Note di Istituzioni di Geometria Superiore 3

24 maggio 2018

Indice

1 Dimensione di Intersezioni con Ipersuperfici

Teorema 0.1. *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una varietà affine e sia $V(f) \subseteq \mathbb{A}^n$ ipersuperficie irriducibile. Se $X \cap V(f) \neq \emptyset$ e $X \not\subseteq V(f)$, allora* $\dim(X \cap V(f)) = \dim(X) - 1$.

Dimostrazione. Per il Lemma di normalizzazione di Noether esiste $\pi\colon X \to \mathbb{A}^k$ morfismo finito e suriettivo. Ciò significa che il suo pull-back

$$\pi^*\colon A(\mathbb{A}^k) \longrightarrow A(X)$$
$$\mathbb{K}[y_1, \ldots, y_k] \longrightarrow \frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{I(X)}$$

è un omomorfismo iniettivo, quindi possiamo identificare $K[y_1, \ldots, y_k]$ con la sua immagine $\pi^*\mathbb{K}[y_1, \ldots, y_k] \cong \mathbb{K}[\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k]$.
Consideriamo ora la classe $\bar{f} \in A(X)$ del polinomio f. Siccome $V(f) \not\supset X$ per ipotesi, si ha $\bar{f} \neq 0$ in $A(X)$. Dato che π è finito, f è intero su $\mathbb{K}[\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k]$:

$$\exists\, a_i \in \mathbb{K}[\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k] \quad | \quad f^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k)\bar{f}^i = 0 \text{ in } A(X).$$

Poniamo:

$$H(z_1, \ldots, z_{k+1}) := z_{k+1}^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i(z_1, \ldots, z_k) z_{k+1}^i;$$

possiamo supporre che H sia irriducibile
Consideriamo ora la mappa φ così definita:

$$\varphi = (\pi, f) : X \to \mathbb{A}^{k+1}, \qquad \varphi(p_1, \ldots, p_n) = (p_1, \ldots, p_k, f(p_1, \ldots, p_n)).$$

Osserviamo che $\varphi = (\pi, F)$ è un morfismo in quanto le sue componenti sono regolari. Inoltre possiamo fattorizzare π nel seguente modo:

$$\begin{tikzcd} \varphi\colon & X \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{A}^{k+1} \arrow[dl, "p_k"] \\ & \mathbb{A}^k, & \end{tikzcd}$$

dove p_k è la proiezione sulle prime k coordinate. Il morfismo φ è finito, in quanto π è finito e $\pi = p_k \circ \varphi$. Quindi φ è chiuso, perciò $\varphi(X)$ è un chiuso irriducibile in $\mathbb{A}^{k+1}$ e

$$\dim(\varphi(X)) = \dim(X) = k.$$

Affermiamo ora che $\varphi(X) = V(H)$. L'inclusione $\varphi(X) \subseteq V(H)$ si verifica facilmente; infatti:

$$(p_1, \ldots, p_k, f(p_1, \ldots, p_n)) \in \varphi(X), \text{ con } (p_1, \ldots, p_n) \in X$$

si ha che:

$$H(p_1, \ldots, p_k, f(p_1, \ldots, p_n)) = f(p_1, \ldots, p_n)^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i(p_1, \ldots, p_k) f(p_1, \ldots, p_n)^i =$$

$$= H(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k, \bar{f})(P) = 0.$$

D'altra parte $\varphi(X)$ e $V(H)$ sono chiusi e irriducibili e $\dim(\varphi(X)) = \dim(V(H)) = k$, perché $V(H) \subset \mathbb{A}^{k+1}$ è un'ipersuperficie. Allora necessariamente $\varphi(X) = V(H)$.
Determiniamo ora l'immagine tramite φ dell'intersezione $X \cap V(F)$:

$$\begin{aligned} X \cap V(F) = \{(p_1, \ldots, p_n) \in X |\, f(p_1, \ldots, p_n) = 0\} &\xrightarrow{\varphi} \{(p_1, \ldots, p_k, 0)\} \\ = \varphi^{-1}(V(H) \cap V(z_{k+1})) & \end{aligned}$$

L'intersezione $V(H) \cap V(z_{k+1})$ è data da:

$$\begin{cases} H = z_{k+1}^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i(z_1, \ldots, z_k) z_{k+1}^i = 0 \\ z_{k+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a_0(z_1, \ldots, z_k) = 0$$

Notiamo esplicitamente che il polinomio a_0 non è nullo perché H è irriducibile, e non può essere nemmeno il polinomio costante in quanto se lo fosse allora

$$V(a_0(z_1, \ldots, z_k)) = \emptyset \;\Rightarrow\; X \cap V(F) = \emptyset$$

ma, per ipotesi, tale intersezione non è vuota.

Allora possiamo scrivere $X \cap V(F)$ come:

$$\begin{aligned} X \cap V(F) &= \varphi^{-1}(V(H) \cap V(x_{k+1})) = \\ &= \varphi^{-1}(\underbrace{V(a_0(x_1, \ldots, x_k)) \times \{0\}}_{\subseteq \mathbb{A}^k \times \{0\}}) \end{aligned}$$

Ma $V(a_0(x_1, \ldots, x_k)) \times \{0\} \cong V(a_0(x_1, \ldots, x_k))$ e quindi ha dimensione $k-1$, dato che $V(a_0(x_1, \ldots, x_k))$ è un'ipersuperficie di $\mathbb{A}^k$. Poiché φ è finito, anche

$$\dim(X \cap V(F)) = k - 1 = \dim(X) - 1.$$

□

Ricordiamo ora che se X è irriducibile non è detto che l'intersezione con un'ipersuperficie $X \cap V(f)$ sia ancora irriducibile, quindi il teorema 0.1 ci assicura che c'e' almeno una componente irriducibile di $X \cap V(f)$ di dimensione $\dim X - 1$. Infatti, abbiamo la seguente:

Proposizione 1. *Sia $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ un chiuso riducibile, allora*

$$\dim(Y) = max\{\dim(Y_i) |\, Y_i \textit{ componente irriducibile di } Y\}.$$

Dimostrazione. Scriviamo Y come unione delle sue componenti irriducibili

$$Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r, \;\text{ con } Y_i \nsubseteq Y_j.$$

Poiché $Y_i \subseteq Y$, $\forall i$, la disuguaglianza $(\geq)$ è verificata.
Viceversa sia

$$Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_k$$

una catena di Y. Vogliamo dimostrare che questa è in realtà una catena di una qualche comoponente irriducibile di Y, cioè

$$\exists\, i|\ Z_k \subseteq Y_i.$$

Supponiamo, per assurdo, che non esista una tale componente allora abbiamo due casi: o Z_k contiene almeno una componente irriducibile Y_i di Y ma allora $Y_i = Z_k$ per unicità delle decomposizione di Y oppure Z_k non contiene nemmeno una componente irriducibile di Y. In tal caso avremo la decomposizione

$$Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r \cup Z_k$$

che contraddice l'unicità della decomposizione di Y. In conclusione ogni catena di Y è una catena di una sua componente irriducibile e quindi vale la disuguaglianza $(\leq)$. $\square$

In realtà, il seguente dimostrato mostra che tutte le componenti irriducibili di $X \cap V(f)$ hanno la stessa dimensione $\dim X - 1$.

Proposizione 2. *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso. Siano $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una varietà affine e $V(f) \subseteq \mathbb{A}^n$ un'ipersuperficie tale che $X \cap V(f) \neq \emptyset$ e $X \nsubseteq V(f)$. Allora, per ogni componente irriducibile Z di $X \cap V(f)$, si ha:*

$$\dim(Z) = \dim(X) - 1.$$

Dimostrazione. Decomponiamo $X \cap V(f)$ nelle sue componenti irriducibili, cioè

$$X \cap V(f) = Z \cup W_1 \cup \ldots \cup W_s \ \text{ con } Z, W_i \text{ componenti irriducibili.}$$

Denotiamo $W := \bigcup W_i$, sia $G \in I(W) \setminus I(Z)$, allora $W \subseteq V(G)$ ma $Z \nsubseteq V(G)$ e quindi $G \notin I(X)$. Perciò ha senso considerare $X_G = X \setminus V(G)$ aperto principale: X_G è isomorfo ad una varietà affine

$$X_G \cong V(I(X), x_{n+1}G - 1) = Y \ \text{ mediante } \ X_G \xrightarrow{\phi = (Id, \frac{1}{G})} \mathbb{A}^{n+1}$$

ed, in particolare, vale che $\dim(X_G) = \dim(Y)$. È immediato verificare che

$$\phi(X_G \cap V(f)) = Y \cap V(f),$$

dove $V(f) \subset \mathbb{A}^{n+1}$ è il cilindro sopra $V(f) \subset \mathbb{A}^n$.

Quindi si ha che

$$Y \cap V(f) \cong X_G \cap V(f) = X_G \cap Z$$

D'altra parte $\dim(Y \cap V(f)) = \dim(Y) - 1$ per il Teorema 0.1, e dal Teorema (**??**) si ha $\dim(X_G) = \dim(X)$, quindi si conclude che

$$\dim Z = \dim(X_G \cap Z) = \dim(X_G \cap V(f)) = \dim(X_G) - 1 = \dim(X) - 1.$$

$\square$

Osservazione 0.2. Tutti i risultati finora enunciati per il caso affine, valgono per varietà proiettive, infatti dal Teorema (**??**), possiamo studiare la dimensione di una varietà proiettiva X, lavorando su un suo aperto affine.

2 Dimensione delle fibre di un morfismo

Teorema 0.3. *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso. Siano X, Y varietà* ***qp*** *e sia $f\colon X \to Y$ un morfismo suriettivo. Allora si ha:*

1. *per ogni fibra $y \in Y$, $\dim(f^{-1}(y)) \geq \dim(X) - \dim(Y)$;*
2. *esiste un aperto non vuoto $U \subseteq Y$ t.c. $\forall y \in U,\ \dim(f^{-1}(y)) = \dim(X) - \dim(Y)$.*

Dimostrazione. Shafarevich, Igor R., Basic Algebraic Geometry 1, Varieties in Projective Space, Capitolo I, Sezione 6.3, Teorema 1.25. □

Corollario 1. *Valgono le seguenti:*

1. *Siano X, Y varietà* ***qp****, allora $\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y)$;*
2. *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva non vuota. Allora, detto $C(X)$ il cono affine di X, vale $\dim(C(X)) = \dim(X) + 1$.*

Dimostrazione.

1. Consideriamo la proiezione sulla prima componente:

$$p_1\colon X \times Y \longrightarrow X$$

Questo è un morfismo suriettivo con fibra isomorfa a Y. Le fibre sono irriducibili e di dimensione costante $\dim(Y)$, pertanto

$$\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y)$$

2. Sia $C(X) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ il cono affine sopra X e consideriamo $C(X) \setminus \{0\}$ aperto in $C(X)$. Possiamo considerare la proiezione

$$\begin{tikzcd} C(X) \setminus \{0\} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d] \\ X \arrow[r] & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

Ora $\forall x \in X$, la fibra $\pi^{-1}(x) \cong \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ è irriducibile e di dimensione 1. Allora si ha

$$\dim(C(X) \setminus \{0\}) = \dim(X) + 1.$$

Infine $C(X) \setminus \{0\}$ è aperto non vuoto di $C(X)$ e quindi hanno la stessa dimensione.

□

Un'importante conseguenza del Teorema sulla dimensione delle fibre è data dal seguente:

Teorema 0.4. *Siano $X \subseteq \mathbb{P}^n$ un chiuso proiettivo, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ una varietà proiettiva e sia $f\colon X \to Y$ un morfismo suriettivo tale che $\dim(f^{-1}(y)) = r$ e $f^{-1}(y)$ è irriducibile $\forall y \in Y$. Allora X è irriducibile.*

Dimostrazione. Scriviamo X come unione delle sue componenti irriducibili

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_s$$

Per il Teorema di completezza applicato ad ogni componente X_i, si ha che f è chiusa. In particolare $f(X_i) \subseteq Y$ è un chiuso $\forall i$ e $Y = \bigcup_{i=1}^s f(X_i)$. Essendo Y irriducibile si ha

$$Y = f(X_i) \text{ per qualche } i$$

e in questo caso la restrizione di f alla componente X_i

$$f_i := f_{|X_i} \colon X_i \longrightarrow Y$$

è ancora un morfismo suriettivo. Dunque dal Teorema precedente esiste un aperto denso $U_i \subseteq Y$ tale che

$$\dim(f_i^{-1}(y)) = r_i, \ \forall y \in U_i,$$

con

$$r_i = \dim(X_i) - \dim(Y).$$

Per gli indici j tali che $f(X_j) \neq Y$, poniamo

$$U_j = Y \setminus f(X_j).$$

Sia quindi $y \in \bigcap_{i=1}^s U_i$. Per ipotesi $f^{-1}(y)$ è irriducibile in X, quindi $f^{-1}(y) \subseteq X_i$ per qualche i, supponiamo $i = 1$, senza perdere di generalità. Ma allora segue che

$$f^{-1}(y) \subseteq f_1^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(y)$$

da cui

$$r_1 = \dim(f_1^{-1}(y)) \leq \dim(f^{-1}(y)) = r \leq r_1$$

e quindi $r = r_1$. D'altra parte se $y \notin \bigcap U_i$, poiché f_1 è suriettiva, la fibra sopra y non è vuota e vale l'inclusione

$$f_1^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(y)$$

quindi $\dim(f_1^{-1}(y)) \leq \dim(f^{-1}(y)) = r$. Inoltre, dal Teorema precedente,

$$\dim(f_1^{-1}(y)) \geq \dim(X_1) - \dim(Y) = r_1 = r$$

allora $\dim(f_1^{-1}(y)) = \dim(f^{-1}(y))$. Pertanto $f_1^{-1}(y) = f^{-1}(y)$, per ogni $y \in Y$, quindi $X = X_1$ ed è irriducibile. $\square$

Osservazione 0.5. Il teorema precedente implica, in particolare, l'irriducibilità del prodotto di varietà proiettive.

3 Dimensione di Intersezioni

Teorema 0.6 (Dimensione di intersezioni tra varietà affini)**.** *Siano* $X, Y \subseteq \mathbb{A}^n$ *varietà affini t.c.* $X \cap Y \neq \emptyset$*. Allora ogni componente irriducibile* Z *di* $X \cap Y$ *soddisfa*

$$\dim(Z) \geq \dim(X) + \dim(Y) - n$$

Dimostrazione. Sia $\Delta \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ la diagonale e sia

$$\begin{aligned} \delta \colon \mathbb{A}^n &\longrightarrow \Delta \\ P &\longmapsto (P, P) \end{aligned}$$

isomorfismo tra Δ e $\mathbb{A}^n$. Osserviamo che vale:

$$\delta(X \cap Y) = \Delta \cap (X \times Y)$$

e perciò $X \cap Y$ è isomorfo a $\Delta \cap (X \times Y)$ e dunque hanno la stessa dimensione. Ma $\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y)$ e

$$\Delta = V(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) = V(x_1 - y_1) \cap \ldots \cap V(x_n - y_n)$$

e quindi, intersecando con ogni iperpiano, la dimensione dell'intersezione può diminuire al più di 1. Pertanto si ottiene che:

$$\dim(X \cap Y) \geq \dim(X) + \dim(Y) - n$$

□

Teorema 0.7 (Dimensione di intersezioni tra varietà proiettive)**.** *Siano* $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n$ *varietà proiettive. Allora si ha:*

1. *Se* $X \cap Y \neq \emptyset$*, allora* $\forall Z \subseteq X \cap Y$ *componente irriducibile, vale*

$$\dim(Z) \geq \dim(X) + \dim(Y) - n;$$

2. *Se* $\dim(X) + \dim(Y) - n \geq 0$*, allora* $X \cap Y \neq \emptyset$*.*

Osserviamo che il punto (2) di questo Teorema non vale per le varietà affini, basti pensare a due rette parallele in $\mathbb{A}^2$.

Dimostrazione. 1. Consideriamo i coni affini $C(X), C(Y) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$. Questi sono ancora irriducibili e si può verificare facilmente che Z è una componente irriducibile di $X \cap Y$ se e solo se $C(Z)$ è una componente irriducibile di $C(X \cap Y) = C(X) \cap C(Y)$. Infine, poiché per ipotesi $X \cap Y \neq \emptyset$, allora anche $C(X) \cap C(Y) \neq \emptyset$. Ma allora siamo nelle ipotesi del Teorema (0.6), dunque:

$$\dim(C(Z)) \geq \dim(C(X)) + \dim(C(Y)) - (n + 1).$$

Ora, ricordando che, per ogni cono, vale $\dim(C(X)) = \dim(X) + 1$, si ottiene che

$$\dim(Z) \geq \dim(X) + \dim(Y) - n$$

e questo conclude la dimostrazione.

2. Supponiamo ora che valga $\dim(X) + \dim(Y) - n \geq 0$. Osserviamo che $0 \in C(X) \cap C(Y)$, quindi per il Teorema (0.6), per ogni componente irriducibile $S \subseteq C(X) \cap C(Y)$ si ha

$$\dim(S) \geq \dim(C(X)) + \dim(C(Y)) - (n+1).$$

Ma una componente irriducibile di $C(X) \cap C(Y)$ è necessariamente della forma cono sopra $S = C(Z)$, con Z irriducibile. Pertanto otteniamo:

$$\begin{aligned}\dim(C(Z)) &\geq \dim(C(X)) + \dim(C(Y)) - (n+1) = \\ &= \dim(X) + 1 + \dim(Y) + 1 - (n+1) \geq \\ &\geq \dim(X) + \dim(Y) - n + 1 \geq \\ &\geq 1\end{aligned}$$

e da ciò segue che $C(Z)$ contiene almeno un elemento non nullo e dunque

$$Z \subseteq X \cap Y \neq \emptyset.$$

$\square$

Corollario 2. $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \ncong \mathbb{P}^{n+m}$.

Dimostrazione. Supponiamo $m \geq n$. Se per assurdo $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \cong \mathbb{P}^{n+m}$, allora, in particolare si avrebbe che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^m &\cong \{P\} \times \mathbb{P}^m \xrightarrow{\cong} Z_1 \subseteq \mathbb{P}^{n+m} \\ \mathbb{P}^m &\cong \{Q\} \times \mathbb{P}^m \xrightarrow{\cong} Z_2 \subseteq \mathbb{P}^{n+m}\end{aligned}$$

e per il Teorema (0.7):

$$\dim(Z_1) + \dim(Z_2) - (n+m) = 2m - n - m \geq 0.$$

Ma allora dal secondo punto del Teorema (0.7) segue che $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$, nonostante

$$(\{P\} \times \mathbb{P}^m) \times (\{Q\} \times \mathbb{P}^m) = \emptyset.$$

$\square$