ESERCIZI DI IGS3 - TERZO FOGLIO

(1) Si dimostri che:
  (a) Se $\varphi : \mathbb{P}^1 - - \to \mathbb{P}^n$ è un'applicazione razionale, allora φ si estende a un morfismo $\widetilde{\varphi} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$.
  (b) Si determini l'immagine della mappa razionale di Cremona
$$\psi : \mathbb{P}^2 - - \to \mathbb{P}^2, \qquad \psi(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2),$$
  e se ne deduca che ψ non si può estendere ad un morfismo $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$.

(2) Si consideri la varietà grassmanniana $\mathbb{G}(1,3) \subset \mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$ delle rette di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$. Si dimostri che i seguenti insiemi sono chiusi e si determinino le rispettive dimensioni:

- fissato $P \in \mathbb{P}^3$, sia
$$\Gamma_P := \{l = [L] \in \mathbb{G}(1,3) \mid L \ni P\} \subset \mathbb{G}(1,3);$$
si determinino anche delle equazioni per le coordinate plückeriane di L, date le coordinate omogenee $(p_0 : p_1 : p_2)$ di P;

- si consideri
$$\Omega := \{(l, l') = ([L], [L']) \mid L \cap L' \neq \emptyset\} \subset \mathbb{G}(1,3) \times \mathbb{G}(1,3);$$
si determinino anche delle equazioni nelle coordinate plückeriane (suggerimento: si consideri il Secondo Teorema di Laplace per lo sviluppo del determinante di una matrice, Edoardo Sernesi, Geometria 1, Bollati Boringhieri 1989, capitolo 1, sezione 6, Teorema 6.13);

- per il piano $\Lambda = V_P(x_0) \subset \mathbb{P}^3$, sia
$$\Gamma_\Lambda := \{l = [L] \in \mathbb{G}(1,3) \mid L \subset \Lambda\} \subset \mathbb{G}(1,3).$$