PUNTI IMPROPRI DI CONICHE AFFINI NON DEGENERI

Consideriamo l'immersione del piano affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ nel piano proiettivo:

$$j : \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \qquad \left(j : \mathbb{A}^2_{K} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{K} \right)$$

$$(x, y) \longrightarrow [1, x, y]$$

Ricordiamo che la mappa j è iniettiva e che le sue immagine

$$j(\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}) = \{ [x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \mid x_0 \neq 0 \}$$

quindi $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = j(\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}) \cup \underbrace{\{x_0 = 0\}}$

RETTA IMPROPRIA o RETTA ALL'INFINITO

e ricordiamo che se $L \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ è una retta affine di equazione $ax + by + c = 0$, la sua CHIUSURA PROIETTIVA è la retta proiettiva di equazione

$$\overline{L} \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} : a x_1 + b x_2 + c x_0 = 0$$

si ha: $\overline{L} \cap j(\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}) = \{ [1, x, y] \mid ax + by + c = 0 \}$

$$= j(L)$$

e $\overline{L} \cap \{x_0 = 0\} = \{ [0, -b, a] \}$ PUNTO IMPROPRIO o PUNTO ALL'INFINITO

Analogamente possiamo definire la CHIUSURA PROIETTIVA di una CONICA AFFINE!

<u>Def.</u> sia $C \subseteq \mathbb{A}^2_K$ $(K = \mathbb{R}$ opp. $K = \mathbb{C})$

di equazione

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

La sua CHIUSURA PROIETTIVA $\bar{C}$ è la conica proiettiva di equazione:

$$F(x_0, x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0$$

Il polinomio F è ottenuto da f con il procedimento di omogeneizzazione:

<u>Def.</u> Sia $f(x,y) \in K[x,y]$. Il polinomio OMOGENEIZZATO di f RISPETTO A x_0 è:

$$h\,f(x,y) = F(x_0, x_1, x_2) := x_0^{\deg f} \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$$

dove $\deg f$ è il grado di f.

Esempio: Se $f(x,y) = x^2 - y + 1$, $\quad hf = x_0^2\left(\frac{x_1^2}{x_0^2} - \frac{x_2}{x_0} + 1\right)$

$$= x_1^2 - x_0x_2 + x_0^2$$

è un polinomio omogeneo di grado $= \deg f$.

OSS: $\overline{C} \cap j(A^2_K) = \{[1, x, y] \mid 1^2 \cdot f(\frac{x}{1}, \frac{y}{1}) = f(x,y) = 0\}$

$= j(C)$

DOMANDA: $\overline{C} \cap \{x_0 = 0\} = ?$

Def. I punti di $\overline{C} \cap \{x_0 = 0\}$ si dicono PUNTI IMPROPRI o PUNTI ALL'INFINITO DI C.

Corrispondono alle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0 \end{cases} \quad (**)$$

Osserviamo che l'equazione $(**)$ determina una "conica" di $\mathbb{P}^1_K$, con matrice associata $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

In modo perfettamente analogo al caso di $\mathbb{P}^2_K$ si può dimostrare che i punti impropri sono proiettivamente equivalenti a uno dei seguenti luoghi di zeri:

$K = \mathbb{C}$
- $x_1^2 + x_2^2 = 0$ 2 punti distinti
- $x_1^2 = 0$ 1 punto doppio

$K = \mathbb{R}$
- $x_1^2 + x_2^2 = 0$ $\emptyset$ $\iff \det A_0 > 0$
- $x_1^2 - x_2^2 = 0$ 2 punti distinti $\iff \det A_0 < 0$
- $x_1^2 = 0$ 1 punto doppio $\iff \det A_0 = 0$

Concludiamo quindi che:

Prop. Una conica non degenere in $A^2_{\mathbb{R}}$ è:

- un'ellisse $\iff$ non ha punti impropri reali
- un'iperbole $\iff$ ha due punti impropri reali (distinti)
- una parabola $\iff$ ha un unico punto improprio reale (doppio).

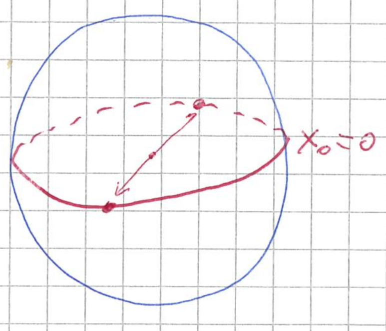
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEI PUNTI IMPROPRI

Un modello di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è dato dalla sfera

$$S^2=\{x_0^2+x_1^2+x_2^2=1\} \subseteq A^3_{\mathbb{R}}$$

in cui i punti antipodali (x_0, x_1, x_2) e $(-x_0, -x_1, -x_2)$ vengono identificati.

La retta impropria $x_0=0$ è rappresentata dall'equatore, con i punti antipodali identificati.

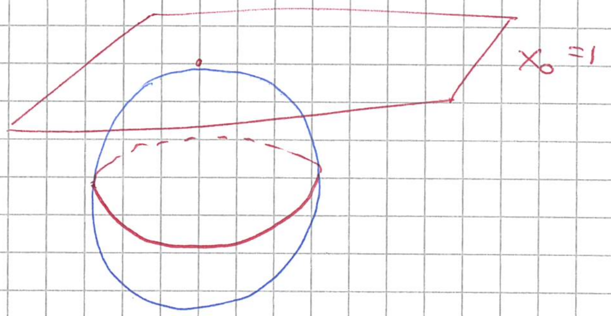


Consideriamo la mappa suriettiva:

$$p: S^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$$

il sottoinsieme $j(A^2_{\mathbb{R}}) = \{[1, x, y] \mid (x, y) \in A^2_{\mathbb{R}}\}$

è immagine del piano affine $x_0 = 1$:



ad ogni conica affine, corrisponde la sua chiusura proiettiva, che si ottiene intersecando il cono di $A^3_{\mathbb{R}}$ di eq. $(hf)(x_0, x_1, x_2) = 0$ con la sfera S^2 e identificando i punti antipodali.

SI VEDANO LE RAPPR. GRAFICHE OTTENUTE CON MAPLE.