PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA - A.A. 2017/18

CORSI DI LAUREA IN INGEGNERIA NAVALE ED INDUSTRIALE

Trieste, 1/6/2018 *Prof. Dario Portelli*

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate

1.– a) Si consideri la matrice (dove $a, b \in \mathbb{R}$ sono due parametri fissati)

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & 0 & 0 \\ \frac{b}{2} & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2b \end{bmatrix}$$

Si dica se esistono coppie $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ per le quali si abbia che il rango della matrice A sia rispettivamente 4,3,2,1,0.
b) Si calcoli il determinante della matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{bmatrix}$$

dove a, b, c, d sono parametri reali.

2.– Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ si considerino il sottospazio U generato dai vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ed il sottoinsieme V dato da tutte le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 8x - 5y - 7z + t - w &= 0 \\ 3x - 2y - 3z + t &= 0 \\ 2x - y - z - t - w &= 0 \\ 5x - 3y - 4z - w &= 0 \end{cases}$$

i) Si verifichi che V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

ii) Si determinino basi e dimensione sia per U che per V.

iii) Sia determini $U + V$. Si dica se la somma $U + W$ è diretta oppure no.

3.– La seguente matrice

$$A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

definisce rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ la forma bilineare $\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ data, per arbitrari $u, v \in \mathbb{R}^4$, da

$$u = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad , \quad v = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \qquad \varphi(u,v) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

(prodotto righe per colonne di matrici). Se $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$, questo equivale alla condizione

$$\varphi(e_i, e_j) = a_{ij}$$

per ogni coppia di numeri interi i, j con $1 \leq i, j \leq 4$. Costruire una base ortonormale $\mathscr{B}$ di $\mathbb{R}^4$ (rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$) tale che la matrice che rappresenta φ rispetto a $\mathscr{B}$ sia diagonale.

3.– Esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, tutta formata da autovettori dell' endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dato da

$$f : \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} x - 3\,z \\ 0 \\ -\,3\,x + 9\,z \end{vmatrix} \qquad \text{per ogni} \quad \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

4.– Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$, dotato di un sistema di coordinate affini O, x, y, z, si considerino i punti $P\,(1, -1, 1)$ e $Q_a\,(2, 0, a)$, quest' ultimo dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$.

(i) Per ogni valore del parametro $a \in \mathbb{R}$, si determinino equazioni parametriche e cartesiane della retta R_a di $\mathbb{A}^3$ passante per P e Q_a.

(ii) Per quali $a \in \mathbb{R}$ la retta R_a è parallela al piano S di equazione cartesiana $2x - y + 3z = 1$?