

**esercizi di ricapitolazione**  
(tratti dai compiti degli anni scorsi)

1. Siano  $X$  ed  $Y$  variabili aleatorie indipendenti: la prima con legge di Bernoulli di parametro  $1/3$ ; la seconda con legge di Poisson di parametro 2.
- a) Calcolare  $E[2X + 3Y]$  e  $Var[3X - 2Y]$ .
  - b) Calcolare  $P(Y \leq X)$ .
  - c) Determinare la densità discreta della variabile aleatoria  $Z = X + Y$ .
  - d) Calcolare  $E[2Z + 3X]$  e  $Var[Z - 3Y]$ .

2. Siano  $X$  ed  $Y$  variabili aleatorie indipendenti: la prima con legge uniforme continua sull'intervallo  $[2, 4]$ ; la seconda con legge data dalla densità di probabilità

$$f_Y(y) = \frac{y}{6} 1_{[2,4]}(y), \quad y \in \mathbb{R}$$

- a) Calcolare  $E[X + 3Y]$  e  $Var[2X - 3Y]$ .
  - b) Determinare la funzione di ripartizione della variabile aleatoria  $Z = Y - 1$ .
  - c) Calcolare  $E[X^2(Z - 2)]$  e  $Var[X + 3Z]$ .
  - d) Calcolare  $P(Z^2 - Z > 0)$ .
3. Si effettuano cinque lanci indipendenti di un dado (a sei facce).
- a) Calcolare la probabilità di ottenere 5 per tre volte.
  - b) Calcolare la probabilità di ottenere 3 almeno una volta.
  - c) Calcolare la probabilità di ottenere 6 al secondo lancio oppure 4 al terzo lancio.
  - d) Calcolare la probabilità di ottenere 1 al primo lancio, sapendo che nei cinque lanci si ottiene 2 almeno una volta.
4. I seguenti dati numerici sono le realizzazioni di un campione casuale  $(X_1, \dots, X_6)$ , estratto da una legge normale di media  $\mu$  sconosciuta e varianza  $1/4$ :

$$1.3, \quad 1.6, \quad 1.9, \quad 2.1, \quad 2.2, \quad 2.3.$$

- a) Calcolare  $P(X_1 - X_2 > 0)$ .
  - b) Determinare le realizzazioni della media e della varianza campionarie.
  - c) Determinare un intervallo di confidenza bilaterale per  $\mu$  al livello di confidenza del 99%.
5. Sia  $Z$  una variabile aleatoria con legge Binomiale  $B(2, 1/2)$  e sia la catena di Markov  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  a valori in  $\{0, 1, 2\}$ , avente come legge iniziale la legge di  $Z$  e come matrice di transizione la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- a) Determinare le densità discrete delle variabili aleatorie  $X_0, X_1, X_2$ .
- b) Calcolare  $E[X_2]$  e  $Var[X_1]$ .
- c) Stabilire se esista una misura di probabilità invariante per la catena di Markov ed in caso affermativo determinarla.