CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE AFFINI

Def: $C \subseteq \mathbb{A}^2_K$, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ si dice CONICA AFFINE se

C è il luogo degli zeri di

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0 \qquad (*)$$

con $a_{ij} \in K$ e a_{11}, a_{22}, a_{12} non simultaneamente nulli.

OSS. Data C conica affine, si può associare a C una matrice simmetrica

$$A_C = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

L'equazione $(*)$ si può scrivere in forma matriciale:

$$(1 \ \ x \ \ y)\, A_C \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad (**)$$

PROBLEMA: Sia $f: \mathbb{A}^2_K \to \mathbb{A}^2_K$ un'affinità e sia $C \subseteq \mathbb{A}^2_K$ una conica. L'immagine $f(C)$ è ancora una conica?

$$f: \mathbb{A}^2_K \to \mathbb{A}^2_K$$

$$(x, y) \to (n_{11}x + n_{12}y + d_1,\ n_{21}x + n_{22}y + d_2)$$

$$= (x', y')$$

se $N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}$, in forma

matriciale abbiamo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = N^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - N^{-1} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

Sia $M = N^{-1}$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -N^{-1} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$

È facile verificare che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{M} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

dove $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & m_{11} & m_{12} \\ c_2 & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

Quindi: l'equazione (**) $\Rightarrow$

$$(1\ x'\ y') \underbrace{{}^t\tilde{M} A_C \tilde{M}}_{=:B} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

oss. che ${}^tB = B$, cioè B è simmetrica

Quindi: $f(C) = C'$ è una conica di eq.

$$(1\ x'\ y')\, B \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

OSSERVAZIONE: B e A_C sono CONGRUENTI, quindi hanno lo stesso rango:

$$\operatorname{rg} A_C = \operatorname{rg} B$$

COROLLARIO: $\operatorname{rg} A_C$ è un INVARIANTE AFFINE

Definiamo

$$\operatorname{rg} C := \operatorname{rg} A_C$$

Def.: C si dice: NON DEGENERE se $\operatorname{rg} C = 3$ ($\det A_C \neq 0$)

DEGENERE se $\det A_C = 0$ / SEMPLICEMENTE $\operatorname{rg} A_C = 2$

\ DOPPIAMENTE $\operatorname{rg} A_C = 1$

Consideriamo le sottomatrici

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Lemma: Si ha $B_0 = {}^t M A_0 M$ ✡

Dim. Scriviamo l'affinità inversa:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Se poniamo $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ (§)

abbiamo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ (#)

Con le sost. # (è una traslazione), i coefficienti dei termini quadratici non cambiano

Con la sostituzione (4), la parte omogenea di grado 2

$$a_{11}x''^2 + a_{22}y''^2 + 2a_{12}x''y''$$

viene trasformata in $b_{11}x'^2 + b_{22}y'^2 + 2b_{12}x'y'$

$$e \quad B_0 = {}^tMAM$$

Quindi: Anche B_0 e A_0 sono congruenti

COROLLARIO: $\operatorname{rg} A_0$ è un INVARIANTE AFFINE.

<u>Def.</u>: Se $\det A_0 \neq 0$, C si dice CONICA A CENTRO (vedremo che ammette un centro di simmetria)

Se $\det A_0 = 0$, C si dice PARABOLA

<u>OSS.</u> Nel caso $K = \mathbb{R}$, da (*) segue che anche il <u>segno</u> di $\det A_0$ (se $\neq 0$) è un invariante affine

<u>Def.</u> $C \subseteq A^2_{\mathbb{R}}$ conica a centro si dice

ELLISSE se $\det A_0 > 0$

IPERBOLE se $\det A_0 < 0$

Teorema (Classificazione delle coniche affini)

Ogni conica di $\mathbb{A}^2_K$ è affinemente equivalente a una delle seguenti:

1) $K = \mathbb{C}$

$1_{\mathbb{C}} \cdot \; x^2 + y^2 - 1 = 0$ CONICA A CENTRO

$2_{\mathbb{C}} \cdot \; x^2 + y^2 = 0$ CONICA A CENTRO DEGENERE

$3_{\mathbb{C}} \cdot \; y^2 - x = 0$ PARABOLA

$4_{\mathbb{C}} \cdot \; y^2 - 1 = 0$ PARABOLA DEGENERE

$5_{\mathbb{C}} \cdot \; y^2 = 0$ CONICA DOPPIAMENTE DEGENERE (RETTA DOPPIA)

Inoltre, le coniche delle 5 classi sono a due a due non affinemente equivalenti.

2) $K = \mathbb{R}$

$1_{\mathbb{R}} \cdot \; x^2 + y^2 - 1 = 0$ ELLISSE

$2_{\mathbb{R}} \cdot \; x^2 + y^2 + 1 = 0$ ELLISSE A PUNTI NON REALI

$3_{\mathbb{R}} \cdot \; x^2 + y^2 = 0$ ELLISSE DEGENERE

$4_{\mathbb{R}} \cdot \; x^2 - y^2 - 1 = 0$ IPERBOLE

$5_{\mathbb{R}} \cdot \; x^2 - y^2 = 0$ IPERBOLE DEGENERE

$6_{\mathbb{R}} \cdot \; y^2 - x = 0$ PARABOLA

$7_{\mathbb{R}} \cdot \; y^2 - 1 = 0$ PARABOLE DEGENERI

$8_{\mathbb{R}} \cdot \; y^2 + 1 = 0$ PARABOLE DEGENERI

$9_{\mathbb{R}} \cdot \; y^2 = 0$ CONICA DOPPIAMENTE DEGENERE

Inoltre, le coniche delle 9 classi sono a due a due non affinemente equivalenti.

Dim.:

Passo ① : Eliminazione del termine $2a_{12}xy$:

Cons. $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$;

per il Teorema di diagonalizzazione di forme bilineari simmetriche

A_0 è congruente a una matrice diagonale D:

$\exists M \in GL(2, K) \quad : \quad {}^tMAM = D$

Se consideriamo l'affinità associata alla matrice M^{-1},

abbiamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

e l'equazione della conica immagine è $(1\ x'\ y')\, B \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$

$$\text{con } B = \left(\begin{array}{c|cc} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ \hline b_{01} & & \\ b_{02} & & D \end{array}\right), \quad \text{ovvero}$$

$$b_{11}^2 x'^2 + b_{22} y'^2 + 2 b_{01} x' + 2 b_{02} y' + b_{00} = 0. \quad (**)$$

Abbiamo ora due casi:

ⓐ C è a centro

$\Rightarrow \det D \neq 0$

$= b_{11} \cdot b_{22} \neq 0$

ⓑ C è una parabola

$\det D = 0$, $\operatorname{rg} D = 1$

$b_{11} \cdot b_{22} = 0$

(oss. che non si può avere $\operatorname{rg} D = 0$, altrimenti $(**)$ non è di secondo grado)

A meno di scambio di variabili

Supp. $\boxed{b_{11} = 0, \ b_{22} \neq 0}$

Passo 2: Eliminazione di (alcuni) termini di primo grado ed eventualmente del termine costante.

a) C è centro

con la traslazione

$$\begin{cases} x' = x'' - \dfrac{b_{01}}{b_{11}} \\ y' = y'' - \dfrac{b_{02}}{b_{22}} \end{cases}$$

otteniamo

a) $b_{11} x''^2 + b_{22} y''^2 + c_{00} = 0$

b) C non è centro

con la traslazione

$$\begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' - \dfrac{b_{02}}{b_{22}} \end{cases}$$

otteniamo

$$b_{22} y''^2 + 2 b_{01} x'' + d_{00} = 0$$

b1

se $b_{01} = 0$

b1) $b_{22} y''^2 + d_{00} = 0$

b2

se $b_{01} \neq 0$

con la traslazione

$$\begin{cases} x'' = x''' - \dfrac{d_{00}}{2 b_{01}} \\ y'' = y''' \end{cases}$$

otteniamo

b2) $b_{22} y'''^2 + 2 b_{01} x''' = 0$

Passo 3 : Normalizzazione dei coefficienti:

Distinguiamo ora i casi $K = \mathbb{C}$ e $K = \mathbb{R}$

$K = \mathbb{C}$

ⓐ C a centro

cons. l'equazione ⓐ

Possiamo supporre

$$c_{00} = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$$

se $c_{00} \neq 0$ dividiamo per $(-c_{00})$

Con la sostituzione

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{\tilde{x}}{\sqrt{b_{11}}} \\ y'' = \dfrac{\tilde{y}}{\sqrt{b_{22}}} \end{cases}$$

troviamo $1_{\mathbb{C}}$ e $2_{\mathbb{C}}$

ⓑ C non a centro

Cons. l'equazione b_1

Possiamo supporre

$$d_{00} = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$$

Con la sostituzione

$$\begin{cases} x''' = \tilde{x} \\ y''' = \dfrac{\tilde{y}}{\sqrt{b_{22}}} \end{cases}$$

troviamo $4_{\mathbb{C}}$ e $5_{\mathbb{C}}$

Nel caso b_2, con la sostituzione

$$\begin{cases} x''' = \dfrac{\tilde{x}}{-2b_{01}} \\ y''' = \dfrac{\tilde{y}}{\sqrt{b_{22}}} \end{cases}$$

troviamo $3_{\mathbb{C}}$.

Caso $K=\mathbb{R}$

(a) C a centro

cons. l'equazione (a)

Possiamo supporre

$$c_{00} = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$$

Con la sostituzione

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{\tilde{x}}{\sqrt{|b_{11}|}} \\ y'' = \dfrac{\tilde{y}}{\sqrt{|b_{22}|}} \end{cases}$$

troviamo $1_{\mathbb{R}}, 2_{\mathbb{R}}, 3_{\mathbb{R}}, 4_{\mathbb{R}}, 5_{\mathbb{R}}$

(b) C non a centro

cons. l'equazione (b1)

Possiamo supporre

$$d_{00} = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$$

Con la sostituzione

$$\begin{cases} x''' = \tilde{x} \\ y''' = \dfrac{\tilde{y}}{\sqrt{|b_{22}|}} \end{cases}$$

troviamo $7_{\mathbb{R}}, 8_{\mathbb{R}}, 9_{\mathbb{R}}$

Se cons. l'equazione (b_2)

possiamo supporre

$$b_{22} > 0$$

(altrimenti moltiplichiamo per (-1))

Con la sostituzione

$$\begin{cases} x''' = \dfrac{\tilde{x}}{-2b_{01}} \\ y''' = \dfrac{\tilde{y}}{\sqrt{b_{22}}} \end{cases}$$

troviamo $6_{\mathbb{R}}$.

PROPOSIZIONE: Sia $C \subseteq \mathbb{A}^2_K$ una conica a centro.

Allora C ammette un unico CENTRO DI SIMMETRIA (x_0, y_0), ottenuto come soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11} x + a_{12} y + a_{01} = 0 \\ a_{12} x + a_{22} y + a_{02} = 0 \end{cases}$$

Dim. Vedi Foglio 9 di esercizi.

Ricordiamo la definizione:

<u>Def.</u> C si dice SIMMETRICA rispetto al punto (x_0, y_0) $\Leftrightarrow$ la simmetria $s: \mathbb{A}^2_K \longrightarrow \mathbb{A}^2_K$

$$(x, y) \longrightarrow (x', y') = (2x_0 - x, 2y_0 - y)$$

verifica: $s(C) = C$.