**Università degli Studi di Trieste**
**Corsi di Studi in Matematica e in Fisica**

**Programma del corso di Analisi 3 modulo B (083SM-2)**
**A. a. 2017-2018**
**Parte svolta dal prof. Pierpaolo Omari**

## Integrale di Riemann per funzioni di più variabili

*L'integrale di Riemann-Stieltjes* (Seminario del dott. Daniel Lorenz della TU Bergakademie Freiberg in visita Erasmus, in compresenza dei proff. Pierpaolo Omari e Daniele Del Santo.) Esempi e motivazioni. Definizione e principali proprietà dell'integrale di Riemann-Stieltjes. Condizioni sufficienti per l'integrabilità. Metodi di calcolo.

*Integrazione su N-rettangoli* L'integrale di Riemann-Stieltjes (seminario del dott. Daniel Lorenz della TU Bergakademie Freiberg in visita Erasmus, in compresenza dei prof. Pierpaolo Omari e Daniele Del Santo.) Esempi e motivazioni. Definizione e principali proprietà dell'integrale di Riemann-Stieltjes. Condizioni sufficienti per l'integrabilità. Metodi di calcolo. Motivazioni per lo studio dell'integrale su N-rettangoli. Rettangoli in $\mathbb{R}^2$. Decomposizioni di un 2-rettangolo. Ordinamento fra decomposizioni e proprietà di reticolo (con dim.). Somme inferiori e superiori e relative proprietà (con dim.). Integrale inferiore e superiore. Funzioni integrabili secondo Riemann su un 2-rettangolo. Interpretazione geometrica. N-rettangoli in $\mathbb{R}^N$. Decomposizioni di un N-rettangolo. Ordinamento fra decomposizioni e proprietà di reticolo. Somme inferiori e superiori e relative proprietà. Integrale inferiore e superiore. Funzioni integrabili secondo Riemann su un N-rettangolo. Il criterio di integrabilità (di Riemann) coivolgente le somme inferiori e superiori (con dim.). Somme di Riemann-Darboux e somme di Cauchy-Riemann e loro confronto. Caratterizzazione dell'integrabilità (con dim.). Un'applicazione alla convergenza di alcune formule di quadratura per l'approssimazione numerica dell'integrale e relative stime d'errore. Oscillazione globale e locale di una funzione. Una funzione è continua in un punto se e solo se la sua oscillazione è nulla nel punto (con dim.). Un secondo criterio di integrabilità (di Du Bois-Reymond) basato sull'oscillazione (con dim.). Integrabilità delle funzioni continue sugli N-rettangoli (con dim.). Integrabilità delle funzioni monotone sugli intervalli compatti. Esempio di una funzione integrabile su un intervallo compatto discontinua in tutti i punti razionali (con dim.). Integrabilità della composta di una funzione continua definita su un soprainsieme compatto dell'immagine di una funzione integrabile (con dim.). Esempio di due funzioni integrabili la cui composta non è integrabile (con dim.). Proprietà dell'integrale (con dim.): linearità, monotonia, teorema del valore assoluto, integrabilità del massimo e del minimo, integrabilità del prodotto, teorema della media, integrabilità della restrizione, additività rispetto al dominio. Applicazioni al calcolo di masse, baricentri, momenti d'inerzia, potenziali gravitazionali ed elettrici. Formule di riduzione: premesse sul teorema di Torricelli; integrali multipli e integrali iterati. Formule di riduzione su 2-rettangoli: teorema di Fubini (con dim.). Formule di riduzione su 3-rettangoli: riduzione per corde e riduzione per sezioni. Formule di riduzione su N-rettangoli.

*Integrazione su insiemi limitati e misura secondo Peano-Jordan* Integrale di una funzione limitata su un insieme limitato. Insiemi misurabili e misura secondo Peano-Jordan in $\mathbb{R}^N$. Misura interna ed esterna. Insiemi non misurabili. Proprietà elementari della misura: additività, monotonia, caratterizzazione degli insiemi misurabili mediante plurirettangoli (con dim.). Insiemi trascurabili

e loro caratterizzazione mediante plurirettangoli (con dim.). Il grafico di una funzione integrabile su un N-rettangolo ha misura nulla (con dim.). Una condizione sufficiente per l'integrabilità di una funzione limitata su un rettangolo: la continuità a meno di un insieme trascurabile (con dim.). Insiemi di misura nulla secondo Lebesgue. Gli insiemi numerabili hanno misura nulla secondo Lebesgue (con dim.). Un terzo criterio di integrabilità (di Vitali-Lebesgue). Caratterizzazione degli insiemi misurabili per mezzo della loro frontiera (con dim.). Insiemi di Cantor : studio delle proprietà topologiche e di misurabilità. Esempi di insiemi compatti e di insiemi aperti non misurabili secondo Peano-Jordan. Una funzione continua su insieme chiuso e misurabile è integrabile (con dim.). Proprietà dell'integrale su insiemi limitati: linearità, monotonia, teorema del valore assoluto, integrabilità del prodotto e della composta, teorema della media, integrabilità della restrizione, additività rispetto al dominio. Funzioni integrabili che differiscono su un insieme di misura nulla hanno lo stesso integrale (con dim.). Insiemi normali in $\mathbb{R}^2$. Ogni insieme normale è chiuso e misurabile (con dim.). Formula di riduzione per gli integrali doppi su insiemi normali (con dim.). Insiemi normali in $\mathbb{R}^3$. Ogni insieme normale è chiuso e misurabile. Formula di riduzione per corde per gli integrali tripli. Insiemi sezionabili in $\mathbb{R}^3$. Formula di riduzione per sezioni per gli integrali tripli. Principio di Cavalieri (con dim.). Solidi di rotazione e loro volume: formula di Pappo-Guldino (con dim.). Premesse sul cambiamento di variabili negli integrali multipli: riesame del caso unidimensionale. Trasformazioni lineari di coordinate in $\mathbb{R}^3$. Insiemi localmente misurabili. Omeomorfismi, diffeomorfismi e diffeomorfismi di classe $C^1$. Formula di cambiamento di variabili negli integrali multipli. Applicazioni agli integrali doppi: trasformazioni lineari di coordinate, coordinate polari ed ellittiche in $\mathbb{R}^2$. Cambiamento di variabili negli integrali tripli: coordinate sferiche, ellissoidali e cilindriche in $\mathbb{R}^3$.
*Integrazione in senso generalizzato e misura in senso generalizzato* Funzioni localmente integrabili su insiemi localmente misurabili. Successione invadenti e adatte. Integrale generalizzato di una funzione di segno costante. Indipendenza dalla particolare successione invadente e adatta (con dim.). Integrale generalizzato di una funzione di segno qualunque. Una funzione è integrabile in senso generalizzato se e solo se lo è il suo valore assoluto (con dim.). Insiemi misurabili e misura in senso generalizzato. Criterio del confronto (con dim.) e applicazioni. Continuità e derivabilità degli integrali dipendenti da parametro: il caso compatto (con dim.) e il caso non compatto.

Trieste, 16 aprile 2018