NOTE DI ISTITUZIONI DI GEOMETRIA SUPERIORE 3

4 giugno 2018

Indice

0.1 Testi di prove scritte

30.5.2012

1.
   - Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ con $n \geq 2$ un'ipersuperficie riducibile. Si dimostri che
   $$\dim X_{sing} \geq n - 2.$$
   - Sia $0 < m \leq n$ e si consideri $Q_m = V_P(x_0^2 + \cdots + x_m^2) \subset \mathbb{P}^n$. Si dimostri che Q_m è riducibile se e solo se $m = 1$.

2. Curve piane singolari: sia $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d)$ con $d \geq 2$ e si consideri
   $$X := \{(p, [F]) \mid p \in V(F)_{sing} \subset \mathbb{P}^2\} \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^N.$$
   - Si dimostri che X è un chiuso di $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^N$;
   - si consideri la proiezione $p_1 : X \to \mathbb{P}^2$ e si dimostri che $\dim X = N - 1$;
   - si considerino le fibre della proiezione $p_2 : X \to \mathbb{P}^N$ e si dimostri che il sottoinsieme di $\mathbb{P}^N$ corrispondente alle curve singolari è un'ipersuperficie.

3. Si consideri il chiuso X di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ determinato dall'equazione
   $$s_0 x_1^2 + s_1 x_2 (x_2 - x_0) = 0.$$
   - Si dimostri che esiste un aperto $U \subset \mathbb{P}^1$ tale che le fibre di $p_1 : X \to \mathbb{P}^1$ sui punti di U siano coniche irriducibili piane;
   - si determinino i punti q di $\mathbb{P}^1$ per cui $p_1^{-1}(q)$ è riducibile;
   - si dica in quali casi i punti singolari delle fibre riducibili $p_1^{-1}(q)$ sono punti singolari di X.

25.6.2012

1. Si dimostri che lo scoppiamento $\widehat{\mathbb{A}}^2$ di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ nell'origine non è isomorfo a una varietà affine.

2. Sia $n \geq 1$, $N = \binom{d+2}{2} - 1$ e siano $M_0, \ldots, M_N$ i monomi di grado d in x_0, x_1, x_2. Denotiamo con $y_0, \ldots, y_N$ le coordinate omogenee di $\mathbb{P}^N$. Sia
   $$Z = V(\sum_{i=0}^{N} M_i(x_0, x_1, x_2) y_i) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^N.$$
   e sia $p_2 : Z \to \mathbb{P}^N$ la restrizione della seconda proiezione.

   Si dimostri che Z è un chiuso irriducibile di $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^N$ e che p_2 è un morfismo. Inoltre $\forall\ a = (a_0 : \cdots : a_N) \in \mathbb{P}^N$, sia
   $$C_a = Z\left(\sum_{i=0}^{N} M_i(x, y, z) a_i\right).$$
   Si dimostri che $p_2^{-1}(a) = C_a \times \{a\}$.

3. Sia $\mathcal{C} = \{s_0Q_0(x_0, x_1, x_2) + s_1Q_1(x_0, x_1, x_2)\}$ un fascio di coniche proiettive piane su $\mathbb{C}$ con Q_0 e Q_1 equazioni di coniche irriducibile fissate. Sia $\overline{Q}$ una conica singolare del fascio. Si dimostri che un punto singolare p di $\overline{Q}$ è singolare per il chiuso

$$Z = V(s_0Q_0(x_0, x_1, x_2) + s_1Q_1(x_0, x_1, x_2)) \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

se e solo se p è un punto base del fascio $\mathcal{C}$ (cioè $p \in Q\ \forall Q \in \mathcal{C}$).

Suggerimento: si consideri per semplicità solo il caso $p = ((1 : \overline{t}), (1 : \overline{x} : \overline{y}))$.

12.9.2012

1. Si consideri la cubica nodata $C = V_P(x_0x_2^2 - x_1^2(x_1 + x_0)) \subset \mathbb{P}^2$. Si dimostri che la proiezione $\pi_{(1:0:0)} : C \to V_P(x_0)$ è una mappa birazionale.

2. Sia $\varphi : X \to Y$ un morfismo suriettivo di varietà quasi-proiettive. Sia $Z \subset Y$ un chiuso. Si dimostri che se $\varphi^{-1}(Z)$ è irriducibile, allora Z è irriducibile.

3. Si consideri il chiuso X di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ determinato dall'equazione

$$s_0x_1^2 + s_1x_2^2 = 0,$$

dove $((s_0 : s_1), (x_0 : x_1 : x_2)) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ indicano le coordinate.

- Si determinino i punti di $\mathbb{P}^1$ per cui le fibre della prima proiezione $p_1 : X \to \mathbb{P}^1$ sono coniche piane riducibili;
- si dica in quali casi i punti singolari delle fibre riducibili $p_1^{-1}(q)$ sono punti singolari di X.

1. Sia $f : X \to Y$ un morfismo finito suriettivo tra varietà affini. Si dimostri che:

- f è chiuso;
- f preserva le inclusioni strette di chiusi irriducibili;
- $\dim X = \dim Y$.

2. Si dimostri che il sottoinsieme di $Z \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_4)$ costituito dalle classi di polinomi omogenei riducibili di grado 4 è un chiuso proprio e si determinino le sue componenti irriducibili con le relative dimensioni.

3. Sia $f : \mathbb{P}^2 - - \to \mathbb{P}^2$ l'applicazione razionale - *trasformazione di Cremona* - determinata da

$$(x_0 : x_1 : x_1) \to (x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2).$$

Si dimostri che f è birazionale e che f stessa è una inversa.

30.10.2014

1. Sia $f : X \to Y$ un morfismo finito suriettivo tra varietà proiettive su un campo algebricamente chiuso. Si dimostri che per ogni chiuso proprio $Z \subset X$ si ha $f(Z) \neq Y$.

2. Si dimostri che il sottoinsieme di $Z \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_3)$ costituito dalle classi di polinomi omogenei riducibili di grado 3 è un chiuso proprio e si determinino le sue componenti irriducibili con le relative dimensioni.

3. Si consideri il chiuso X di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ determinato dall'equazione
$$s_0 x_1^2 + s_1 x_2(x_2 - x_0) + s_2 x_0^2 = 0.$$
   - Si dimostri che esiste un aperto $U \subset \mathbb{P}^2$ tale che le fibre di $p_1 : X \to \mathbb{P}^2$ sui punti di U siano coniche irriducibili piane;
   - si determini e si descriva il sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{P}^2$ per cui $p_1^{-1}(q)$ è riducibile;
   - si dica in quali casi i punti singolari delle fibre riducibili $p_1^{-1}(q)$ sono punti singolari di X.

1. Si dimostri che una varietà affine $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ è un'ipersuperficie se e solo se
$$\dim X = n - 1.$$

2. Si consideri la varietà grassmanniana $\mathbb{G}(1, 3) \subset \mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$ delle rette di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$. Si dimostri che i seguenti insiemi sono chiusi e si determinino le rispettive dimensioni:
   - fissato $P \in \mathbb{P}^3$, $\Gamma_P := \{l \in \mathbb{G}(1, 3) | L \ni P\}$;
   - $\Omega := \{(l, l') | l \cap l' \neq \emptyset\} \subset \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$.

3. Si dimostri che la quadrica liscia $Q \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$
$$Q = V_P(x_0 x_3 - x_1 x_2)$$
è birazionalmente equivalente a $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, ma non è isomorfa a $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

19 settembre 2016

1. Sia K algebricamente chiuso. Si dimostri che:
   (a) se $X \subseteq \mathbb{P}^n$ è una varietà proiettiva, allora
   $$\mathcal{O}_X(X) \cong K.$$
   (b) Se $X \subseteq \mathbb{P}^n$ è una varietà proiettiva e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ è una varietà affine, allora ogni morfismo
   $$f : X \to Y$$
   è costante.

2. Si consideri il chiuso X di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ determinato dall'equazione
$$s_0 x_1^2 - s_1 x_0 x_2 = 0.$$

- Si dimostri che esiste un aperto $U \subset \mathbb{P}^1$ tale che le fibre di $p_1 : X \to \mathbb{P}^1$ sui punti di U siano coniche irriducibili piane;
- si determinino i punti q di $\mathbb{P}^1$ per cui $p_1^{-1}(q)$ è riducibile;
- si dica in quali casi i punti singolari delle fibre riducibili $p_1^{-1}(q)$ sono punti singolari di X.

3. Si consideri la varietà grassmanniana $\mathbb{G}(1,3) \subset \mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$ delle rette di $\mathbb{P}^3$. Si dimostri che l' insieme Γ_Q è chiuso e se ne determini la dimensione:

$$Q = V_P(x_0x_3 - x_1x_2), \qquad \Gamma_Q := \{l \in \mathbb{G}(1,3) | l \subset Q\}.$$

13 settembre 2016

1. Si dimostri che se X è una varietà proiettiva, Y una varietà quasiproiettiva, su un campo algebricamente chiuso, e $f : X \to Y$ un morfismo, allora f è chiuso.

2. Sia $\sigma_{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}(K^{n+1} \otimes K^{m+1})$ la mappa di Segre. Si dimostri che $\forall Q \in \mathbb{P}^m$, la mappa

$$i_Q : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N, \qquad i_Q(P) = \sigma_{n,m}(P,Q),$$

è un morfismo che immerge $\mathbb{P}^n$ isomorficamente come sottospazio proiettivo.

3. Sia $X \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ un'ipersuperficie di grado $d \geq 2$. Si dimostri che se X contiene un piano proiettivo $L \cong \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, allora X ha punti singolari.

14 ottobre 2013

1.
   - Sia $\varphi : X \to Y$ un morfismo tra X varietà proiettiva e Y quasiproiettiva su un campo algebricamente chiuso. Si dimostri che $f(X)$ è chiuso in Y.
   - Si caratterizzino le varietà che sono sia affini che proiettive.

2. Si dimostri che $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ e lo scoppiamento $\hat{\mathbb{A}}^2$ di $\mathbb{A}^2$ in un punto sono varietà razionali.

3. Si dica se esistono fasci di coniche piane proiettive costituiti da sole coniche doppiamente riducibili, e si giustifichi la risposta.

1. Sia $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ una varietà proiettiva, e $F \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ un polinomio omogeneo di grado $d \geq 1$.

   - Si dimostri che $X_F := X \setminus V_P(F)$ è isomorfo a una varietà affine;
   - si dimostri che se X non è un punto, allora $X \cap V_P(F) \neq \emptyset$.

2. Sia $X \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ un'ipersuperficie di grado $d \geq 2$. Si dimostri che se X contiene un piano proiettivo $L \cong \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, allora X ha punti singolari.

3. Si dimostri che il sottoinsieme di $Z \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_3)$ costituito dalle classi di polinomi omogenei riducibili di grado 3 è un chiuso proprio e si determinino le sue componenti irriducibili.

1 settembre 2016

1. Si dimostri che se X è una varietà proiettiva, Y una varietà qp, su un campo algebricamente chiuso, e $f : X \to Y$ un morfismo, allora f è chiuso.
2. Sia $V_{n,d}$ la varietà di Veronese.
   - Si dimostri che $V_{n,d}$ non è contenuta in alcun iperpiano.
   - Si dimostri che $V_{2,2}$ non contiene rette.
3. Si dimostri che la quadrica liscia $Q \subset \mathbb{P}^3$

$$Q = V_P(x_0x_3 - x_1x_2)$$

   è birazionalmente equivalente a $\mathbb{P}^2$, ma non è isomorfa a $\mathbb{P}^2$ (suggerimento: si consideri un opportuno morfismo di Segre).

12 luglio 2017
In tutti gli esercizi si supponga K algebricamente chiuso.

1. Si dimostri che:
   (a) se $X \subseteq \mathbb{P}^n$ è una varietà proiettiva, allora

$$\mathcal{O}_X(X) \cong K.$$

   (b) Se $X \subseteq \mathbb{P}^n$ è una varietà proiettiva e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ è una varietà affine, allora ogni morfismo

$$f : X \to Y$$

   è costante.
2. Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ con $n \geq 2$ un'ipersuperficie riducibile. Si dimostri che

$$\dim X_{sing} \geq n - 2.$$

3. Un *gruppo algebrico* è una varietà affine o proiettiva X, che sia anche un gruppo e tale che, se denotiamo con

$$\mu : X \times X \to X, \qquad \mu(x, y) = x \star y,$$

   la mappa di composizione interna, e con

$$\mathcal{I} : X \to X, \qquad \mathcal{I}(x) = x^{-1}$$

   la mappa che ad ogni elemento associa il suo inverso, le mappe μ e $\mathcal{I}$ risultano morfismi.

   Si dimostri che:

(a) $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ è isomorfo a una varietà affine $Y \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.

(b) La struttura di gruppo moltiplicativo su $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ induce una struttura di gruppo su $Y \cong \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, che rende Y un gruppo algebrico, esprimendo esplicitamente le mappe μ e $\mathcal{I}$ in questo caso.

13 giugno 2017

In tutti gli esercizi si supponga K algebricamente chiuso.

4. (a) Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una varietà affine e sia $V(F) \subseteq \mathbb{A}^n$ un'ipersuperficie tale che $X \nsubseteq V(F)$ e $X \cap V(F) \neq \emptyset$. Si dimostri che $X_F := X \setminus V(F)$ è isomorfa a una varietà affine.

   (b) Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva. Si dimostri che se $V_P(F)$ è un'ipersuperficie proiettiva tale che $X \nsubseteq V_P(F)$, allora $X_F := X \setminus V_P(F)$ è isomorfa a una varietà affine.

   (c) Si dimostri che se una varietà affine X è isomorfa a una varietà proiettiva, allora X è un punto.

   (d) Si dimostri che se $X \subseteq \mathbb{P}^n$ è una varietà proiettiva con almeno due punti, allora per ogni ipersuperficie proiettiva $V_P(F) \subseteq \mathbb{P}^n$, si ha

$$X \cap V_P(F) \neq \emptyset.$$

5. Sia $X = V(y^2 - x^2 - x^3)$ e si consideri la funzione razionale $h = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$. In quali punti di X la funzione h è regolare?

   Si dimostri che $h \notin \mathcal{O}_X(X)$.

6. Si dimostri che la quadrica liscia $Q \subset \mathbb{P}^3$

$$Q = V_P(x_0x_3 - x_1x_2)$$

   è birazionalmente equivalente a $\mathbb{P}^2$, ma non è isomorfa a $\mathbb{P}^2$.