Ex. Consideriamo

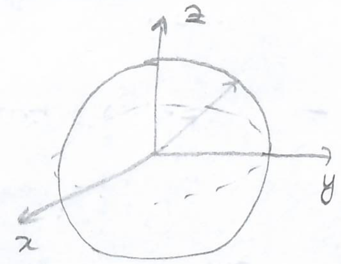
$F(x,y,z) = (z^3 \cdot x,\ z^3 \cdot y,\ y^4)$ e $\Sigma = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = R^2\}$

Vogliamo calcolare il flusso

$\iint_\Sigma (F \cdot n)\, d\sigma$ dove n è il versore normale che punta verso l'esterno

S_1 = calotta superiore

S_2 = calotta inferiore



• S_1

$r(x,y) = (x, y, \sqrt{R^2-x^2-y^2})$

$r_x = \left(1, 0, \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)$

$r_y = \left(0, 1, \frac{-2y}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)$

$r_x \times r_y = \left(+\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, +\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, 1\right)$ → ho il verso giusto basta ad esempio controllare per $x=y=0$ $z=R$ → polo nord $n=(0,0,1)$

$n = \frac{r_x \times r_y}{\|r_x \times r_y\|}$ $\quad n \cdot d\sigma = \frac{r_x \times r_y}{\|r_x \times r_y\|} \|r_x \times r_y\|\, dx\, dy$

$$\iint_{S_1} (F \cdot n)\, d\sigma = \iint_{\text{Disco } B(0,R)} \left((R^2-x^2-y^2)^{3/2} \cdot x \cdot \frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} + (R^2-x^2-y^2)^{3/2} \frac{y\, y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} + y^4 \right) dx\, dy$$

$$= \iint_{\text{Disco } B(0,R)} (R^2-x^2-y^2)[x^2+y^2] + y^4 = \int_0^R \int_0^{2\pi} (\_\_\_\_)\, \rho\, d\rho\, d\theta =$$

passo in coord. polari

• S_2

$r(x,y) = (x, y, -\sqrt{R^2-x^2-y^2})$

$r_x = \left(1, 0, x/\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)$

$r_y = \left(0, 1, y/\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)$

$r_x \times r_y = \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, 1\right)$ → ho il verso sbagliato perchè ad es in $x=y=0$ $z=-R$ si vede che punta verso l'interno $(0,0,1)$

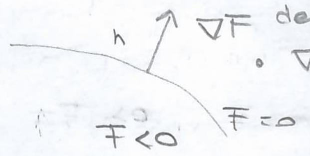
$$n = -\frac{(r_x \times r_y)}{\|r_x \times r_y\|} = \left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, -1\right)$$

$$\iint_{S_2} (F \cdot n)\, d\sigma = \iint_{\text{Disco}} -(R^2-x^2-y^2)^{3/2} \cdot \frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \cdot x - (R^2-x^2-y^2)^{3/2} \cdot \frac{y\, y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} - y^4 = -\iint_{S_1} (F \cdot n)\, d\sigma$$

L'obiettivo è fornire una generalizzazione a più variabili della formula di integrazione per parti.

Def: Un dominio limitato A di $\mathbb{R}^n$ si dice regolare se esiste una funzione $F(x)$ di classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ tale che

- $A = \{ x \in \mathbb{R}^n : F(x) < 0 \}$
- $\partial A = \{ x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0 \}$
- $\nabla F(x) \neq 0$ per ogni $x \in \partial A$



- F cresce lungo n (perché è negativo dentro e zero su ∂A)
- ∇F è la direzione di max crescita ed è ortogonale al piano tangente a $\partial A \Rightarrow$ sup. di livello.

$n = \nabla F / |\nabla F|$

Oss: La frontiera ∂A di A è una superficie regolare in forma implicita e $n(x) = \dfrac{\nabla F(x)}{\|\nabla F(x)\|}$ $\quad x \in \partial A$ è normale a ∂A ed è diretto verso l'esterno, $n(x)$ è il versore normale esterno a ∂A nel punto x

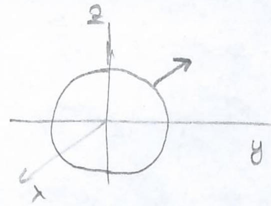
Es. $A = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|^2 \leq R^2 \} = B_R(0)$ $\qquad F(x) = \|x\|^2 - R^2$

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2$$

$$\nabla F(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2, 2x_3)$$

$$\|\nabla F(x_1, x_2, x_3)\|^2 = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 = 4R^2$$

$$n = \frac{(x_1, x_2, x_3)}{R}$$



Teorema (della divergenza, o di Gauss Green)

Sia A un dominio limitato regolare e sia $\omega(x) = (\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x))$ un campo vettoriale di classe $C^1(B)$ dove B è un aperto contenente $\bar{A}$.
Allora

$$\int_A \operatorname{div} \omega(x)\, dx = \underbrace{\int_{\partial A} (\omega \cdot n)\, d\sigma}$$

Oss: L'integrale a secondo membro è un integrale su una superficie $n-1$ dimensionale. Noi conosciamo solo i casi:

- $n=2$ $\quad \int_{\partial A} (\omega \cdot n)\, d\sigma$ è un integrale curvilineo (di prima specie).
- $n=3$ $\quad \int_{\partial A} (\omega \cdot n)\, d\sigma$ " " " di superficie.

Corollario (Formule di Gauss-Green)

Siano $u, v \in C^2(B)$ allora

① $\int_A \Delta u \cdot v = \int_{\partial A} \partial_n u \cdot v \, d\sigma - \int_A (\nabla u, \nabla v)$

② $\int_A \Delta v \cdot u = \int_{\partial A} \partial_n u \cdot v \, d\sigma - \int_A (\nabla u, \nabla v)$.

dim: Vediamo la ① per $n=3$

Definisco $h(x) = (\partial_{x_1} u \cdot v, \partial_{x_2} u \cdot v, \partial_{x_3} u \cdot v)$ campo vett. di classe C^1

$$\operatorname{div} h = \partial_{x_1}(\partial_{x_1} u \cdot v) + \partial_{x_2}(\partial_{x_2} u \cdot v) + \partial_{x_3}(\partial_{x_3} u \cdot v) =$$

$$= \underline{\partial^2_{x_1} u \cdot v} + \partial_{x_1} u \cdot \partial_{x_1} v + \underline{\partial^2_{x_2} u \cdot v} + \partial_{x_2} u \cdot \partial_{x_2} v +$$

$$+ \underline{\partial^2_{x_3} u \cdot v} + \partial_{x_3} u \cdot \partial_{x_3} v = \underline{\Delta u \cdot v} + \nabla u \cdot \nabla v \qquad (*)$$

Allora per il teorema della divergenza

$$= \int_{\partial A} h \cdot n = \int_{\partial A} (\underset{\overset{\parallel}{(\partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u, \partial_{x_3} u)}}{\nabla u} \cdot n) \cdot v \, d\sigma = \int_{\partial A} \partial_n u \cdot v \, d\sigma$$

teo div

$$= \int_A \operatorname{div} h \overset{(*)}{=} \int_A \Delta u \, v + \int_A \nabla u \cdot \nabla v .$$

La ② si fa in maniera analoga. ∎

Applicazioni

$\Delta u = f$ eqz di Poisson

Cons: $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } A \\ u = 0 & \text{su } \partial A \end{cases}$ equazione di Laplace (o di Poisson omogenea)

($\Delta u = 0$ in A si dice che u è armonica in A).

Non esistono funzioni diverse dalla funz identic nulla che verificano (P).

dim: Supp. p.a. che esista una u non ident nulla che verifichi (P).

Allora per ① con $u = v$ si ha che

$$0 = \int_A \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\Delta u} \cdot u = \underbrace{\int_{\partial A} \partial_n u \cdot \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{u}}_{=0} - \int_A |\nabla u|^2 \Rightarrow \int_A |\nabla u|^2 = 0$$

A connesso + $u = 0$ su ∂A

$\Downarrow$

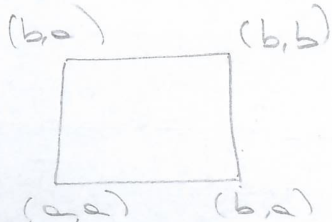
u = costante $= 0$

$\Rightarrow$ assurdo ∎

Lo dimostriamo solo nel caso $n=2$.

Lemma 1

Sia $f(x,y)$ una funzione di classe $C^1(B)$ con supporto contenuto in $Q = (a,b)\times(a,b)$, $(\overline{Q}\subset B)$



$$\int_Q \partial_x f\,dx\,dy = \int_Q \partial_y f\,dx\,dy = 0$$

dim: Ricordiamo che $\operatorname{supp} f = \overline{\{x\in B : f(x)\neq 0\}}$

$$\int_Q \partial_x f\,dx\,dy = \int_a^b dy\int_a^b \partial_x f\,dx = \int_a^b \underbrace{f(b,y)}_{=0} - \underbrace{f(a,y)}_{=0}\,dy = 0$$

$$\int_Q \partial_y f\,dx\,dy = \qquad = 0$$

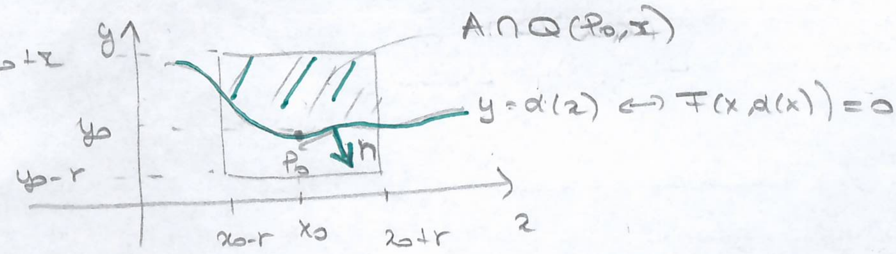
Facciamo alcune osservazioni. Sia A un dominio regolare in $\mathbb{R}^2$, allora per il teorema della funzione implicita per ogni punto $P_0=(x_0,y_0)\in\partial A$ esiste un quadrato

$Q(P_0,r) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x-x_0|<r \,;\, |y-y_0|<r\}$ tale che

$\partial A\cap Q(P_0,r)$ sia il grafico di una funzione $y=\alpha(x)$ (o di una funzione $x=\beta(y)$). Supponiamo sia vera la prima.

Ci possono essere due situazioni:

1) $A\cap Q(P_0,r) = \{(x,y)\in Q(P_0,r) : y>\alpha(x)\}$



$\alpha'(x) = -F_x/F_y$

moltiplico per $-F_y>0$

1) $n = \dfrac{(\alpha'(x),-1)}{\sqrt{\ }} = \dfrac{\left(\frac{-F_x}{F_y},-1\right)}{\sqrt{\ }}$

$F_y<0$ $(-F_y>0)$

$= \dfrac{(+F_x, F_y)}{\sqrt{\ }}$

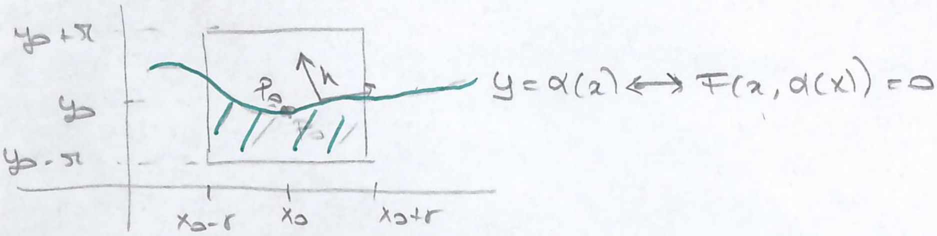
moltiplico per $F_y>0$

2) $n = \dfrac{(-\alpha'(x),1)}{\sqrt{\ }} = \dfrac{\left(\frac{+F_x}{F_y},1\right)}{\sqrt{\ }} = (F_x,F_y)$

$F_y>0$

In questo caso il versore normale esterno $n = \dfrac{(\alpha'(x),-1)}{\sqrt{1+\alpha'(x)^2}}$ → punta verso il basso.

2) $A\cap Q(P_0,r) = \{(x,y)\in Q(P_0,r) : y<\alpha(x)\}$



In questo caso il versore normale esterno è $n = \dfrac{(-\alpha'(x),1)}{\sqrt{1+\alpha'(x)^2}}$

Lemma 2.

Sia $f(x,y)$ una funzione $C^1(B)$ e con supporto contenuto in $Q(P_0, r)$ (dove $P_0 \in \partial A$), allora

(1) $\int_A \partial_y f \, dx\, dy = \int_{\partial A} f \cdot n_2 \, ds$

(2) $\int_A \partial_x f \, dx\, dy = \int_{\partial A} f \cdot n_1 \, ds$.

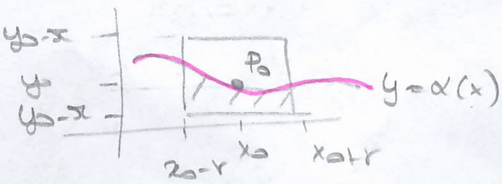
dove $n = (n_1, n_2)$ è il versore normale esterno.

dim: Vediamo la (1)

$$\int_A \partial_y f(x,y)\,dx\,dy = \int_{A \cap Q(P_0,r)} \partial_y f(x,y)\,dx\,dy \ =$$

il supporto di f è contenuto in $Q(P_0, r)$

Supponiamo di essere nel caso 2)



$$= \int_{x_0-r}^{x_0+r} dx \int_{y_0-r}^{\alpha(x)} \partial_y f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{x_0-r}^{x_0+r} \Big(f(x,\alpha(x)) - \overbrace{f(x, y_0-r)}^{=0 \text{ è fuori dal supporto}} \Big)\,dx =$$

$$= \int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x,\alpha(x))\,dx \ =$$

$$n = \frac{(-\alpha'(x), 1)}{\sqrt{1+\alpha'(x)^2}} \qquad n_1 = \frac{-\alpha'(x)}{\sqrt{1+\alpha'(x)^2}}, \quad n_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha'(x)^2}}$$

$$= \int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x,\alpha(x)) \cdot n_2 \cdot \sqrt{1+\alpha'(x)^2}\,dx = \int_{\partial A} f \cdot n_2 \, ds$$

uso anche il fatto che f è supportata in $Q(P_0, r)$

$\partial A \cap Q(P_0, r)$ è una curva regolare di eqz param. $(x, \alpha(x))$ con $x \in (x_0-r, x_0+r)$.

(1) ok.

Dimostriamo la (2)

$$\int_A \partial_x f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_0-r}^{x_0+r} \int_{y_0-r}^{\alpha(x)} \partial_x f(x,y)\,dx\,dy \ =$$

$$\partial_z G(z,u) = f(u,z)$$
$$\partial_u G(z,u) = \int_{y_0-r}^{z} \partial_u f(u,y)\, dy$$

osservo che

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{y_0-r}^{\alpha(x)} f(x,y)\, dy\right] \ominus$$

Introduco una funzione ausiliaria

$$G(z,u) = \int_{y_0-r}^{z} f(u,y)\, dy. \qquad z=\alpha(x),\quad u=x$$

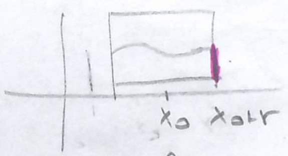
$$\ominus\ \frac{d}{dx} G(\alpha(x),x) = \partial_z G(z,u)\Big|_{\substack{z=\alpha(x)\\ u=x}} \cdot \alpha'(x) + \partial_u G(z,u)\Big|_{\substack{z=\alpha(x)\\ u=x}} \cdot 1$$

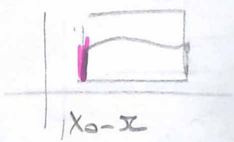
$$= f(x,\alpha(x))\cdot \alpha'(x) + \underbrace{\int_{y_0-r}^{\alpha(x)} \partial_x f(x,y)\, dx}_{\text{è il pezzo dell'integrale precedente}}$$

$$\boxed{=}\ \underbrace{\int_{x_0-r}^{x_0+r} dx\, \frac{d}{dx}\int_{y_0-r}^{\alpha(x)} f(x,y)\, dy}_{a)} - \underbrace{\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x,\alpha(x))\cdot \alpha'(x)\, dx}_{b)}$$

a) $$\int_{x_0-r}^{x_0+r}\left(\frac{d}{dx}\underbrace{\int_{y_0-r}^{\alpha(x)} f(x,y)\, dy}_{h(x)}\right) dx = \underbrace{\int_{y_0-r}^{\alpha(x_0+r)} f(x_0+r,y)\, dy}_{=0} - \underbrace{\int_{y_0-r}^{\alpha(x_0-r)} f(x_0-r,y)\, dy}_{=0}$$

$$= h(x_0+r) - h(x_0+r)$$





b) $$-\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x,\alpha(x))\overbrace{\frac{(-\alpha'(x))}{\sqrt{1+\alpha'(x)^2}}}^{=\, n_2}\cdot\sqrt{1+\alpha'(x)^2}\, dx = \int_{\partial A} f\cdot n_2\, ds.$$

∎

Per il momento abbiamo ottenuto una sorta di versione locale del teorema della divergenza ora dobbiamo passare dal locale al globale. Ci serve un nuovo strumento.

Proposizione (partizione dell'unità). (senza dimostrazione).

Siano $Q_i = Q(P_i, r_i)$ con $i=1,\dots,N$ un numero finito di quadrati che ricoprono $\bar{A}$

$$\bigcup_{i=1}^{N} Q_i \supset \bar{A}$$

Allora esistono N funzioni $\psi_1,\dots,\psi_N \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ t.c.

1) $\text{Supp}(\psi_i) \subset \overline{Q(P_i, 2r_i)}$ $\quad i=1,\dots,N$

2) $\sum_{i=1}^{N} \psi_i(x,y) = 1 \quad \forall (x,y)\in \bar{A}$

Dimostriamo il seguente lemma

Lemma 3.

Siano B ed A come nell'enunciato del teorema della divergenza.
Sia $f \in C^1(B)$ allora

$$\int_A \partial_x f \, dx\, dy = \int_{\partial A} f \cdot n_1 \, ds \qquad (1)$$

$$\int_A \partial_y f \, dx\, dy = \int_{\partial A} f \cdot n_2 \, ds \qquad (2)$$

dim: Consideriamo un punto $P \in \overline{A}$, ci sono due possibilità per P

1) $P \in A$, allora poiché A è un aperto posso trovare un quadrato di centro P e raggio $2r$ (suff. piccolo) tutto contenuto in A, cioè $\overline{Q(P,2r)} \subset A$.

2) $P \in \partial A$, allora scelgo $Q(P,2r)$ in modo che $\partial A \cap Q(P,2r)$ sia il grafico di una funzione $\alpha(x)$, cioè scelgo r coerentemente con il teorema della funzione implicita.

Al variare di P in $\overline{A}$, l'unione dei $Q(P,r)$ costruiti come in 1) e 2) costituisce un ricoprimento di $\overline{A}$. Poiché $\overline{A}$ è un compatto si potrà estrarre da questo un sottoricoprimento finito, fatto con i quadrati $Q(P_i, r_i)$ $i=1,\_\_,N$, cioè

$$\bigcup_{i=1}^{N} \overline{Q(P_i, r_i)} \supset \overline{A}.$$

Per la proprietà di partizione dell'unità esistono N funzioni $\psi_i \in C^1(\mathbb{R}^2)$ t.c. $supp(\psi_i) \subset \overline{Q(P_i, 2r_i)}$ e

$$\sum_{i=1}^{N} \psi_i(x,y) = 1 \qquad \text{con } (x,y) \in \overline{A}.$$

Calcolo

$$\int_A \partial_x f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\overline{A}} \partial_x f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\overline{A}} \partial_x \Big(f \cdot \overbrace{\sum_{i=1}^{N} \psi_i}^{1} \Big) dx\, dy =$$

↳ ∂A ha misura nulla in $\mathbb{R}^2$

$$= \int_{\overline{A}} \partial_x \left(f \psi_1 + \_\_ + f \psi_N \right) dx\, dy = \sum_{i=1}^{N} \int_{\overline{A}} \partial_x (f \cdot \psi_i)\, dx\, dy$$

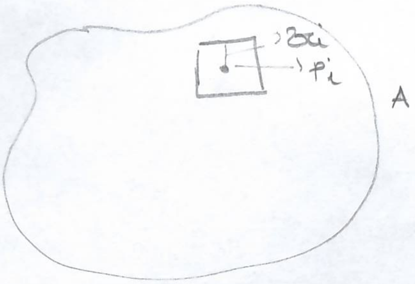
ψ_i hanno supporto contenuto in $Q(P_i, 2r_i)$ e di conseguenza anche le $f \cdot \psi_i$ sono ivi supportate

$$\int_{Q(P_i, 2r_i)} \partial_x (f \psi_i)\, dx\, dy = \int_{\overline{A}} \partial_x (f \cdot \psi_i)\, dx\, dy$$

Distinguiamo due casi

• $P_i \in A$

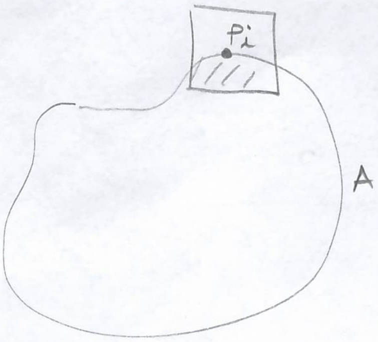
$$\int_{\bar A} \partial_x (g\,\psi_i)\,dx\,dy = \int_{Q(P_i,2r_i)} \partial_x (g\,\psi_i)\,dx\,dy \overset{\text{Lemma 1 a } g\cdot\psi_i}{=} 0$$



$g\psi_i$ ha supporto contenuto in $Q(P_i,2r_i)$ ed è di classe C^1

• $P_i \in \partial A$

$$\int_{\bar A} \partial_x (g\cdot\psi_i)\,dx\,dy = \int_{\bar A \cap Q(P_i,2r_i)} \partial_x (g\cdot\psi_i)\,dx\,dy \overset{\text{Lemma 2 a } g\cdot\psi_i}{=} \int_{\partial A} (g\cdot\psi_i)\cdot n_1\,ds.$$



Quindi il contributo all'integrale lo danno solo i P_i sul bordo, dunque

$$\int_A \partial_x g(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{M} \int_{\partial A} (g\cdot\psi_i)\cdot n_1\,ds = \int_{\partial A} g\Big(\overbrace{\sum_{i=1}^{M}\psi_i}^{=1}\Big)\,n_1\,ds =$$

$M \le N$ $\quad$ M numero di punti di tipo P_i che stanno su ∂A

Osservo che quando $(x,y)\in\partial A$

$$1 = \sum_{i=1}^{N} \psi_i(x,y) = \sum_{i=1}^{M} \psi_i(x,y)$$

le ψ_i relative ai punti $P_i \in A$ (aperto) non danno contributo in questa somma perché hanno supporto contenuto in $\overline{Q(P_i,2r_i)} \subset A$ per come sono state costruite (quindi $(x,y) \notin \overline{Q(P_i,2r_i)}$)

$$= \int_{\partial A} g\cdot n_1\,ds$$

In maniera analoga si dimostra per $\int_A \partial_y g(x,y)\,dx\,dy$

dim (teorema della divergenza).

$\omega = (\omega_1, \omega_2)$

Applico il Lemma 3 in questo modo

(1) $g = \omega_1$ $\quad \int_A \partial_x \omega_1 \, dx dy = \int_{\partial A} \omega_1 \cdot n_1 \, ds$

(2) $g = \omega_2$ $\quad \int_A \partial_y \omega_2 \, dx dy = \int_{\partial A} \omega_2 \cdot n_2 \, ds.$

Sommando membro a membro trovo la tesi

$$\int_A \operatorname{div} \omega \, dx\, dy = \int_A \partial_x \omega_1 + \partial_x \omega_2 \overset{(1)+(2)}{=} \int_{\partial A} (\omega_1 \cdot n_1 + \omega_2 \cdot n_2)\, ds$$

$$= \int_{\partial A} (\omega \cdot n)\, ds.$$

$\square$

Es $n=3$! $\quad F(x,y,z) = (x,y,z) \quad A = B(0,R)$

- $\operatorname{div} F = \partial_x x + \partial_y y + \partial_z z = 3$

$$\int_{B(0,R)} (\operatorname{div} F)\, dx\, dy\, dz = 3 \, \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi R^3$$ ✓

- $F \cdot n = \frac{1}{R}(x \cdot x + y \cdot y + z \cdot z) = \frac{x^2+y^2+z^2}{R} \overset{\text{su } \partial B_R}{=} \frac{R^2}{R} = R$

$n = \frac{(x,y,z)}{R}$

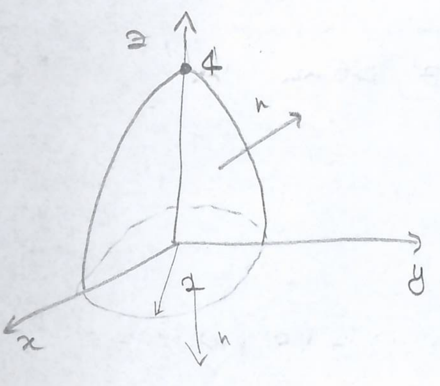
$$\iint_{\partial B(0,R)} F \cdot n \, d\sigma = \iint_{\partial B(0,R)} R \, d\sigma = R\,(4\pi R^2) = 4\pi R^3$$ ✓

$\square$

Oss: Il teorema della divergenza continua a valere nel caso in cui ∂A sia una curva o una superficie regolare a tratti.

Es Sia A la regione delimitata dal paraboloide

$z = 4 - x^2 - y^2$ e il piano $z=0$. Consideriamo il campo vettoriale F e calcoliamo il flusso



$F(x,y,z) = (2z, x, y^2)$ $\qquad \iint_{\partial A} F \cdot n \, d\sigma$

$\partial A = S_1 \cup S_2$

S_1 → parab; S_2 → disco

- $S_2 \longrightarrow n = (0,0,-1)$
- $S_1 \longrightarrow n = (2x, 2y, 1) / \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$

$$\iint_{\partial A} (F\cdot n)\, d\sigma = \iint_{S_1} (F\cdot n)\, d\sigma + \iint_{S_2} (F\cdot n)\, d\sigma =$$

$$= \iint_D F\cdot(2x,2y,1)\, dx\, dy + \iint_D F\cdot(0,0,-1)\, dx\, dy \; ⊜$$

$$F\cdot n\, d\sigma = \Big(F\cdot \underbrace{\frac{r_x \times r_y}{\|r_x\times r_y\|}}_{n} \overbrace{\|r_x\times r_y\|\, dx\, dy}^{d\sigma} = \Big(F\cdot \underbrace{r_x\times r_y}_{\to (2x,2y,1)}\Big)\, dx\, dy$$

dove $D = \{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4\}$.

$$⊜ \iint_D 4xz + 2xy + y^2\, dx\, dy + \iint_D (-y^2)\, dx\, dy = \dots = 0.$$

Controlliamo con il teorema della divergenza

$$\iiint_A \operatorname{div} F = \iiint_A 0 = 0.$$

Supponiamo che ∂A sia il sostegno di una curva regolare chiusa e sia

$$\varphi(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad a\le t\le b.$$

Il versore tangente $T(t)$ a ∂A nel punto $P=\varphi(t)$ è

$$T(t) = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} = \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$$

La rappresentazione parametrica φ assegna un'orientazione a ∂A

Def: Diremo che la curva φ è <u>un'orientazione positiva</u> per ∂A se muovendomi su ∂A lascio alla mia sinistra ∂A

In modo più rigoroso per curve regolari φ si può dire che la frontiera è orientata positivamente se il versore

$$n(t) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|\varphi'(t)\|}$$ è diretto esternamente ad A