ha eqz: $(x-x_0)f_x(x-x_0) + (y-y_0)f_y(y-y_0) - (z-z_0) = 0$

$$n = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla g|^2}}(-g_x, -g_y, 1).$$

Introduciamo ora il concetto di superfici equivalenti

Sia Σ una superficie regolare di eqz.

$r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ $\quad (u,v) \in T \subseteq \mathbb{R}^2$

Considero un cambio di coordinate

$u = \varphi(s,t)$, $v = \psi(s,t)$ con $(s,t) \in S \subseteq \mathbb{R}^2$ e supp. $\varphi, \psi \in C^1(S)$

Supponiamo che

- $\varphi, \psi \in C^1(S)$
- $\phi : (s,t) \longrightarrow (\underbrace{\varphi(s,t)}_{u}, \underbrace{\psi(s,t)}_{v})$ abbia Jacobiano diverso da zero $\det(J\phi) \neq 0$ in $\mathring{S}$

$(T \leftrightarrow S) \rightarrow$ corrisp biunivoca

Definisco una nuova parametrizzazione per Σ

$\tilde{r}(s,t) = (\tilde{x}(s,t), \tilde{y}(s,t), \tilde{z}(s,t))$ dove

$$\begin{cases} \tilde{x}(s,t) = x(\varphi(s,t), \psi(s,t)) \\ \tilde{y}(s,t) = y(\varphi(s,t), \psi(s,t)) \\ \tilde{z}(s,t) = z(\varphi(s,t), \psi(s,t)) \end{cases}$$

$\tilde{r}_s \times \tilde{r}_t = (r_u \times r_v) \det J\phi$ $\quad (*)$

$\tilde{r}_s = r_u \cdot \partial_s \varphi + r_v \cdot \partial_s \psi$

$\tilde{r}_t = r_u \cdot \partial_t \varphi + r_v \cdot \partial_t \psi$

Def: Due parametrizzazioni r ed $\tilde{r}$ di una stessa superficie si dicono equivalenti se sono legate da un cambio di param. ϕ con determinante positivo $(\det J\phi(s,t) > 0)$.

Oss: Parametrizz. equivalenti preservano il verso e la direzione del vettore normale.

Superfici orientabili

Considero una superficie Σ regolare, posso definire il versore normale e voglio che partendo da un punto $p_0 \in \Sigma$ e seguendo una curva regolare e chiusa (che ritorna in p_0) sulla superficie, il versore normale vari con continuità e ritorni nella posizione iniziale

Def: Una superficie regolare Σ si dice orientabile, se per ogni curva continua e chiusa che giace sulla superficie, param. da $r : [a,b] \to \Sigma$ si abbia

$$n(r(b)) = n(r(a))$$

Esempio di superficie non orientabile, il nastro di Mobius.

$$x(\vartheta,t)=\left(2\cos\vartheta+t\cos\vartheta\cos\frac{\vartheta}{2},\ 2\sin\vartheta+t\sin\vartheta\cos\frac{\vartheta}{2},\ t\sin\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$T=[0,2\pi]\times(-1,1)$

$$x_\vartheta(\vartheta,0)=(-2\sin\vartheta,2\cos\vartheta,0)$$
$$x_t(\vartheta,0)=\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2},\ \sin\vartheta\cos\frac{\vartheta}{2},\ \sin\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$A \longleftrightarrow B'$

$B \longleftrightarrow A'$

$$x_\vartheta(\vartheta,0)\times x_t(\vartheta,0)=$$
$$=\left(2\cos\vartheta\sin\frac{\vartheta}{2},\ 2\sin\vartheta\sin\frac{\vartheta}{2},\ -2\cos\frac{\vartheta}{2}\right)$$

Considero il versore normale n in $p_0=x(0,0)=(2,0,0)$ e troviamo $n(0,0)=(0,0,-1)$.

Partendo da p_0 seguiamo la curva del meridiano centrale $t=0$

$x(\vartheta,0)$, $\vartheta\in[0,2\pi]$.

Facendo i conti trovo che

$$n(\vartheta,0)=\left(\cos\vartheta\sin\frac{\vartheta}{2},\ \sin\vartheta\sin\frac{\vartheta}{2},\ -\cos\frac{\vartheta}{2}\right)$$

Quando $\vartheta\to2\pi_-$ e quindi ritorno in p_0 trovo che

$n(\vartheta,0)\to(0,0,+1)=-n$ per $\vartheta\to2\pi_-$

Quindi lungo il meridiano centrale il versore normale ha cambiato verso.

Area di una superficie

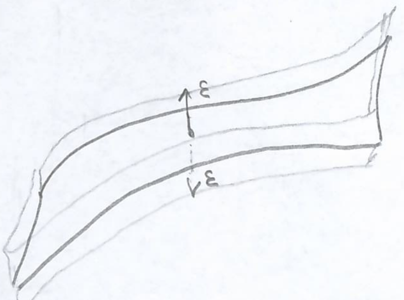
Consideriamo Σ una superficie regolare e semplice

$x:\bar{A}\to\mathbb{R}^3$ A aperto e connesso

e supponiamo che $x\in C^2(A)$

Come misuro l'area di Σ il sostegno di x?

Idea: "Approssimo" Σ con una piastra, cioè uno strato Σ_ε d'spessore 2ε ottenuto aggiungendo a ciascun punto di Σ i punti appartenenti alla retta normale a Σ in e che distano da essa non più di ε



$$\text{Volume}(\Sigma_\varepsilon)=2\varepsilon\cdot S_\varepsilon$$

spessore

approssim. dell'area di Σ di partenza

Approccio di Minkowski

Poniamo $n(u,v) = \dfrac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}$, otteniamo

$$\Sigma_\varepsilon = \{ x(u,v) + \varepsilon t\, n(u,v) : (u,v) \in \bar{A}, \quad t \in [-1,1] \}$$

Calcoliamo il volume di Σ_ε. Si può dimostrare che che, $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ t.c. $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ la funzione

$n \in C^1$ essendo $x \in C^2$.

$$\phi : \bar{A} \times [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u,v,t) \longmapsto x(u,v) + \varepsilon t\, n(u,v)$$

è iniettiva, inoltre è di classe C^1 poiché per ipotesi $x \in C^2$.

Calcoliamo il determinante della matrice Jacobiana

$$\det J\phi(u,v,t) = \det \begin{pmatrix} x_u(u,v) + \varepsilon t\, n_u(u,v) \\ x_v(u,v) + \varepsilon t\, n_v(u,v) \\ \varepsilon n(u,v) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \partial_u \\ \leftarrow \partial_v \\ \partial_t \end{array}$$

$$(*) \quad = \varepsilon \cdot \det(x_u(u,v), x_v(u,v), n(u,v)) + o(\varepsilon)$$

Inoltre poiché vale

$$\det(x_u(u,v), x_v(u,v), n(u,v)) = \frac{x_u(u,v) \times x_v(u,v)}{\|x_u(u,v) \times x_v(u,v)\|} \cdot \|x_u(u,v) \times x_v(u,v)\|$$

$$= \|x_u(u,v) \times x_v(u,v)\| \neq 0$$

Quindi se ε è suff piccolo $\det J\phi \neq 0$

$\rightarrow (u,v,t) \to (x(u,v,t), y(u,v,t), z(u,v,t))$

ϕ è un cambio di variabile quindi calcoliamo $Vol(\Sigma_\varepsilon)$ come segue

$$Vol(\Sigma_\varepsilon) = \iiint_{\Sigma_\varepsilon} 1 \cdot dx\,dy\,dz \overset{\text{cambio var.}}{=} \iiint_{\bar{A} \times [-1,1]} |\det J\phi(u,v,t)| \cdot du\,dv\,dt \overset{(*)}{=}$$

$$= \varepsilon \underbrace{\iiint_{\bar{A} \times [-1,1]} \|x_u(u,v) \times x_v(u,v)\|\, du\,dv\,dt}_{\text{non dipende da } t} + \iiint_{\bar{A} \times [-1,1]} o(\varepsilon)\, du\,dv\,dt =$$

$$= 2\varepsilon \iint_{\bar{A}} \|x_u(u,v) \times x_v(u,v)\|\, du\,dv + o(\varepsilon) \quad (\sim \varepsilon^2)$$

Per cui

$$S_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon} Vol(\Sigma_\varepsilon) = \iint_{\bar{A}} \|x_u(u,v) \times x_v(u,v)\|\, du\,dv + \frac{o(\varepsilon)}{2\varepsilon} \nearrow 0$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \iint_{\bar{A}} \|x_u(u,v) \times x_v(u,v)\|\, du\,dv$$

È ragionevole definire

$$\text{Area}(\Sigma) = \iint_{\overline{A}} \|r_u(u,v) \times r_v(u,v)\| \, du\, dv.$$

(Non intervengono più derivate seconde di r, basta richiedere r regolare).

Def: Sia Σ una superficie regolare e semplice d'equazione $r(u,v)$ con $(u,v) \in T$ con T aperto limitato

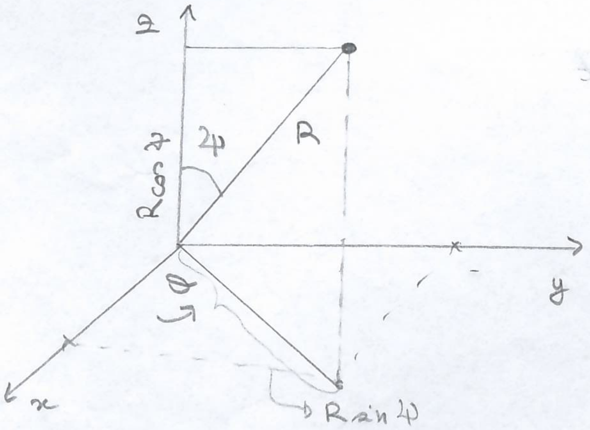
l'area di Σ è assegnata dalla seguente formula

$$\text{Area}(\Sigma) = \iint_T \|r_u(u,v) \times r_v(u,v)\| \, du\, dv.$$

dove $d\sigma = \|r_u \times r_v\| \, du\, dv$ è l'elemento d'area.

Es. La superficie sferica

$$r(\vartheta, \varphi) = (R \sin\varphi \cos\vartheta, R \sin\varphi \sin\vartheta, R\cos\varphi) \quad (\vartheta,\varphi) \in (0,2\pi)\times(0,\pi)$$



$$d\sigma = R^2 \sin\varphi \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$T = (0,2\pi)\times(0,\pi)$$

$$\sigma(\Sigma) = \iint_\Sigma d\sigma = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} R^2 \sin\varphi \, d\varphi = 4\pi R^2$$

Es. Cono a sezione circolare di altezza h

$$r(\vartheta, t) = (at\cos\vartheta, at\sin\vartheta, t) \quad (\vartheta,t) \in \underbrace{(0,2\pi)\times(0,h)}_{=T}$$

$$r_\vartheta = (-at\sin\vartheta, bt\cos\vartheta, 0)$$

$$r_t = (a\cos\vartheta, a\sin\vartheta, 1)$$

$$r_\vartheta \times r_t = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -at\sin\vartheta & at\cos\vartheta & 0 \\ a\cos\vartheta & a\sin\vartheta & 1 \end{vmatrix} = (at\cos(\vartheta), at\sin(\vartheta), -a^2 t)$$

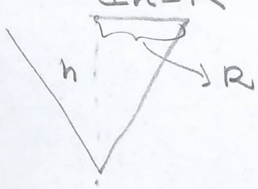
$$\|r_\vartheta \times r_t\| = \sqrt{a^2t^2\cos^2\vartheta + a^2t^2\sin^2\vartheta + a^4t^2} = at\sqrt{1+a^2}$$

$$\sigma(\Sigma) = \int_0^{2\pi}\int_0^h at\sqrt{1+a^2}\, dt \cdot d\vartheta = 2\pi a\sqrt{1+a^2}\,\frac{h^2}{2}$$

$$= \pi \frac{R}{h} h^2 \sqrt{1+\frac{R^2}{h^2}} =$$

$$= \pi R\sqrt{h^2+R^2}$$

$ah = R$

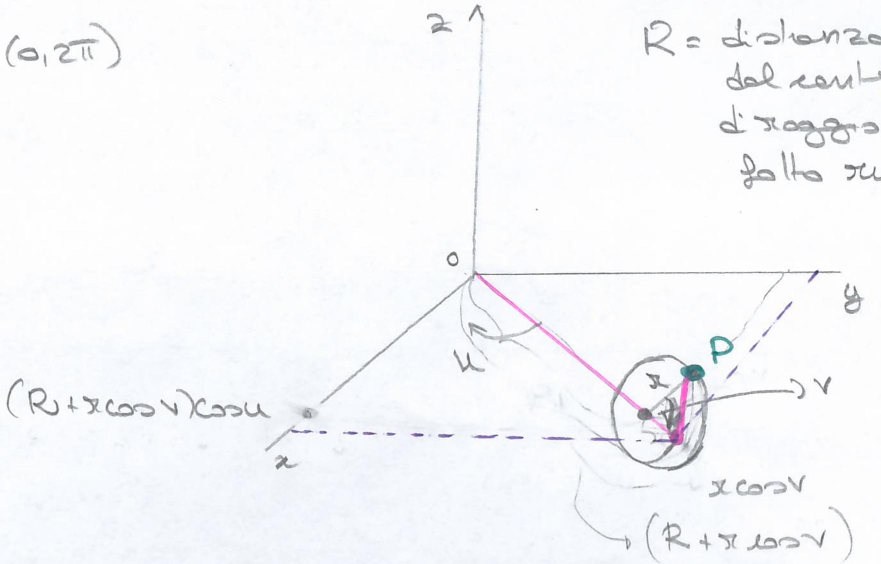


Es. Superficie toroidale

$r(u,v) = ((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v)$ $R > r$

$T = (0,2\pi) \times (0,2\pi)$

R = distanza dell'origine dal centro del disco di raggio r (che viene fatto ruotare)



$r_u = (-(R + r\cos v)\sin u, (R + r\cos v)\cos u, 0)$

$r_v = (-r\cos u \sin v, -r\sin u \cdot \sin v, r\cos u)$.

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -(R + \quad) & (\quad) & (\quad) \\ (\quad) & (\quad) & (\quad) \end{vmatrix} =$$

$= (r(R + r\cos v)\cos u \cos v, r(R + r\cos v)\sin u \cos v, r(R + r\cos v)\sin v$

$\|r_u \times r_v\| = |r(R + r\cos v)| = r\underbrace{(R + r\cos v)}_{>0 \text{ (poiché } R > r)}$

$$a(\Sigma) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} r(R + r\cos v) \right) du = 2\pi \int_0^{2\pi} (rR + r^2\cos v)\, dv$$

$= 4\pi R \cdot r$.

Oss: elemento d'area per

- superfici in forma cartesiana $r(x,y,g(x,y))$ con $g: T \to \mathbb{R}$

  $r_x = (1, 0, \partial_x g)$ $r_y = (0, 1, \partial_y g)$

  $r_x \wedge r_y = (-\partial_x g, -\partial_y g, 1)$ e quindi

  $|r_x \times r_y| = \sqrt{1 + (\partial_x g)^2 + (\partial_y g)^2} = \sqrt{1 + |\nabla g|^2}$ pmd

  $a(\Sigma) = \iint_T \sqrt{1 + |\nabla g|^2}$

- superfici regolari in forma implicita $F(x,y,z) = 0$

  Supponiamo che per $(x,y,z) \in L_0$ si abbia $\partial_z F \neq 0$ allora localmente per il teorema della fz implicita

$z=f(x,y)$ e per cui si ha

$$\partial_x f(x,y) = -\frac{\partial_x F(x,y,f(x,y))}{\partial_z F(x,y,f(x,y))} \qquad \partial_y f(x,y) = -\frac{\partial_y F(x,y,f(x,y))}{\partial_z F(x,y,f(x,y))}$$

allora $d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial_x F}{\partial_z F}\right)^2+\left(\frac{\partial_y F}{\partial_z F}\right)^2} = \frac{|\nabla F|}{|\partial_z F|}\,dx\,dy$

Area per superfici di rotazione.

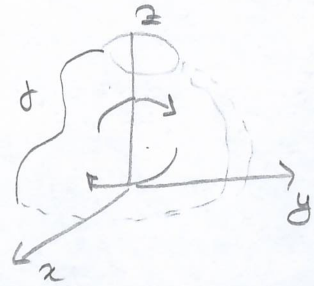
Cons. una curva piana γ ad esempio contenuta nel piano (x,z) qnd di eqz $y=0$. Supponiamo che γ abbia equazione parametrica

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto (x(t); z(t))$$

Se si fa ruotare γ attorno all'asse z si ottiene la superficie di equazione

$$x(\vartheta,t) = (x(t)\cos\vartheta,\ y(t)\sin\vartheta,\ z(t))$$

$$T = (0,2\pi)\times[a,b]$$



Teorema (Secondo teorema di Pappo - Guldino).

Sia γ come sopra e supponiamo che $x(t)>0 \ \forall t\in[a,b]$.

Allora si ha che

$$a(\Sigma) = 2\pi \int_\gamma x = 2\pi\, x_B \cdot \ell(\gamma)$$

dove x_B è l'ascissa del baricentro (centroide) della curva.

dim: calcoliamo i vettori tangenti

$$x_\vartheta = (-x(t)\sin\vartheta,\ y(t)\cos\vartheta,\ 0)$$

$$x_t = (x'(t)\cos\vartheta,\ x'(t)\sin\vartheta,\ z'(t))$$

$$x_t \times x_\vartheta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x'(t)\cos\vartheta & x'(t)\sin\vartheta & z'(t) \\ -x(t)\sin\vartheta & x(t)\cos\vartheta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (z'(t)x(t)\cos\vartheta,\ -z'(t)x(t)\sin\vartheta,\ x'(t)x(t))$$

$$\|x_t\times x_\vartheta\| = \sqrt{x(t)^2 z'(t)^2 + x'(t)^2 x(t)^2} \overset{x(t)>0}{=}$$

$$= x(t)\sqrt{z'(t)^2+x'(t)^2} = x(t)\,\|\gamma'(t)\|$$

$$a(\Sigma) = \iint_T x(t) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt \, d\theta = 2\pi \int_a^b x(t) \|\gamma'(t)\| \, dt = 2\pi \int_\gamma x$$

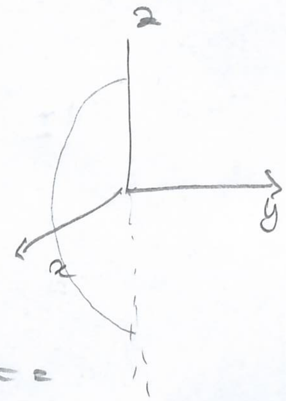
integr curv di prima specie

$$= 2\pi \, \ell(\gamma) \cdot \frac{\int_a^b x(t) \|\gamma'(t)\|}{\ell(\gamma)} = 2\pi \, \ell(\gamma) \, x_B.$$

Es. Area della sfera con il teorema di Pappo Guldino

Vedo la sfera come la superficie generata dalla rotazione di una semicirconferenza attorno l'asse z

$$\gamma(t) = (\underbrace{R\cos t}_{>0}, R\sin t) \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$



$$\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = R$$

$$a(\Sigma) = 2\pi \int_a^b x(t) \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R\cos t \cdot R \, dt =$$

$$= 4\pi R^2$$

Es. Area del toro con il teorema di Pappo-Guldino.

Vedo il toro come una superficie generata dalla rotazione della curva γ attorno l'asse z

$$\begin{cases} x(t) = (R + r\cos t) \\ z(t) = r\sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\|\gamma'(t)\| = r \qquad \ell(\gamma) = 2\pi r$$

$$x_B = \frac{\int_0^{2\pi} (R + r\cos t) \cdot r \, dt}{2\pi r} = \frac{2\pi r \cdot R}{2\pi r} = R$$

Da cui ritrovo $a(\Sigma) = 2\pi \cdot x_B \cdot \ell(\gamma) = 4\pi^2 R r$.

Def: Sia $h = h(x,y,z)$ t.c. $: \Omega \to \mathbb{R}$ continua e tale che $\Sigma \subset \Omega$ dove Σ è il sostegno di una superficie regolare semplice allora si definisce l'integrale di superficie di h su Σ

$$\iint_\Sigma h \, d\sigma = \iint_T h(r(u,v)) \, \|r_u \times r_v\| \, du \, dv$$

Oss: L'integrale di superficie è invariante per cambi regolari di parametrizzazione e non dipende dall'orientazione di Σ

Usando le notazioni introdotte precedentemente

$$\iint_T h(r(u,v)) \, \|r_u \times r_v\| \, du \, dv =$$

$$= \iint_S h(\bar{x}(s,t)) \underbrace{\|\bar{x}_s \times \bar{x}_t\| \, |\det J\phi^{-1}|}_{\|\bar{x}_u \times \bar{x}_v\|} \underbrace{|\det J\phi|}_{\text{cambio di variab.}} \, ds\, dt$$

Applicazioni fisiche e geometriche

- Sia Σ una superficie regolare e semplice e sia $\rho = \rho(x,y,z)$ la densità superficiale di massa distribuita su Σ, l'integrale

$$m = \int_\Sigma \rho \, d\sigma$$ rappresenta la massa totale e

$$x_B = \frac{1}{m} \iint_\Sigma x \cdot \rho \, d\sigma$$

$$y_B = \frac{1}{m} \iint_\Sigma y \cdot \rho \, d\sigma$$

$$z_B = \frac{1}{m} \iint_\Sigma z \rho \, d\sigma$$

$\rightarrow$ coordinate del baricentro della distribuzione di massa.

- Sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$
$(x,y,z) \longmapsto (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$

e sia Σ una sup. reg. sempl. e orientabile.
Se n è il versore normale alla superficie, il flusso F attraverso Σ nella direzione n è dato dalla formula

$$\iint_\Sigma (F \cdot n) \, d\sigma$$

(il flusso cambia segno se cambia il segno di n, cioè l'orientazione di Σ).