CLASSIFICAZIONE DELLE QUADRICHE AFFINI

1. Classificazione delle quadriche affini di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$

Sia $Q \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ una quadrica e sia $\tilde{Q} \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ la sua chiusura proiettiva; sia infine $Q_\infty = \tilde{Q} \cap V(x_0)$ la conica all'infinito. Allora la classificazione affine di Q è equivalente alla classificazione proiettiva della coppia $(\tilde{Q}, Q_\infty)$, e quindi alla classificazione delle coppie $(\text{rk } \tilde{Q}, \text{rk } Q_\infty)$. La quadrica Q è quindi affinemente equivalente a una delle seguenti:

$(\text{rk } \tilde{Q}, \text{rk } Q_\infty)$		equazione
(4,3)	iperboloide	$1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$
(4,2)	paraboloide	$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 = 0$
(3,3)	cono	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$
(3,2)	cilindro iperbolico	$1 + x_1^2 + x_2^2 = 0$
(3,1)	cilindro parabolico	$1 + x_1^2 + 2x_2 = 0$
(2,2)	due piani incidenti	$x_1 x_2 = 0$
(2,1)	due piani paralleli	$x_1^2 + 2x_1 = 0$
(1,1)	piano doppio	$x_1^2 = 0$

2. Classificazione delle quadriche irriducibili affini di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$

La quadrica $Q \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ è classificata dalla coppia $(\mathrm{sgn}\ \tilde{Q}, \mathrm{sgn}\ Q_\infty)$.

$(\mathrm{sgn}\ \tilde{Q}, \mathrm{sgn}\ Q_\infty)$	punti di Q_∞		equazione
((3,1), (3,0))	immaginari	elissoide	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$
((4,0), (3,0))	immaginari	elissoide immaginario	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$
((2,2), (2,1))	reali	iperboloide iperbolico	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$
((3,1), (2,1))	reali	iperboloide ellittico	$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$
((3,1), (2,0))	immaginari	paraboloide ellittico	$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 = 0$
((2,2), (1,1))	reali	paraboloide iperbolico	$x_1^2 - x_2^2 + 2x_3 = 0$
((2,1), (2,1))	reali	cono	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$
((3,0), (3,0))	immaginari	cono immaginario	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$
((3,0), (2,0)	immaginari	cilindro immaginario	$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$
((2,1), (2,0)	reali	cilindro ellittico	$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$
((2,1), (1,1)	reali	cilindro iperbolico	$x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$
((2,1), (1,0)	reali	cilindro parabolico	$x_1^2 - 2x_3 = 0$

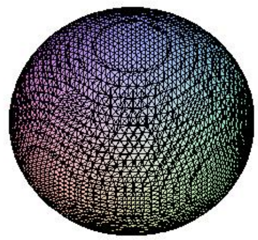

Figure 1. (3,1) (3,0), ellissoide

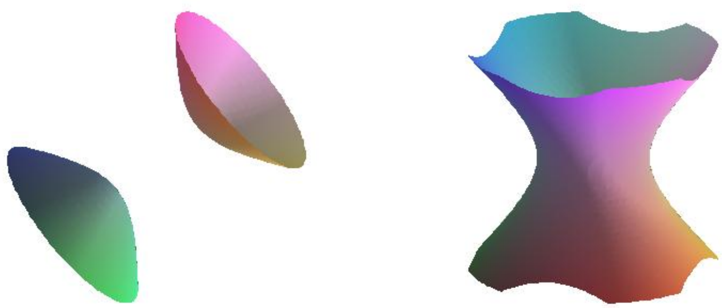

Figure 2. (3,1) (2,1), iperboloide ellittico (2,2) (2,1), iperboloide iperbolico

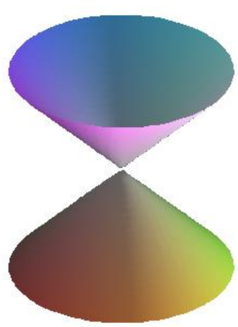

Figure 3. (2,1) (2,1), cono

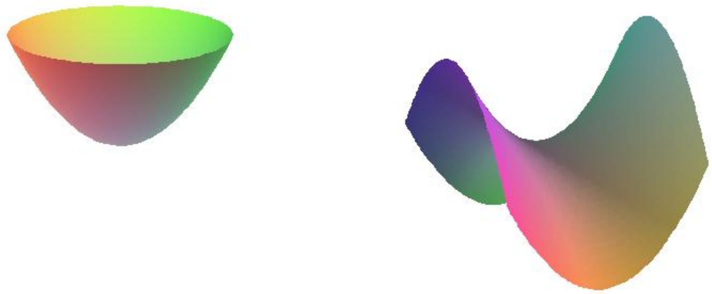

FIGURE 4. (3,1) (2,0), paraboloide ellittico, (2,2) (1,1), paraboloide iperbolico

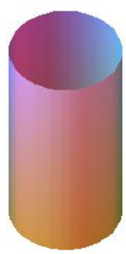

FIGURE 5. (2,1) (2,0), cilindro ellittico.

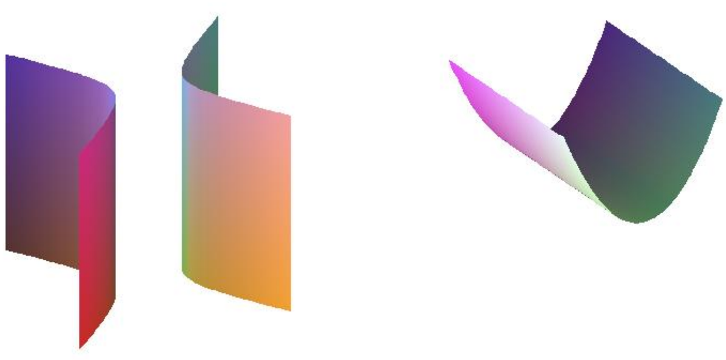

FIGURE 6. (2,1) (1,1), cilindro iperbolico, (2,1) (1,0) cilindro parabolico