Alcuni esempi di esercizi sulle serie di potenze

May 29, 2018

1 Esercizio 1

Determinare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} + n^2 \right) x^n$$

Studiamo seperatamente le due serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$.

a) Per studiare la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$ osserviamo che, per $x \neq 0$, $\frac{x^n}{n(n+1)} = \frac{1}{x} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t^n}{n} dt$. Si ha quindi, scambiando segno di integrale e di serie, ricordando che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t)$ sull'intervallo $[-1,1)$ e successivamente integrando per parti,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^2 = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^x \frac{t^n}{n} dt \right) = \frac{1}{x} \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} \right) dt = -\frac{1}{x} \int_0^x \ln(1-t) dt =$$
$$-\frac{1}{x} \left(t \ln(1-t)|_0^x - \int_0^x \frac{-t}{1-t} dt \right) = -\ln(1-x) - \frac{1}{x} \int_0^x \left(-1 + \frac{1}{1-t} \right) dt =$$
$$-\ln(1-x) - \frac{1}{x} \left(-x - \ln(1-x) \right) = -\ln(1-x) + 1 + \frac{\ln(1-x)}{x}.$$

La serie converge ovviamente a zero per $x = 0$. Si noti che per $x = 1$ la serie diventa la serie di Mengoli $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, che converge, come è noto, a 1.

b) Per studiare la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$ osserviamo che $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ sull'intervallo $(-1,1)$ (serie geometrica). Derivando la serie, si ottiene $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ (questo risultato si può ottenere anche calcolando la serie prodotto di Cauchy della serie geometrica per se stessa) e dunque $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$. Ne segue, derivando quest'ultima serie,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{x+1}{(1-x)^3}.$$

In conclusione,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}.$$

Si noti che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$ non converge nè in 1, nè in -1, in quanto la successione dei termini della serie in questi casi non converge a zero, condizione necessaria per la convergenza.

Da quanto visto si conclude che la serie data converge per $0 < |x| < 1$ a $-\ln(1-x) + 1 + \frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$ e a zero per $x = 0$.

2 Esercizio 2

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^2} \right) (2x - x^2)^n$$

Posto $z = 2x - x^2$, studiamo la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^2} \right) z^n$, con $z \in]-\infty, 1]$, insieme immagine della funzione $f(x) = 2x - x^2$ (si noti che $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \geq 0$ implica $f(x) = 2x - x^2 \leq 1$).

Studiamo seperatamente le due serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} z^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} z^n$.

a) Per studiare la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} z^n$, calcoliamo il suo raggio di convergenza.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}} \frac{\sqrt{n}}{\ln n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1.$$

Ne segue che la serie ha raggio di convergenza $R_1 = 1$ e dunque converge nell'intervallo $(-1, 1)$.

La serie non converge in $z = 1$. Per provarlo, utilizziamo il criterio del confronto asintotico, confrontando la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ con la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, che diverge.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \sqrt{n} = \lim_{n \to +\infty} \ln n = +\infty.$$

La serie dunque diverge in 1.

La serie invece converge in -1. Per provarlo, applichiamo il criterio di Leibniz. Infatti, si ha $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$ ed inoltre la successione con termini $\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ risulta definitivamente decrescente. (Suggerimento: studiando la funzione $g(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}}$ si verifichi la decrescenza per $n > 7$.)

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} z^n$ converge dunque in $[-1, 1)$.

b) Per studiare la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} z^n$, calcoliamo il suo raggio di convergenza.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Ne segue che la serie ha raggio di convergenza $R_2 = 1$ e dunque converge nell'intervallo $(-1, 1)$.

Si verifica facilmente che la serie converge anche in 1, riducendosi in tal caso ad una serie armonica generalizzata convergente, e in -1, in quanto converge assolutamente (o anche per il criterio di Leibniz).

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^2}\right) z^n$, somma algebrica delle due serie considerate, converge dunque in $[-1, 1)$.

Ricordando che $z = 2x - x^2$, studiamo la condizione $-1 \leq 2x - x^2 < 1$. Si verifica facilmente che $-1 \leq 2x - x^2$ per $1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$, mentre $2x - x^2 < 1$ per $x \neq 1$.

Di conseguenza la serie converge nell'insieme $[1 - \sqrt{2}, 1) \cup (1, 1 + \sqrt{2}]$.

3 Esercizio 3

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\ln n} - \frac{1}{e^n}\right) (e^x - 1)^n$$

Posto $z = e^x - 1$, andiamo a studiare la convergenza della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\ln n} - \frac{1}{e^n}\right) z^n$ per $z \in (-1, +\infty)$, insieme immagine della funzione $f(x) = e^x - 1$.

Studiamo seperatamente le due serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n} z^n$ e $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{e^n} z^n$.

a) Per studiare la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n} z^n$, calcoliamo il suo raggio di convergenza.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = 1.$$

Ne segue che la serie ha raggio di convergenza $R_1 = 1$ e dunque converge nell'intervallo $(-1, 1)$.

La serie non converge per $z = 1$. Per provarlo, applichiamo il criterio del confronto asintotico, confrontando la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$ con la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Si ottiene:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln n} = +\infty.$$

Ne segue che la serie data non converge in $z = 1$.

Non risulta necessario verificare la convergenza della serie in $z = -1$, in quanto -1 non appartiene all'insieme immagine della funzione $f(x) = e^x - 1$. (Peraltro la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}(-1)^n$ converge per il criterio di Leibniz).

b) Per studiare la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{e^n} z^n$, calcoliamo il suo raggio di convergenza. Si ottiene in questo caso:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{e^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{e^n e} = \frac{1}{e}.$$

Il raggio di convergenza della serie è dunque $R_2 = e$ e la serie converge in $(-e, e)$.

Si verifica immediatamente che la serie non converge in e e in $-e$, in quanto in tali punti le successioni dei termini delle serie numeriche corrispondenti non convergono a zero.

Considerato che $(-1, 1) \subseteq (-e, e)$, possiamo dunque concludere che la serie originaria converge per $e^x - 1 \in (-1, 1)$, quindi in $(-\infty, \ln 2)$.