CORREZIONE del COMPITO di GEOMETRIA del 1/6/18

ESERCIZIO 1 a)

rg(A) = 4 $\iff$ le colonne (o le righe) di A sono linearmente indipendenti tra loro $\iff \det(A) \neq 0$

$$\det(A) = -2b \det \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & 0 \\ \frac{b}{2} & a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} = 2ab \det \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & a \end{bmatrix} = 2ab\left(a^2 - \frac{b^2}{4}\right) =$$

$$= 2ab\left(a - \frac{b}{2}\right)\left(a + \frac{b}{2}\right)$$ e quindi

$\det(A) \neq 0 \iff$ valgono tutte e quattro le condizioni:

(1) $a \neq 0$, (2) $b \neq 0$, (3) $a - \frac{b}{2} \neq 0 \iff b \neq 2a$

(4) $a + \frac{b}{2} \neq 0 \iff b \neq -2a$

Vediamo che cosa succede quando una delle condizioni (1), ..., (4) non è soddisfatta.

Ad esempio, sia $a = 0$. Allora la matrice A diventa:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{b}{2} & 0 & 0 \\ \frac{b}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2b \end{bmatrix}$$

Il rango di tale matrice è

3 se $b \neq 0$

0 se $b = 0$

Osserviamo che se $b \neq 0$, cioè se è soddisfatta la (2), allora sono soddisfatte anche le condizioni (3) e (4).

Se, invece, si ha $b = 0$, allora la matrice A diventa

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

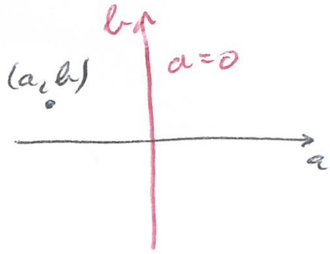
il cui rango è

3 se $a \neq 0$

0 se $a = 0$

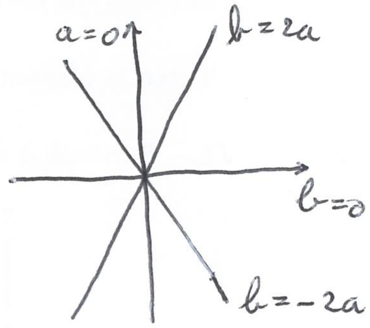
Inoltre, anche qui $a \neq 0$, $b = 0 \implies b \neq 2a$ e $b \neq -2a$

Consideriamo (a,b) come coordinate cartesiane in un piano (a="ascisse", b="ordinate"). Allora $a=0$ è l'equazione di uno degli assi coordinati.



Un punto (a,b) verifica la condizione (1) se e solo se il punto corrispondente non appartiene a tale asse.

Possiamo assegnare a ciascuna delle condizioni (1),(2),(3),(4) una retta in tale piano cartesiano. Le quattro rette sono come nella figura qui a lato.



Questo mostra chiaramente che, se un punto (a,b) non verifica <u>due</u> tra le condizioni (1),(2),(3),(4) allora tale punto è necessariamente l'origine $(a,b)=(0,0)$, A è la matrice 4×4 nulla e $\underline{rg(A)=0}$.

Per concludere l'esercizio basta, quindi, capire che cosa succede quando (a,b) non verifica (3), oppure (4), ma verifica le tre altre condizioni.

Ad esempio, sia $\underline{b=2a}$ (ma $a\neq 0$, $b\neq 0$ e $b\neq -2a$).
La matrice A diventa

$$\begin{bmatrix} a & a & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4a \end{bmatrix} \quad e \quad rg(A)=3$$

In conclusione, $rg(A)$ può essere solo 4, 3 o 0.

Se $b=-2a$, allora la matrice A diventa ....

ESERCIZIO 1 b)

$$\det\begin{bmatrix}1 & a & a^2 & a^3\\ 1 & b & b^2 & b^3\\ 1 & c & c^2 & c^3\\ 1 & d & d^2 & d^3\end{bmatrix} \overset{\text{op. elementari sulle righe}}{=} \det\begin{bmatrix}1 & a & a^2 & a^3\\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3\\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3\\ 0 & d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3\end{bmatrix} \overset{\text{regola di Laplace}}{=}$$

$$= \det\begin{bmatrix}b-a & (b-a)(b+a) & (b-a)(b^2+ba+a^2)\\ c-a & (c-a)(c+a) & (c-a)(c^2+ca+a^2)\\ d-a & (d-a)(d+a) & (d-a)(d^2+da+a^2)\end{bmatrix} \overset{\text{multilinearità del determinante}}{=}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\det\begin{bmatrix}1 & b+a & b^2+ba+a^2\\ 1 & c+a & c^2+ca+a^2\\ 1 & \underbrace{d+a}_{C_2-aC_1} & d^2+da+a^2\end{bmatrix} \overset{\text{op. elementari sulle colonne}}{=}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\det\begin{bmatrix}1 & b & b^2+ba+a^2\\ 1 & c & c^2+ca+a^2\\ 1 & d & \underbrace{d^2+da+a^2}_{C_3-a^2C_1-aC_2}\end{bmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\det\begin{bmatrix}1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\\ 1 & d & d^2\end{bmatrix} \overset{\text{op. elementari sulle righe}}{=}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\det\begin{bmatrix}1 & b & b^2\\ 0 & c-b & c^2-b^2\\ 0 & d-b & d^2-b^2\end{bmatrix} \overset{\text{multilinearità del determinante}}{=}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\det\begin{bmatrix}1 & b & b^2\\ 0 & c-b & (c-b)(c+b)\\ 0 & d-b & (d-b)(d+b)\end{bmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\det\begin{bmatrix}1 & b & b^2\\ 0 & 1 & c+b\\ 0 & 1 & d+b\end{bmatrix} \overset{\text{regola di Laplace}}{=}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$ IL RISULTATO !

ESERCIZIO 2

i) V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ perché è l'insieme di tutte le soluzioni di un sistema lineare <u>omogeneo</u>

ii) Determiniamo $\dim(V)$ ed una base di V.
La matrice dei coefficienti del SL ~~(*)~~ (1) è

$$A=\begin{bmatrix} 8 & -5 & -7 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 8 & -5 & -7 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad R_1 \to R_1 - R_2 \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 8 & -5 & -7 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 \rightsquigarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightsquigarrow R_3 - 8R_1 \\ R_4 \rightsquigarrow R_4 - 5R_1 \end{matrix} \rightsquigarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 3 & 9 & -15 & -9 \\ 0 & 2 & 6 & -10 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A' \xrightarrow[\substack{R_3 \rightsquigarrow R_3 - 3R_2 \\ R_4 \rightsquigarrow R_4 - 2R_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A''$$

$$rg(A) = rg(A'') = 2$$

Allora $\dim(V) = 5 - 2 = \underline{3}$

$$A'' \xrightarrow{R_1 \rightsquigarrow R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = -z + 3t + 2w \\ y = -3z + 5t + 3w \end{cases} \quad (2)$$

colonne dei pivots

z, t, w sono <u>parametri</u> ~~liberi~~ <u>liberi</u>

x	y	z	t	w
1	3	-1	0	0
3	5	0	1	0
2	3	0	0	1

Una base di V è data dai vettori

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Troviamo una base e dimensione per U.

v_5 e v_1 sono chiaramente lin. indipendenti tra loro.

Inoltre: $v_1 - v_5 = v_2$ quindi v_2 si può scartare.

$v_3 = a v_1 + b v_5$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$? Se tale uguaglianza è verificata, allora necessariamente:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = v_3 = a v_1 + b v_5 = \begin{bmatrix} 5a + b \\ 4a \\ 3a + b \\ 2a \\ a + b \end{bmatrix} \Longrightarrow a = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad a = 1$$

assurdo.

Dunque v_1, v_3, v_5 sono linearmente indipendenti.
Procediamo analogamente per v_4:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \overset{\boxtimes}{=} a v_1 + b v_3 + c v_5 = \underbrace{\begin{bmatrix} 5a + b + c \\ 4a - 2b \\ 3a + 3b + c \\ 2a + 2b \\ a - b + c \end{bmatrix}}_{u =} \Longrightarrow \begin{cases} 4a - 2b = -2 \\ 2a + 2b = 2 \\ a - b + c = 1 \end{cases}$$

devo determinare (se esistono) a, b, c. Questo sistema basta.

$$\begin{cases} 2a - b = -1 \\ a + b = 1 \\ a - b + c = 1 \end{cases}$$

ha come unica soluzione $a = 0 \quad b = 1 \quad c = 2$
Si verifica subito che con tali valori di a, b, c la $\boxtimes$ è soddisfatta.

Dunque v_1, v_3, v_5 formano una base di U e $\dim(U) = 3$.

iii) Cominciamo col "calcolare" $U \cap V$.

Un generico elemento di U è $a v_1 + b v_2 + c v_3$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$, cioè è u scritto qui sopra. Per verificare se $u \in V$ è suff. sostituire le componenti di u nelle equazioni lineari che definiscono V, cioè nelle (2u) a pag. 4:

$$\begin{cases} 5a + b + c = -(3a + 3b + c) + 3(2a + 2b) + 2(a - b + c) & \text{OK} \\ 4a - 2b = -3(3a + 3b + c) + 5(2a + 2b) + 3(a - b + c) & \text{OK} \end{cases}$$

Cioè: comunque si scelgano $a, b, c \in \mathbb{R}$ le relazioni precedenti sono identicamente soddisfatte !!! Questo significa $U \subset V$. Ma $\dim(U) = \dim(V)$, quindi $\underline{U = V}$. Questo implica immediatamente che $\underline{U + V = U}$. Ma implica anche che $U \cap V = U \neq \{0\}$, quindi $U+V$ <u>non è</u> una somma diretta.

SOLUZIONE ALTERNATIVA di iii)

$U+V \overset{\text{def}}{=} \{u+v \mid u \in U, v \in V\}$ quindi si ha

$U = \{u + 0 \mid u \in U\} \subset U+V$ (✱)

La definizione di $U+V$ ricordata qui sopra mostra anche che un sistema di generatori per $U+V$ è dato dall'unione di una base di U ed una base di V.

Quindi nel nostro caso un sistema di generatori per $U+V$ è dato da $\{\underbrace{u_1, u_2, u_3}_{\substack{\text{base di } U \\ \text{pag. 4}}}, \underbrace{v_1, v_3, v_5}_{\text{base di } V}\}$

L'inclusione (✱) ci mostra come, per costruire una base di $U+V$ possiamo partire da una base di U. Quindi u_1, u_2, u_3 faranno parte della base di $U+V$ che vogliamo costruire.

Ci serve v_1 in questa base? Ci servirà solo se v_1 non è combinazione lineare di u_1, u_2, u_3. Verifichiamolo

$$\begin{vmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \overset{?}{=} a \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3b+2c \\ 3a+5b+3c \\ -a \\ b \\ c \end{vmatrix} \Rightarrow -a = 3 \quad \underbrace{a = -3 \quad b = 2 \quad c = 1}_{\text{funzionano!}}$$

Dunque "buttiamo via" v_1

Analogamente si vede che anche v_3 e v_5 sono combinazioni lineari di u_1, u_2, u_3. Dunque $\{u_1, u_2, u_3\}$ è una base di $U+V \implies V \subset U$ $\dim(V) = 3 = \dim(U) \implies U = V$.

ESERCIZIO 3

La matrice A è simmetrica quindi è diagonalizzabile per il Teorema Spettrale. Più precisamente, esisterà una matrice ortogonale $P \in O(4)$ tale che ${}^tPAP = D$, matrice diagonale.

$P \in O(4) \iff P$ (è invertibile e) $P^{-1} = {}^tP$. Dunque

$D = {}^tPAP = P^{-1}AP$. Quindi D ed A sono matrici simili e pertanto hanno lo stesso polinomio caratteristico.

$$p_A(t) = \det(A - tI_4) = \det\begin{bmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -t \end{bmatrix} \overset{\text{regola di Laplace}}{=} (1-t)(-1-t)(t^2-1) = (t-1)(t+1)(t-1)(t+1)$$

$p_A(t) = (t-1)^2(t+1)^2 \implies$ gli autovalori di A sono 1 e -1, entrambi con molteplicità (algebrica = geometrica in questo caso per il Teorema Spettrale) $= 2$.

Un'ispezione di A ci mostra subito che e_1 è autovettore rel. all'autovalore 1, mentre e_2 è autovettore rel. all'autovalore -1.

Comunque:

$\boxed{\lambda = 1}$

$$A - I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$rg(A - I_4) = 2 \implies$ la dimensione dell'autospazio E_1 sarà $4 - 2 = 2$

$$(A - I_4)\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

è equivalente al sistema lineare

$$\begin{cases} y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

due soluzioni linearmente indipendenti sono

e_1 e $u_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ +1/\sqrt{2} \end{vmatrix}$

$e_1 \perp u_3$ e $\|e_1\| = \|u_3\| = 1$

$\boxed{\lambda = -1}$ $\quad A + I_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad rg(A+I_4) = 2 \implies$

$\dim(E_{-1}) = 4 - 2 = 2$

$(A+I_4)\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ è equivalente al sistema lineare $\begin{cases} x = 0 \\ z + t = 0 \end{cases}$ due soluzioni linearmente indipendenti del quale sono

e_2 e $u_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$ $\quad e_2 \perp u_4 \quad \|e_2\| = \|u_4\| = 1$

e_1, u_3, e_2, u_4 sono quattro versori, a due a due ortogonali tra loro. Quindi formano una base ON di $\mathbb{R}^4$ rispetto al prodotto scalare standard. Pertanto la matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

le cui colonne sono rispettivamente e_1, u_3, e_2, u_4 è una matrice ortogonale.

Si verifica facilmente (l'avete fatto ?...) che

$${}^tPAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Quindi $\mathcal{B} = (e_1, u_3, e_2, u_4)$ è la base ON di $\mathbb{R}^4$ cercata.

ESERCIZIO 4

Sia $v \in \mathbb{R}^3$ $v \neq \underline{0}$ una base della direzione di r.
Sia $s \subset \mathbb{R}^3$ una retta la cui direzione sia generata dal vettore $u \in \mathbb{R}^3$. Dunque $u \neq 0$.

Le rette r ed s si dicono <u>ortogonali</u> se $\langle v, u \rangle = 0$ ($\langle -,- \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ indica il prodotto scalare standard). Definiamo

$$W \overset{def}{=} (\mathbb{R}v)^{\perp} = \{ u \in \mathbb{R}^3 \mid \langle u, v \rangle = 0 \}$$

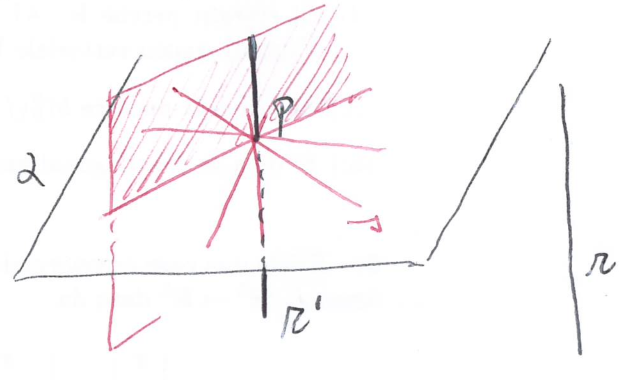
W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

$$\dim(\mathbb{R}v) = 1 \implies \dim(W) = 3 - 1 = 2$$

Quindi, una retta $s \subset \mathbb{E}^3$ ortogonale ad r ha la direzione contenuta in W.

Se α è il piano $P + W$ (cioè: passante per il punto P, ed avente per giacitura W), allora $s \subset \alpha$

Se imponiamo, infine, la condizione che $P \in s$ si vede subito che le rette cercate sono le rette sul piano α passanti per P. Esse formano un fascio di rette.



Equazioni cartesiane per tali rette si trovano considerando, ad esempio:

- l'equazione del piano α e
- l'equazione di un qualsiasi piano contenente la retta r', parallela ad r e passante per P (questa famiglia di piani è un <u>fascio di piani</u> [proprio] in $\mathbb{E}^3$)

Sia r di equazioni cartesiane $\begin{matrix} x-3y+1=0 \\ 2y-z-5=0 \end{matrix}$

Cerchiamo la sua direzione:

$$\begin{cases} x-3y=0 \\ 2y-z=0 \end{cases} \qquad v=\begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

La retta r' avrà equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+t \\ z=5+2t \end{cases} \Rightarrow t=y-2 \Rightarrow \begin{cases} x=1+3(y-2) \\ z=5+2(y-2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x-3y+5=0 \\ 2y-z+1=0 \end{cases}$$

equazioni cartesiane per r'

Inoltre:

$$W \qquad \left\langle \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \right\rangle 0 \iff 3x+y+2z=0$$

Il generico piano di $\mathbb{E}^3$ avente giacitura W ha equazione $3x+y+2z=d$. Impongo il passaggio per P:

$$3\cdot 1+2+2\cdot 5=d \qquad d=15$$

$\underline{\alpha}$ è il piano di equazione $\underline{3x+y+2z=15}$

In conclusione, le rette in $\mathbb{E}^3$ ortogonali ad r e passanti per il punto P sono tutte e sole quelle per le quali equazioni cartesiane sono date da:

$$\begin{matrix} 3x+y+2z=15 \\ \lambda(x-3y+5)+\mu(2y-z+1)=0 \qquad (\lambda,\mu)\neq(0,0) \end{matrix}$$

<u>OSSERVAZIONE</u> Non era necessario prendere $r' \parallel r$.
Bastava $r' \not\subset \alpha$ e $P\in r'$.