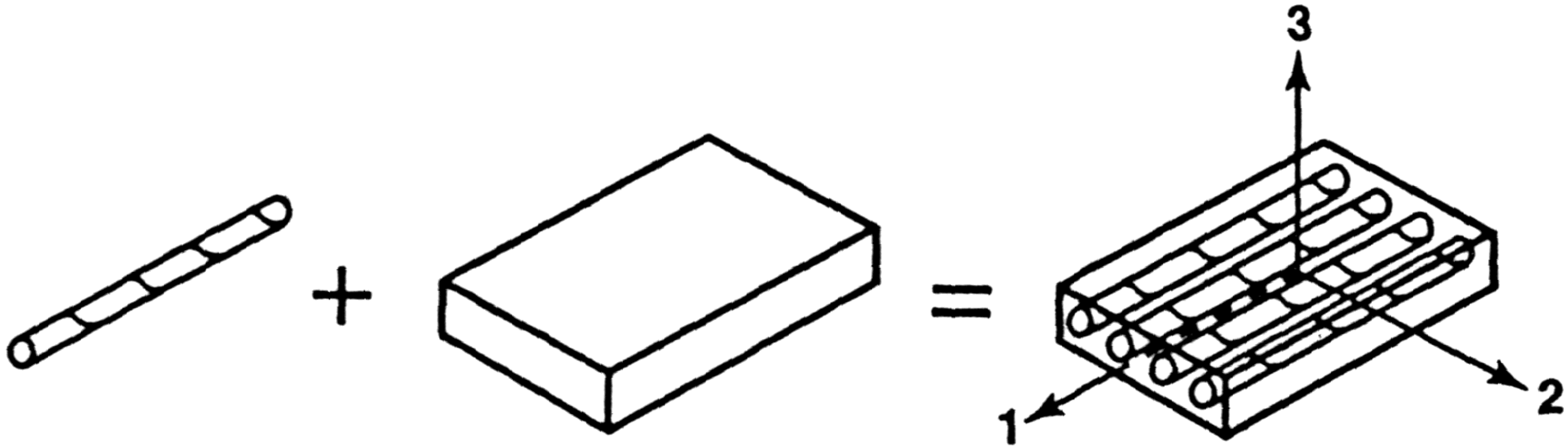
COSTRUZIONI NAVALI II

(materiali compositi: analisi macromeccanica)

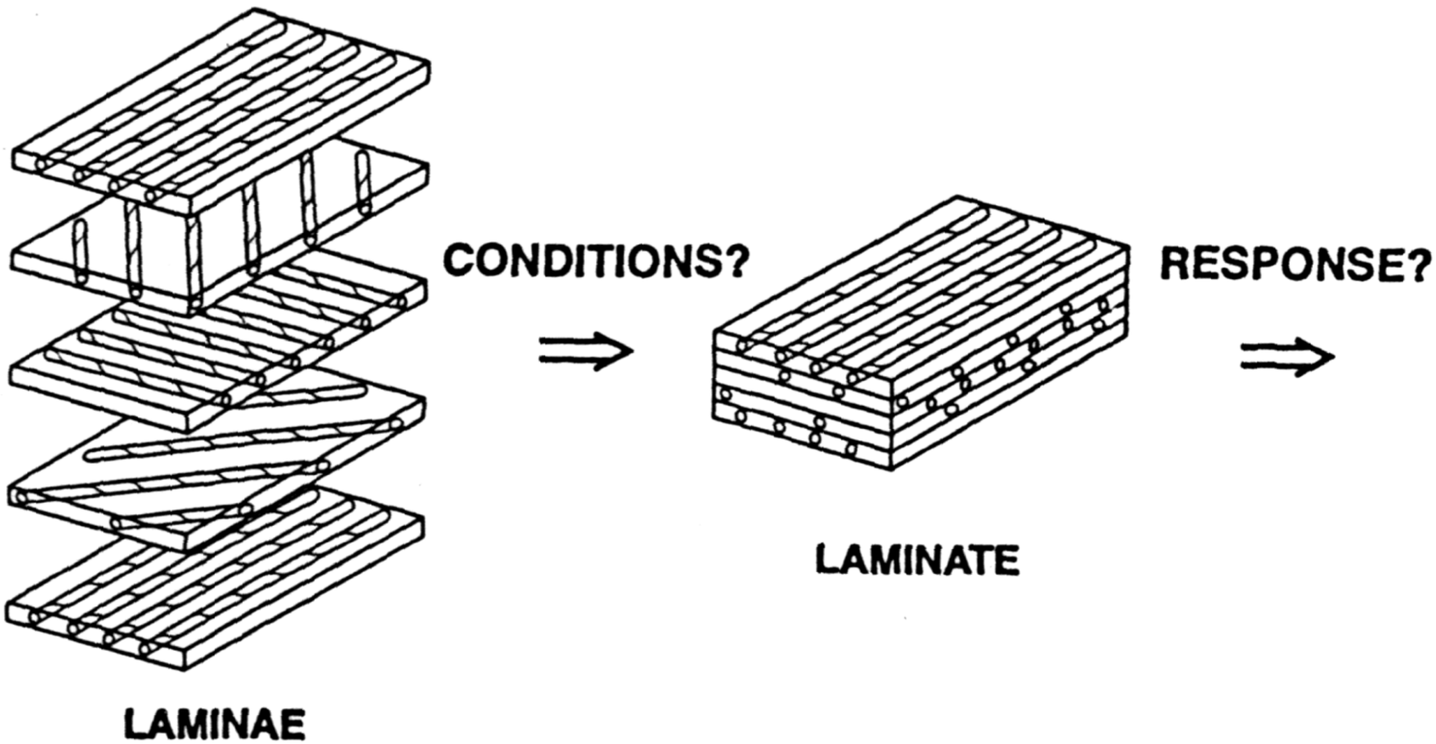
MICROMECHANICAL BEHAVIOR OF A LAMINA



FIBER	MATRIX	COMPOSITE MATERIAL
E_f	E_m	$E_{c_i}=?$
X_f	X_m	$X_{c_i}=?$

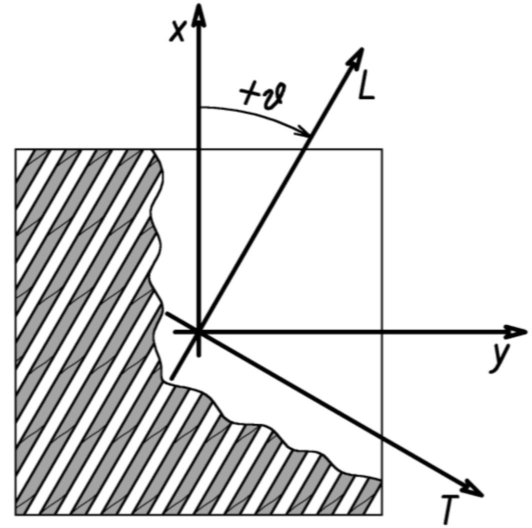
Basic Question of Micromechanics

MACROMECHANICAL BEHAVIOR OF A LAMINATE



The Basic Questions of Laminate Analysis

Costanti elastiche riferite ad assi arbitrari



$$\frac{1}{E_x} = \frac{\cos^4\theta}{E_L} + \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\,\nu_{LT}}{E_L}\right)\sin^2\theta\,\cos^2\theta + \frac{\sin^4\theta}{E_T}$$

$$\frac{1}{E_y} = \frac{\sin^4\theta}{E_L} + \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\,\nu_{LT}}{E_L}\right)\sin^2\theta\,\cos^2\theta + \frac{\cos^4\theta}{E_T}$$

$$\frac{1}{G_{xy}} = \frac{\cos^2 2\,\theta}{G_{LT}} + \left(\frac{1+\nu_{LT}}{E_L} + \frac{1+\nu_{TL}}{E_T}\right)\sin^2 2\,\theta$$

$$\frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y} = \frac{\nu_{LT}}{E_L} - \frac{1}{4}\left(\frac{1+\nu_{LT}}{E_L} + \frac{1+\nu_{TL}}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}}\right)\sin^2 2\,\theta$$

Corrispondenza fra «notazione tensoriale» e «notazione contratta»

Sforzi			Deformazioni		
notazione tensoriale	(ingegneristica)	notazione contratta	notazione tensoriale	(ingegneristica)	notazione contratta
σ_{11}	(σ_1)	σ_1	ε_{11}	(ε_1)	ε_1
σ_{22}	(σ_2)	σ_2	ε_{22}	(ε_2)	ε_2
σ_{33}	(σ_3)	σ_3	ε_{33}	(ε_3)	ε_3
σ_{23}	(τ_{23})	σ_4	ε_{23}	$(\frac{1}{2}\,\gamma_{23})$	ε_4
σ_{31}	(τ_{31})	σ_5	ε_{31}	$(\frac{1}{2}\,\gamma_{31})$	ε_5
σ_{12}	(τ_{12})	σ_6	ε_{12}	$(\frac{1}{2}\,\gamma_{12})$	ε_6

Equazione costitutiva della lamina nel riferimento principale

$$matrice\ di\ cedevolezza\ del\ materiale\ \underline{\underline{S}}$$

$$\boxed{\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{S}}\ \underline{\sigma}}$$

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} S_{11} & S_{12} & 0 \\ & S_{22} & 0 \\ \text{simm.} & & S_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{array} \right\}}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} S_{11} & = & 1/E_1 \\ S_{12} & = & -\nu_{21}/E_2 \\ S_{21} & = & -\nu_{12}/E_1 \\ S_{22} & = & 1/E_2 \\ S_{66} & = & 1/G_{12} \end{array}}$$

Equazione costitutiva della lamina nel riferimento principale

matrice di rigidezza del materiale $\underline{\underline{Q}}$

$$\boxed{\underline{\sigma} = \underline{\underline{Q}}\ \underline{\varepsilon}} \qquad \boxed{\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{S}}^{-1}}$$

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ & Q_{22} & 0 \\ \text{simm.} & & Q_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{array} \right\}}$$

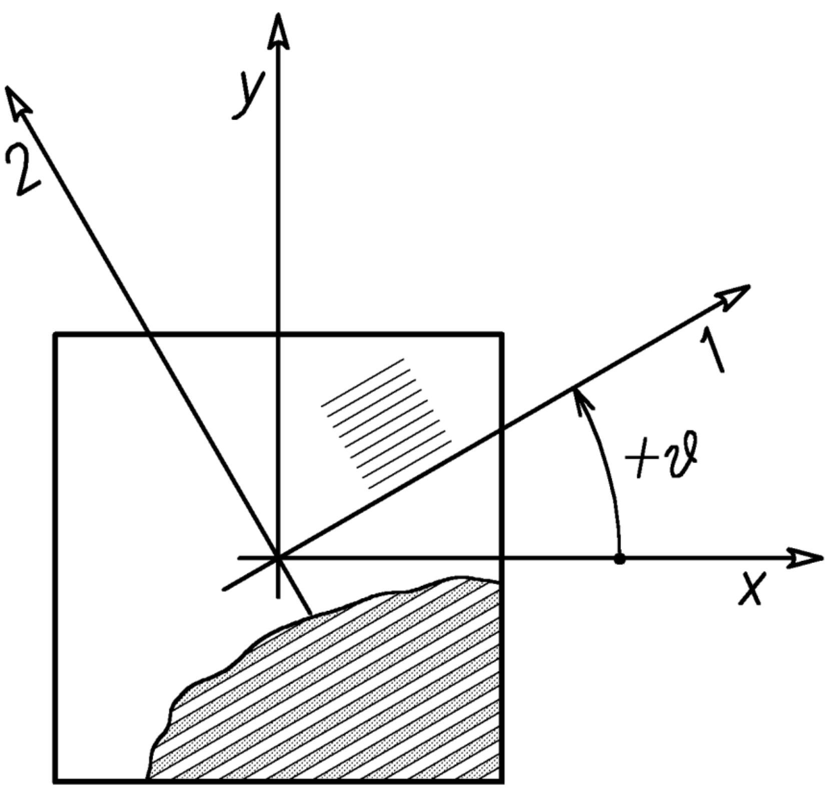
$$\boxed{\begin{array}{lcl} Q_{11} & = & E_1/(1-\nu_{12}\,\nu_{21}) \\ Q_{12} & = & \nu_{21}\,E_1/(1-\nu_{12}\,\nu_{21}) \\ Q_{21} & = & \nu_{12}\,E_2/(1-\nu_{12}\,\nu_{21}) \\ Q_{22} & = & E_2/(1-\nu_{12}\,\nu_{21}) \\ Q_{66} & = & G_{12} \end{array}}$$

Deformazioni e tensioni nel riferimento generico (x,y) e nel riferimento principale (1,2)

tensore di trasformazione $\underline{\underline{T}}(\theta)$

$$\begin{array}{ccc} m & = & \cos\theta \\ n & = & \sin\theta \end{array}$$

$$\underline{\underline{T}}(\theta) = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & +2\,m\,n \\ n^2 & m^2 & -2\,m\,n \\ -m\,n & m\,n & (m^2 - n^2) \end{bmatrix}$$



$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{array} \right\} = \underline{\underline{T}}(\theta) \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\,\gamma_{12} \end{array} \right\} = \underline{\underline{T}}(\theta) \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\,\gamma_{xy} \end{array} \right\}$$

Equazione costitutiva della lamina secondo un riferimento generico

$$\textit{matrice di rigidezza trasformata } \underline{\underline{\overline{Q}}}$$

$$\boxed{\underline{\sigma}_{(x,y)} = \underline{\underline{\overline{Q}}}\, \underline{\varepsilon}_{(x,y)}}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \text{simm.} & & \overline{Q}_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\overline{Q}_{11} &= Q_{11}\, m^4 + 2\,(Q_{12} + 2\,Q_{66})\, m^2\, n^2 + Q_{22}\, n^4 \\
\overline{Q}_{22} &= Q_{11}\, n^4 + 2\,(Q_{12} + 2\,Q_{66})\, m^2\, n^2 + Q_{22}\, m^4 \\
\overline{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4\,Q_{66})\, m^2\, n^2 + Q_{12}\,(m^4 + n^4) \\
\overline{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2\,Q_{12} - 2\,Q_{66})\, m^2\, n^2 + Q_{66}\,(m^4 + n^4) \\
\overline{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2\,Q_{66})\, m^3\, n + (Q_{12} - Q_{22} + 2\,Q_{66})\, m\, n^3 \\
\overline{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2\,Q_{66})\, m\, n^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2\,Q_{66})\, m^3\, n
\end{aligned}$$

Matrice di rigidezza trasformata in funzione degli invarianti di Tsai - Pagano

$$
\begin{aligned}
\overline{Q}_{11} &= U_1 + U_2\,\cos(2\,\theta) + U_3\,\cos(4\,\theta) \\
\overline{Q}_{22} &= U_1 - U_2\,\cos(2\,\theta) + U_3\,\cos(4\,\theta) \\
\overline{Q}_{12} &= U_4 - U_3\,\cos(4\,\theta) \\
\overline{Q}_{66} &= U_5 - U_3\,\cos(4\,\theta) \\
\overline{Q}_{16} &= \frac{1}{2}\,U_2\,\sin(2\,\theta) + U_3\,\sin(4\,\theta) \\
\overline{Q}_{26} &= \frac{1}{2}\,U_2\,\sin(2\,\theta) - U_3\,\sin(4\,\theta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1}{8}\left(3\,Q_{11} + 3\,Q_{22} + 2\,Q_{12} + 4\,Q_{66}\right) \\
U_2 &= \frac{1}{2}\left(Q_{11} - Q_{22}\right) \\
U_3 &= \frac{1}{8}\left(Q_{11} + Q_{22} - 2\,Q_{12} - 4\,Q_{66}\right) \\
U_4 &= \frac{1}{8}\left(Q_{11} + Q_{22} + 6\,Q_{12} - 4\,Q_{66}\right) \\
U_5 &= \frac{1}{8}\left(Q_{11} + Q_{22} - 2\,Q_{12} + 4\,Q_{66}\right)
\end{aligned}
$$

Matrice di rigidezza del materiale nel riferimento principale

$$\boxed{\begin{aligned} Q_{11} &= E_1/(1-\nu_{12}\,\nu_{21}) \\ Q_{12} &= \nu_{21}\,E_1/(1-\nu_{12}\,\nu_{21}) \\ Q_{21} &= \nu_{12}\,E_2/(1-\nu_{12}\,\nu_{21}) \\ Q_{22} &= E_2/(1-\nu_{12}\,\nu_{21}) \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned}}$$

$$matrice\ \ di\ \ cedevolezza\ \ trasformata\ \underline{\underline{\overline{S}}}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\overline{S}}} = \underline{\underline{\overline{Q}}}^{-1}}$$

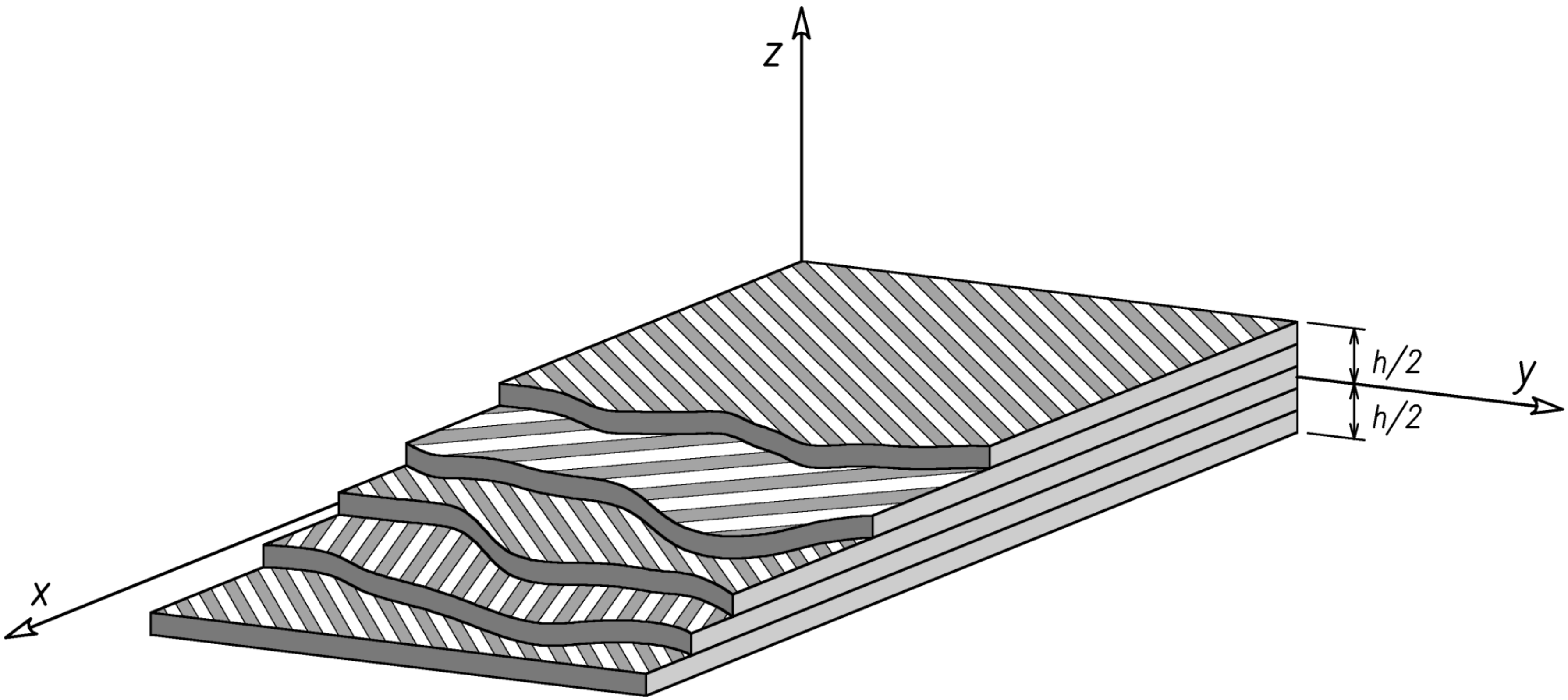
$$\boxed{\underline{\varepsilon}_{(x,y)} = \underline{\underline{\overline{S}}}\,\underline{\sigma}_{(x,y)}}$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc}\overline{S}_{11} & \overline{S}_{12} & \overline{S}_{16} \\ & \overline{S}_{22} & \overline{S}_{26} \\ \text{simm.} & & \overline{S}_{66}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy}\end{array}\right\}}$$

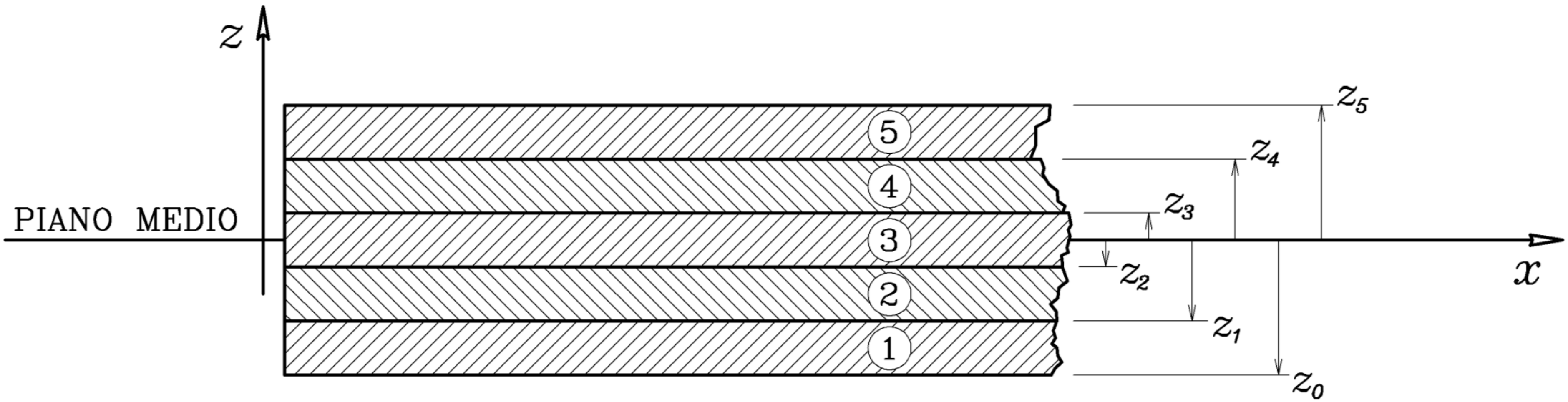
Matrice di cedevolezza trasformata

$$
\begin{aligned}
\overline{S}_{11} &= S_{11}\, m^4 + (2\, S_{12} + S_{66})\, m^2\, n^2 + S_{22}\, n^4 \\
\overline{S}_{22} &= S_{11}\, n^4 + (2\, S_{12} + S_{66})\, m^2\, n^2 + S_{22}\, m^4 \\
\overline{S}_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{66})\, m^2\, n^2 + S_{12}\, (m^4 + n^4) \\
\overline{S}_{66} &= 2\, (2\, S_{11} + 2\, S_{22} - 4\, S_{12} - S_{66})\, m^2\, n^2 + S_{66}\, (m^4 + n^4) \\
\overline{S}_{16} &= (2\, S_{11} - 2\, S_{12} - S_{66})\, m^3\, n + (2\, S_{12} - 2\, S_{22} + S_{66})\, m\, n^3 \\
\overline{S}_{26} &= (2\, S_{11} - 2\, S_{12} - S_{66})\, m\, n^3 + (2\, S_{12} - 2\, S_{22} + S_{66})\, m^3\, n
\end{aligned}
$$

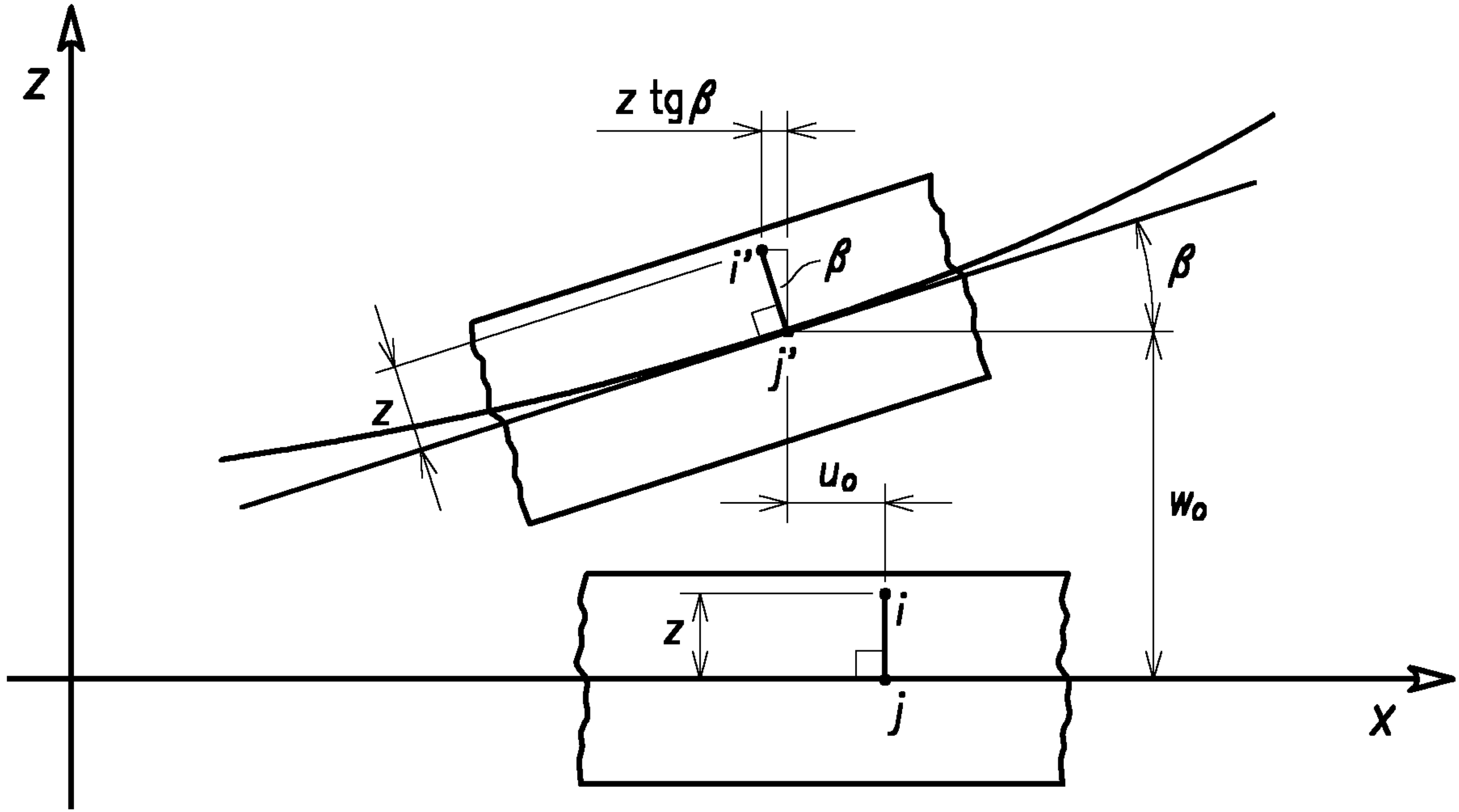
Il riferimento geometrico del laminato



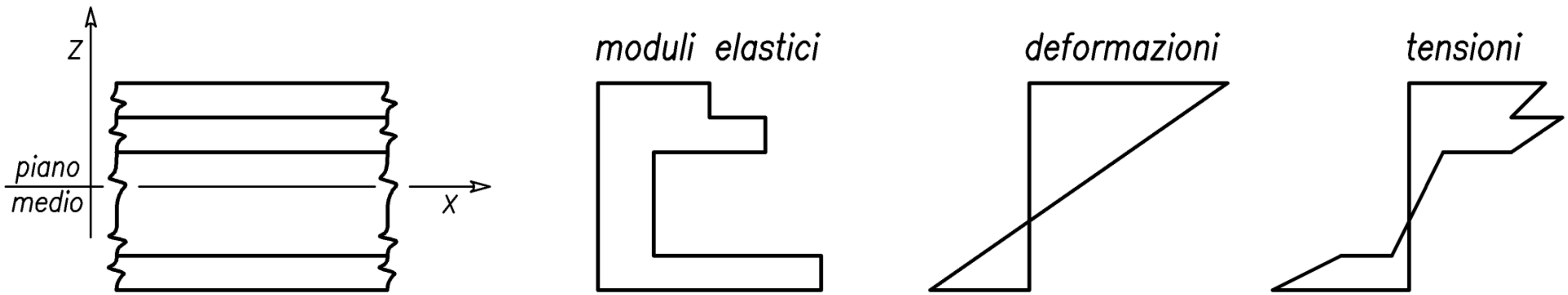
Convenzione per la quotatura delle interfacce delle lamine



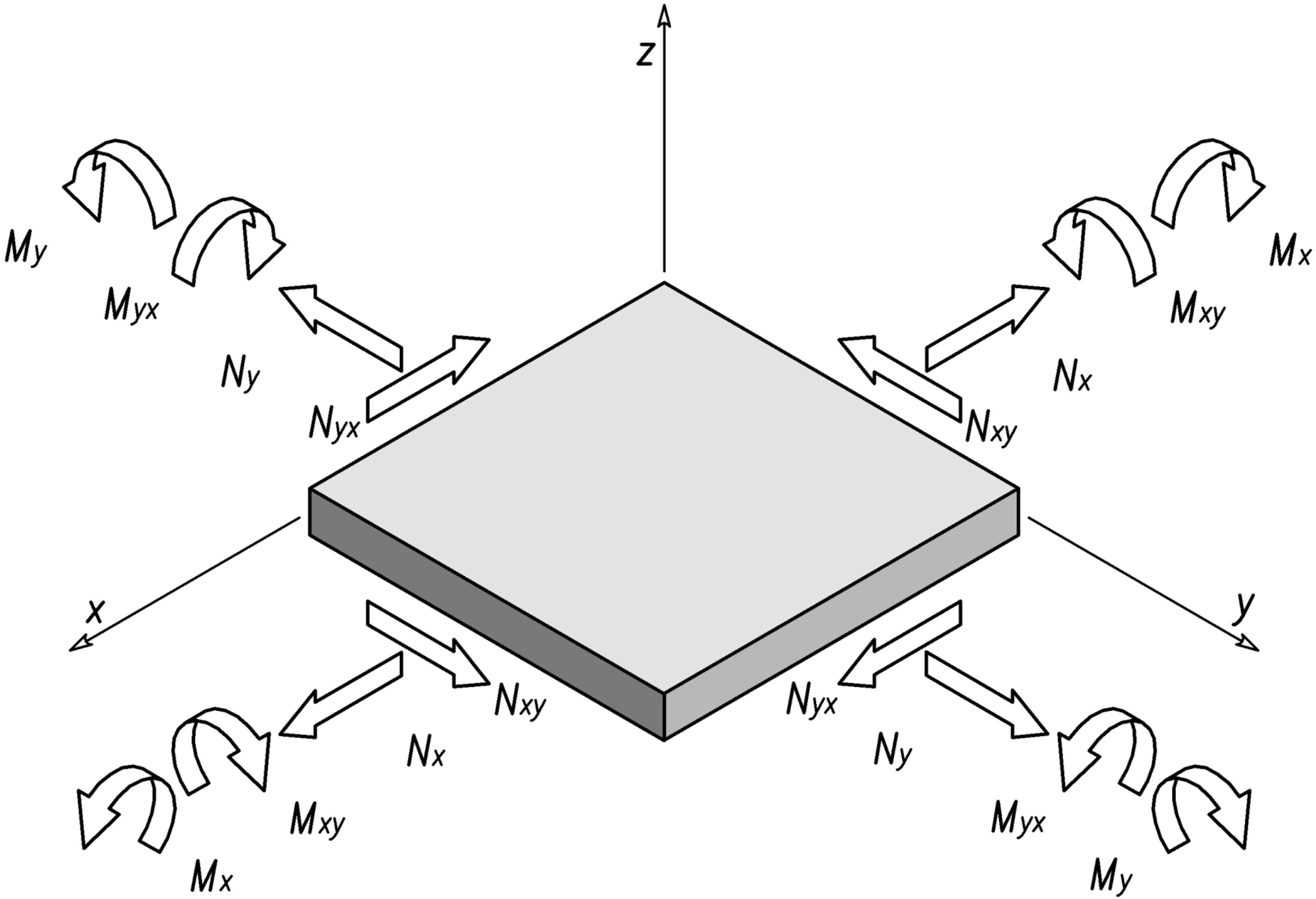
Spostamento di un punto generico della piastra: la componente u



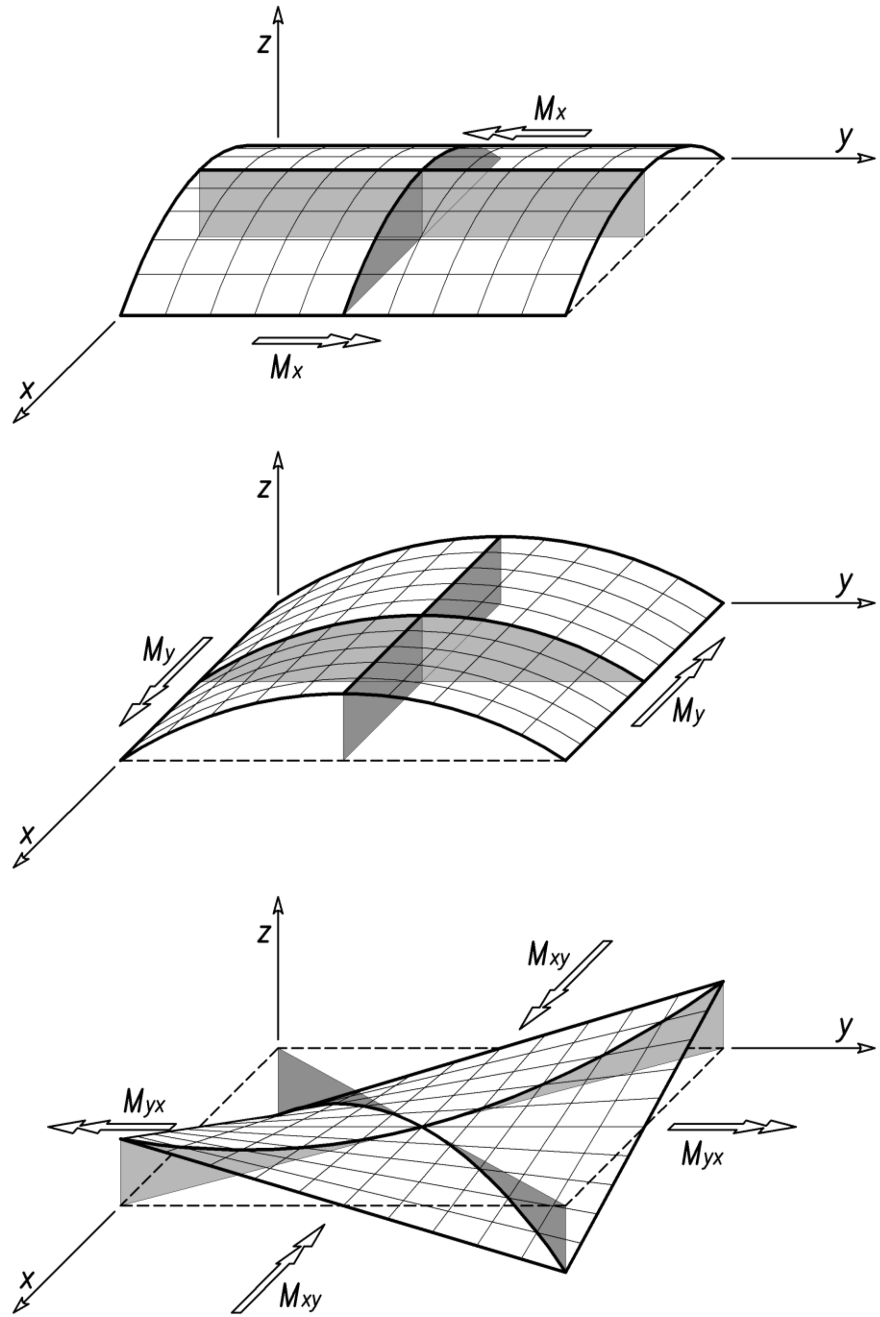
Andamento delle deformazioni e delle tensioni attraverso lo spessore del laminato



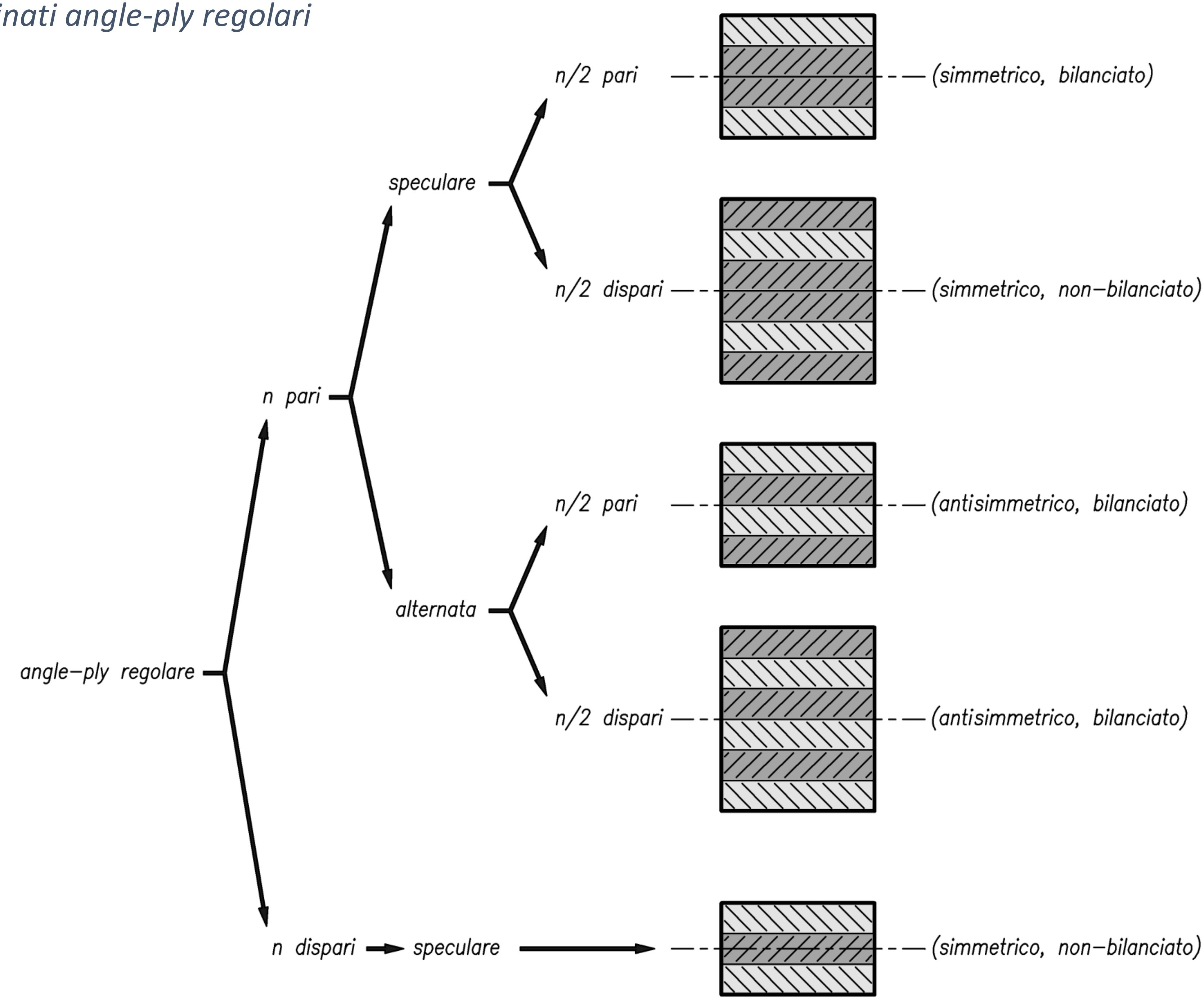
Forze e momenti di segno positivo



Curvature indotte da momenti positivi in una piastra isotropa



Laminati angle-ply regolari



In presenza di un laminato *simmetrico* rispetto al piano medio e con numero *pari* di lamine si indica solo metà sequenza, aggiungendo alla notazione il pedice "$_\mathrm{S}$"; ad esempio:

$[0°/90°/45°/45°/90°/0°] = [0°/90°/45°]_\mathrm{S}$

Un laminato *simmetrico* e con numero *dispari* di lamine avrà la lamina centrale tagliata in due dal piano medio. In questo caso il termine ad essa relativo viene soprassegnato; ad esempio:

$[0°/90°/0°] = [0°/\overline{90}°]_\mathrm{S}$

Qualora nella sequenza completa siano individuabili *sequenze parziali* ripetute si può sinteticamente indicare nel pedice il numero di tali blocchi parziali; ad esempio:

$[0°/90°/45°/0°/90°/45°] = [0°/90°/45°]_2$

Lamine *multiple*, che si presentano contigue nel laminato, possono essere raggruppate indicandone a pedice il numero relativo; ad esempio:

$[0°/0°/0°/90°/90°] = [0^\circ_3/90^\circ_2]$

In certi casi, per dare particolare enfasi al fatto che la sequenza indicata è quella *totale* che dovrà essere seguita si usa aggiungere il pedice "$_\mathrm{T}$" alla notazione; ad esempio:

$[0°/90°/45°/–45°/0°/90°]_\mathrm{T}$

Per laminati con spessori delle lamine variabili, lo *spessore* h_k deve essere esplicitato come segue:

$[\,h_1 @\, \theta_1/h_2 @\, \theta_2/\ldots/h_n @\, \theta_n]$ oppure $[\theta_1/\theta_2/\ldots/\theta_n]\,(\,h_1/h_2/\ldots/h_n)$