ESERCIZI DI GEOMETRIA 2 - FOGLIO 9

(1) Sia $C \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ una conica a centro, e sia

$$A_C = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

la matrice simmetrica associata. Si dimostri che C ammette un centro di simmetria (x_0, y_0), le cui coordiante sono soluzione del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{01} & = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{02} & = 0, \end{cases}$$

e che tale punto è unico.

(2) Ricordiamo che l'equazione canonica di un'ellisse è del tipo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

con $a \geq b > 0$. Posto

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

i punti $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ sono detti *fuochi* di C. Il numero

$$e = \frac{c}{a}$$

si dice *eccentricità*. Si ha $0 \leq e < 1$ ed $e = 0$ se e solo se $a = b$, quindi C è una circonferenza.

Se C non è una circonferenza, le due rette

$$l_1 : \quad x = -\frac{a}{e}, \qquad l_2 : \quad x = \frac{a}{e}$$

si dicono *direttrici* dell'ellisse.

L'equazione canonica di un'iperbole è del tipo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

con $a > 0$, $b > 0$. Posto

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

i punti $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ sono detti *fuochi* di C. Il numero

$$e = \frac{c}{a}$$

Date: May 30, 2018.

si dice *eccentricità*. Si ha $e > 1$. Le due rette

$$l_1 : \quad x = -\frac{a}{e}, \qquad l_2 : \quad x = \frac{a}{e}$$

si dicono *direttrici* dell'iperbole.

L'equazione canonica di una parabola è del tipo

$$y^2 = 2px$$

con $p > 0$. Il punti $F = (\frac{p}{2}, 0)$ è il *fuoco* di C e la retta

$$l : \quad x = -\frac{p}{2}$$

si dice *direttrice* di C. Poniamo per definizione

$$e = 1$$

l'*eccentricità* di C. Si dimostrino i seguenti teoremi:

Teorema 0.1. *L'ellisse è il luogo dei punti P del piano euclideo tali che*

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a,$$

dove d indica la distanza euclidea.

L'iperbole è il luogo dei punti P del piano euclideo tali che

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Teorema 0.2. *L'ellisse, l'iperbole e la parabola sono i luoghi dei punti P del piano euclideo per cui*

$$\frac{d(P, F_1)}{d(P, l_1)} = \frac{d(P, F_2)}{d(P, l_2)} = \frac{d(P, F)}{d(P, l)} = e.$$