NOTE DI ISTITUZIONI DI GEOMETRIA SUPERIORE 3

31 maggio 2018

Indice

0.1 Varietà grassmanniane

Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione $n+1$. Se fissiamo una base di V, rimane indotto un isomorfismo $V \cong \mathbb{K}^{n+1}$, quindi possiamo munire V della topologia di Zariski, identificando $\mathbb{K}^{n+1} = \mathbb{A}^{n+1}$. Dato $0 < k \leq n$, sia $G(k+1, V)$ l'insieme di tutti i sottospazi vettoriali $(k+1)$-dimensionali di V. Vogliamo definire una struttura di varietà topologica su $G(k+1, V)$.

Osservazione 1. *Le rette vettoriali di V sono parametrizzate da $\mathbb{P}(V)$, quindi abbiamo*

$$G(1, V) = \mathbb{P}(V).$$

Analogamente, gli iperpiani vettoriali di V sono in biiezione con i nuclei di applicazioni lineari non nulle $V \to \mathbb{K}$, quindi sono parametrizzati dalle classi di proporzionalità delle funzioni lineari non nulle e abbiamo

$$G(n, V) = \mathbb{P}(V^\vee).$$

Vediamo, quindi, che gli spazi proiettivi sono degli insiemi parametrizzanti naturali.

Sia

$$B(k+1, V) \subset V^{k+1}$$

l'insieme delle $(k+1)$-uple di vettori di V linearmente indipendenti. Tramite l'isomorfismo $V \cong \mathbb{K}^{n+1}$ possiamo identificare $B(k+1, V)$ con il sottoinsieme delle matrici

$$M((k+1) \times (n+1), \mathbb{K}) \cong (\mathbb{K}^{n+1})^{k+1}$$

di rango massimo; $B(k+1, V)$ risulta aperto nello topologia di Zariski, e in particolare è irriducibile.

Osservazione 2. *Due matrici $M, M' \in M((k+1) \times (n+1), \mathbb{K})$ determinano lo stesso sottospazio vettoriale $\Lambda \subset V$ se e solo esiste un matrice invertibile $G \in GL(k+1, \mathbb{K})$ tale che*

$$M' = GM. \tag{1}$$

Osserviamo anche che tale relazione determina una relazione di equivalenza, che indicheremo con $\sim_G$.

Corollario 1. *L'insieme $G(k+1, V)$ può essere identificato con il quoziente*

$$G(k+1, V) = \frac{B(k+1, V)}{\sim_G}.$$

Possiamo quindi munire $G(k+1, V)$ della topologia quoziente.

Proposizione 1. *Lo spazio topologico $G(k+1, V)$ ha una struttura di varietà topologica, con carte omeomorfe a $\mathbb{A}^{(k+1)(n-k)}$.*

Dimostrazione. Per ogni multiindice $I = (i_1, \ldots, i_{k+1})$, consideriamo l'aperto $B_I \subset B(k+1, V)$ che corrisponde alle matrici con I-esimo minore invertibile. Siccome B_I è invariante per la moltiplicazione a sinistra di una matrice in $GL(k+1, \mathbb{K})$, possiamo scrivere

$$B_I = p^{-1}(U_I),$$

con U_I aperto in $G(k+1, V)$. Infine, le classi di matrici in U_I ammetono un rappresentante avente l'I-esimo minore uguale alla matrice identica, e le rimanenti $(k+1)(n-k)$ entrate arbitrarie. Non è difficile mostrare che ogni U_I è omeomorfo a $\mathbb{A}^{(k+1)(n-k)}$. □

Osservazione 3. *Sia $\mathbb{G}(k, \mathbb{P}(V))$ l'insieme dei sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ di dimensione k. Allora si ha*

$$\mathbb{G}(k, \mathbb{P}(V)) = G(k+1, V).$$

Teorema 0.1. *$G(k+1, V)$ è omeomorfa a una varietà proiettiva.*

Dimostrazione. Consideriamo l' *immersione di Plücker*. Sia $\Lambda \subset V$ un sottospazio vettoriale di dimensione $k+1$ e sia $\{v_0, \ldots, v_k\}$ una sua base. La mappa di Plücker è così definita:

$$\phi : G(k+1, V) \to \mathbb{P}(\wedge^{k+1} V), \qquad \Lambda \to [v_0 \wedge \cdots \wedge v_k],$$

mappa di Plücker. Ricordiamo che

$$\dim \wedge^{k+1} V = \binom{n+1}{k+1}.$$

In coordinate, se $M \in M((k+1) \times (n+1), \mathbb{K})$ è la matrice associata alle coordinate della base $\{v_0, \ldots, v_k\}$, le coordinate omogenee di $\phi(\Lambda)$ sono date dai determinanti dei minori di ordine $k+1$. Osserviamo che la mappa ϕ è ben definita: se $\{v'_0, \ldots, v'_k\}$ è un'altra base di Λ e M' è la matrice delle coordinata associata, si ha

$$M' = GM$$

per un'opportuna matrice $G \in GL(k+1, \mathbb{K})$ e si può facilmente verificare che i determinanti dei minori di ordine $k+1$ di M' sono uguali ai determinanti dei minori di ordine $k+1$ di M moltiplicati per $det\ G$.

Usando l'algebra multilineare si può dimostrare che ϕ è iniettiva, che la sua immagine corrisponde esattamente alle classi dei multivettori totalmente decomponibili e che $\phi(G(k+1, V))$ è una varietà proiettiva. Si veda J. Harris: *Algebraic geometry. A first course*, Graduate Texts in Mathematics, 133, Springer-Verlag, Chapter 6, Grassmannians and Related Varieties. □

Definizione 1. *Le coordinate omogenee di $\phi(\Lambda)$ si dicono coordinate plückeriane di Λ.*

1 Grassmanniane delle rette

Nel caso $k+1 = 2$ l'immersione di Plücker associa ad ogni 2-piano Λ di V la classe $[v \wedge w]$, dove $\{v, w\}$ è una qualunque base di Λ. Equivalentemente, l'immersione di Plücker associa ad ogni retta $L \subset \mathbb{P}^n$ il punto proiettivo di coordinate plückeriane omogenee $(... : p_{ij} : ...)$ ottenute fissando due punti arbitrari $R = (r_0, \ldots, r_1)$, $Q = (q_0, \ldots, q_n) \in L$ e considerando tutti i determinanti dei minori di ordine due della matrice

$$\begin{pmatrix} r_0 & r_1 & \ldots & r_n \\ q_0 & q_1 & \ldots & q_n \end{pmatrix}.$$

Denoteremo con

$$[L] = (\cdots : r_i q_j - r_j q_i : \ldots)$$

il punto $[L] \in \mathbb{G}(1, n)$ corrispondente alla retta L.

Proposizione 2. *L'insieme*

$$\mathcal{U} = \{([L], p) \mid p \in L \subset \mathbb{P}^n\} \subset \mathbb{G}(1, n) \times \mathbb{P}^n$$

è un chiuso irriducibile di $\mathbb{G}(1, n) \times \mathbb{P}^n$*. Si chiama famiglia universale della Grassmanniana.*

Dimostrazione. Un punto $p = (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n$ appartiene alla retta $L = \overline{RQ}$ se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ r_0 & r_1 & \dots & r_n \\ q_0 & q_1 & \dots & q_n \end{pmatrix}$$

ha rango due. Sviluppando i determinanti dei minori di ordine tre rispetto alla prima riga usando il Primo Teorema di Laplace, otteniamo delle relazioni biomogenee di bigrado $(1, 1)$ nelle x_i e nelle coordinate plückeriane p_{ij}. Questo dimostra che sU è chiusa nel prodotto.

Per dimostrare l'irriducibilità, osserviamo che la prima proiezione

$$\pi_1 : \mathcal{U} \to \mathbb{G}(1, n)$$

ha fibre irriducibili ed equidimensionali, in quando sono isomorfe a $\mathbb{P}^1$. Per il Teorema 0.4 di irriducibiltà delle Note su Dimensione di Intersezioni, $\mathcal{U}$ è irriducibile. □

Proposizione 3. *Sia* $Z \subset \mathbb{G}(1, n)$ *un chiuso. Allora*

$$C_Z := \bigcup_{[L] \in Z} L \subset \mathbb{P}^n$$

è un chiuso.

Proposizione 4. *Sia* $X \subset \mathbb{P}^n$ *una varietà proiettiva. Allora*

$$W_X := \{[L] \in \mathbb{G}(1, n) \mid L \cap X \neq \emptyset\} \subset \mathbb{G}(1, n)$$

è un chiuso di $\mathbb{G}(1, n)$*.*

Corollario 2. *Siano* $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ *due varietà proiettive disgiunte. Allora*

$$J(X, Y) := \bigcup \{L \subset \mathbb{P}^n \mid L \cap X \neq \emptyset,\ L \cap Y \neq \emptyset\} \subset \mathbb{P}^n$$

è un chiuso di $\mathbb{P}^n$*, che si chiama join di* X *e* Y*.*

2 Quadrica di Klein

Nel caso $n + 1 = 4$, la varietà grassmanniana $G(2, 4) = \mathbb{G}(1, 3) \subset \mathbb{P}^5$ parametrizza le rette di $\mathbb{P}^3$. La sua dimensione è

$$\dim \mathbb{G}(1, 3) = 4,$$

quindi è un'ipersuyperficie. È facile verificare che le coordinate plückeriane dei punti di $\mathbb{G}(1, 3)$ soddisfano l'equazione

$$p_{01}\, p_{23} - p_{02}\, p_{13} + p_{03}\, p_{12} = 0,$$

che determina un quadrica irriducibile, quindi coincide con $\phi(\mathbb{G}(1, 3))$, che viene chiamata *Quadrica di Klein*.